

РАЗВОЈ ПОСТУПАКА
ЗА САБИРАЊЕ И ОДУЗИМАЊЕ

Александар Сеничић

Подстицање менталног развоја ученика, развијање њихових способности и вештина, оспособљавање за увиђање односа и веза између елемената у датој ситуацији, неки су од кључних циљева образовања. Настава математике прави је пут ка томе. Увођењем ученика у свет математичког размишљања и расуђивања оспособљавамо их за успешно решавање животних проблема. Кључ за боље разумевање математичких законитости и за ефикасније решавање проблемских задатака, лежи у примени поступака, метода, техника које повезују леву и десну мождану хемисферу, стимулишући мисаоне процесе који доводе до продукције идеја. Важно је активирати „мостове“ који повезују неуроне и омогућавају ширење стимулације. Увођење задатака у форми стрипа, загонетних прича, математичких прича, игара и физичке активности у наставу, доводи до синхронизованог рада свих делова мозга.

Решавање математичких проблема путем визуелизације и цртања претпоставља да ученици решавају делић по делић, корак по корак, математичког проблема. Поступно и уситњавањем захтева на најмање делове, ученицима се омогућава да лакше схватају концепте и логику решавања.

Предуслов за ово јесте добро усвајање и разумевање рачунских радњи. Развој поступака сабирања и одузимања кључни је исход који треба остварити у развоју математичког мишљења. У почетним фазама овог процеса визуелизација битно доприноси разумевању поступка али и њиховом усвајању. Да је овакав приступ ефикасан потврђују и Пијажеове тврдње да сазнавање није пуко сабирање информација, већ интеракција субјекта са објектима.

ПРЕДСТАВЉАЊЕ БРОЈЕВА

Користићемо квадрате.
У сваком реду ставићемо по један квадрат више него у претходном. Сваки пут ћемо квадрате пребројавати да бисмо дошли до одговора колико има квадрата у једном реду. Желим да на тај начин деца схвате појам броја.

Појам нуле можемо објаснити помоћу реченице "у овом реду нема квадрата".

Други проблем ће бити појам броја 10 и његов запис, али тиме ћемо се позабавити касније.

0	
1	■ 1
2	■ ■ 1 2
3	■ ■ ■ 1 2 3
4	■ ■ ■ ■ 1 2 3 4
5	■ ■ ■ ■ ■ 1 2 3 4 5
6	■ ■ ■ ■ ■ ■ 1 2 3 4 5 6
7	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ 1 2 3 4 5 6 7
8	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ 1 2 3 4 5 6 7 8
9	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ 1 2 3 4 5 6 7 8 9
10	■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Ученици могу направити троугаону табелу као на слици да им помогне у раду. То је визуелна помоћ у раду. Оваква табела је корисна док се не створи рутину у памћењу бројева и њиховог редоследа.

0										
1	■									
2	■	■								
3	■	■	■							
4	■	■	■	■						
5	■	■	■	■	■					
6	■	■	■	■	■	■				
7	■	■	■	■	■	■	■			
8	■	■	■	■	■	■	■	■		
9	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
10	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

САБИРАЊЕ БРОЈЕВА ДО 5

Израчунајмо збир $3+2$.

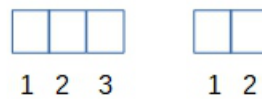
Сабирке ћемо представити квадратићима.

Број 3 - три квадратића

Број 2 - два квадратића



За сабирање користимо БРОЈЕВНУ ТРАКУ.



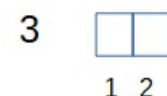
На бројевну траку преносимо један по један квадратић. Пренете квадратиће првог сабирка привремено бојимо у плаву и тако га означавамо.



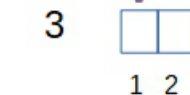
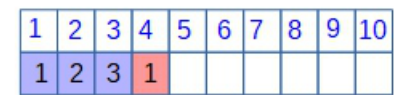
Преносимо други квадратић првог сабирка. И њега бојимо у плаво.



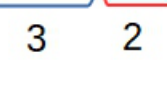
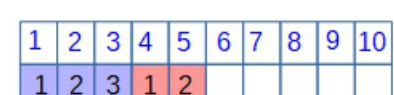
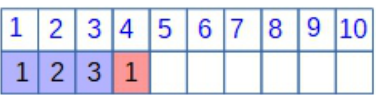
Када пренесемо трећи квадратић додаћемо ознаку која показује на траци први сабирак и написаћемо вредност првог сабирка: 3.

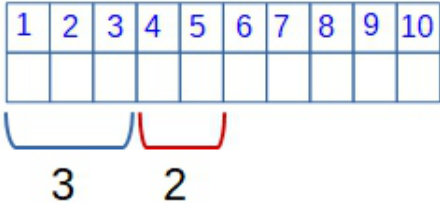
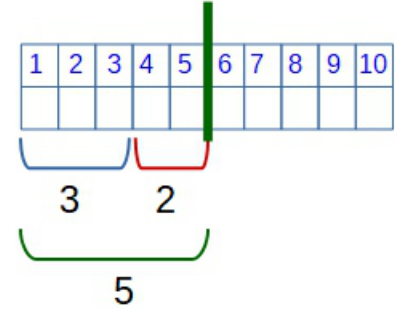
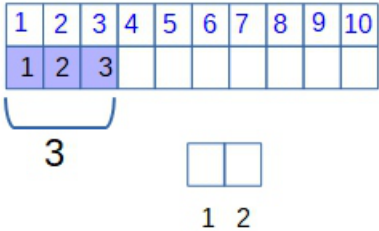
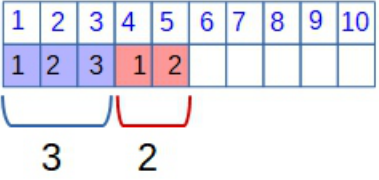
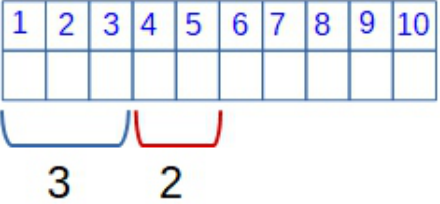
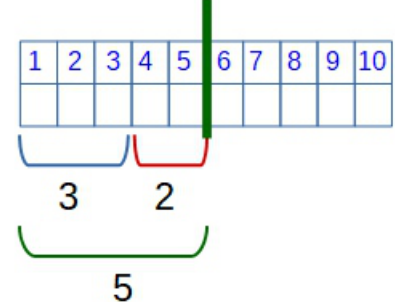


Почињемо пренос другог сабирка. Пренете квадратиће другог сабирка привремено бојимо у црвено и тако га означавамо.



Када пренесемо други квадратић додаћемо ознаку која показује на траци други сабирак и написаћемо вредност другог сабирка: 2.



<p>Склонимо боју са бројевне траке да бисмо "вратили" сабирке у првобитно стање, како је било приказано на почетку.</p>	
<p>Зеленом бојом обележимо границу докле су "дошли" сабирци. Бројевна трака показује да је то број 5. Значи $3+2 = 5$.</p>	
<p>Када ученици схвате технику преноса, можемо прескочити појединачан пренос квадратића и убрзати процес. Сваки сабирак одједном уписујемо на траку.</p>	
<p>Први сабирак ћемо ставити на бројевну траку. Обојићемо га у плаву боју да бисмо назначили први сабирак. Испод сабирка написаћемо вредност првог сабирка (3).</p>	
<p>Други сабирак ћемо ставити на бројевну траку. Обојићемо га у црвену боју да бисмо назначили други сабирак. Испод другог сабирка написаћемо вредност другог сабирка (2). Различите боје визуелно одвајају сабирке.</p>	
<p>Склонимо боју са бројевне траке да бисмо "вратили" сабирке у првобитно стање, како је било приказано на почетку.</p>	
<p>Зеленом бојом обележимо границу докле су "дошли" сабирци. Бројевна трака показује да је то број 5. Значи $3+2 = 5$.</p>	

СТАЛНОСТ ЗБИРА

Ове особине можемо искористити код формирања алгоритама за сабирање. Ако на моделу премештамо вредности укупна вредност се неће променити.

На моделу видимо две вредности.

$$a+b$$



На моделу смо другу вредност поделили на две мање вредности. Укупна вредност не мења се на моделу.

$$b=c+d$$

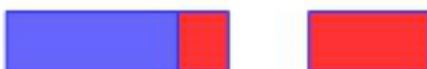
$$+b=a+(c+d)$$



На моделу смо једну од две "црвене" вредности "додали" првој вредности.

$$a+b=a+(c+d)$$

$$a+b=(c+d)$$



На крају је $e=a+c$ и добијамо да је укупна вредност

$$a+b=(a+c)+d$$

$$a+b=e+d$$



Ако погледамо низ модела то можемо преточити у низ једнакости.

$$a+b=a+(c+d)=(a+c)+d=e+d.$$

Применом оваквог приступа добијамо алгоритам за сабирање са преносом преко 10. Сабирање са преносом преко 10 један је од кључних делова алгоритма за сабирање. Алгоритам није једноставан, јер у себи садржи неколико корака.

1. Процена да ли је збир већи од 10.
2. "Разбијање другог" сабирка на два подсабирка
 - 2.1 Одређивање првог подсабирка као допуна првог сабирка до броја 10
 - 2.2 Одређивање другог подсабирка као разлика другог сабирка и првог подсабирка
3. Примена асоцијативног закона на сабирање. Груписање првог сабирка и првог подсабирка (чији је збир 10).
4. Коначно добијање резултата.

ДОПУНА ДО 10

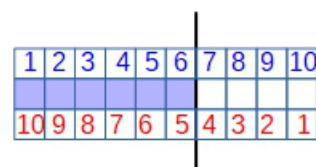
Један од важнијих модела у формирању алгоритама за сабирање и одузимање је допуна до броја 10 или подела броја 10 на два сабирка.

Пример 1. Одредити допуну броја 6 до броја 10.

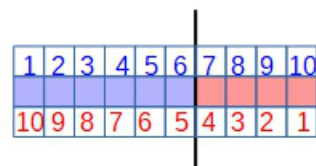
У кораку 1. поставимо модел са квадратима, при чему имамо две бројевне траке: горња бројевна трака која иде од 1 до 10 и доња бројевна трака која иде са десна у лево од 1 до 10.



У 2. кораку постављамо линију којом одвајамо 6 квадрата од осталих квадрата. Бојимо плавом бојом тих 6 квадрата, дакле наглашавамо први део и тиме представљамо први број (6).



У 3. кораку бојимо преостале квадрате црвеном бојом и тако наглашавамо други број, односно преостале квадрате.



У 4. кораку раздвојимо квадрате по линији која је постављена и можемо "прочитати" колико је квадрата "преостало". Црвена бројна трака нам помаже у бројању и даје информацију да је резултат 4.



Раздвојили смо сабирке да се виде две одвојене целине, односно два сабирка. И остало је да се обришу боје да се назначи да су објекти исте врсте.



Сада можемо да формирамо закључак.
Допуна броја 6 до броја 10 је број 4.

Свакако треба показати и остале поделе и увежбати ову рутину, јер се на њој заснивају алгоритами за сабирање и алгоритами за одузимање.

Задатак који може у овоме помоћи гласи:

Мама је направила 10 палачинки. Данило и Никола појели су све палачинке. Колико је палачинки појео Данило, а колико је палачинки појео Никола?

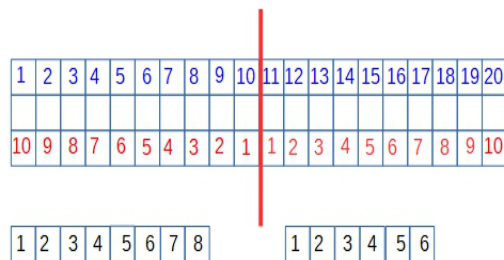
Овакав задатак нема јединствено решење. Задатак ученика био би да открију сва могућа решења. Потенцијални проблем је случај када је један сабирак 0.

$$0+10=10+0=10.$$

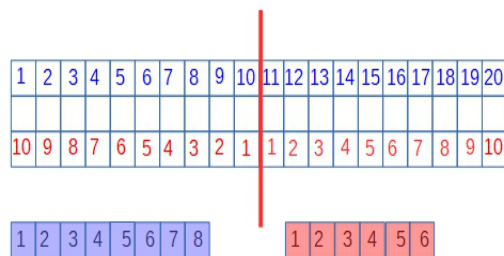
САБИРАЊЕ ДВА ЈЕДНОЦИФРЕНА БРОЈА СА ПРЕНОСОМ ПРЕКО 10

Пример: Израчунати збир $8+6$.

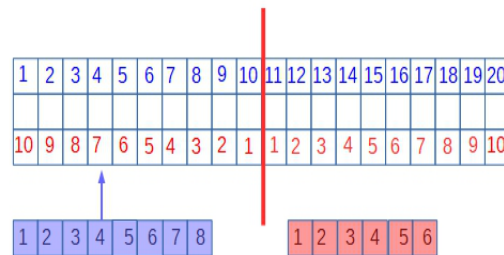
Користићемо модел за сабирање који има три траке. Прва трака је бројевна полуправа од 1 до 20 уписана у квадратиће. Друга трака је трака сабирака у којој ћемо учрпавати сабирке. Трећа трака служи за одређивање "разбијања" другог сабирка на два сабирка од којих је један допуна до 10. Трећа трака има две бројевне полуправе. Обе су од 1 до 10. Прва иде са десна у лево и служи за одређивање допуне до 10, а друга трака иде са лева у десно и служи да одреди други сабирак.



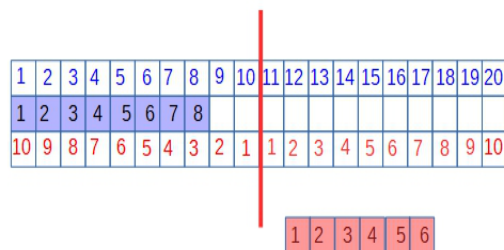
У 1. кораку смо обојили сабирке да бисмо лакше разликовали сабирке.



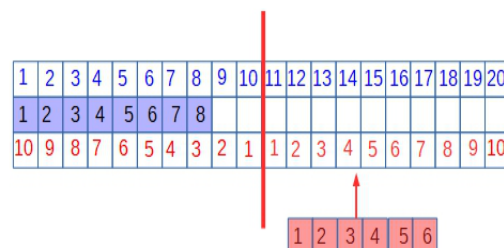
У 2. кораку смо означили стрелицом да желимо први сабирак (плави) да додамо на траку за сабирање.



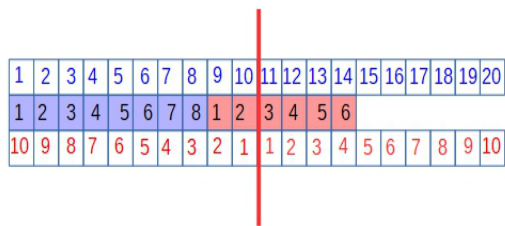
У 3. кораку смо то урадили. Први сабирак је прешао на траку.



У 4. кораку смо означили стрелицом да желимо други сабирак (црвени) да додамо на траку за сабирање.



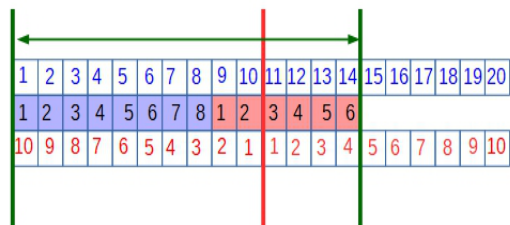
У 5. кораку уписали смо други сабирак у траку сабирака.



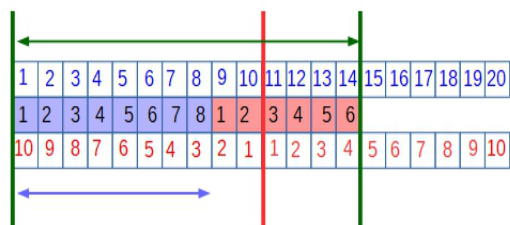
У 6. кораку додајемо граничне линије и стрелицу која показује резултат.

$$8+6=14$$

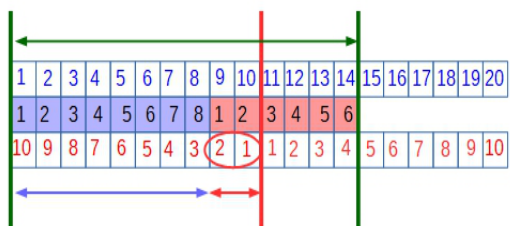
Ово је било одређивање резултата уз помоћ "машине" за сабирање.



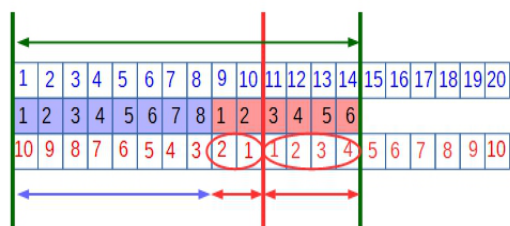
Овај модел ћемо искористити да одредимо алгоритам. Обележимо први сабирак (плави) плавом стрелицом. Потребно је учити да други сабирак (црвени) можемо поделити на два подсабирка који ће нам олакшати сабирање када не будемо имали модел са тракама.




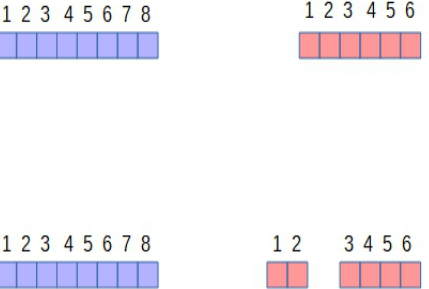
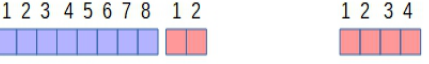
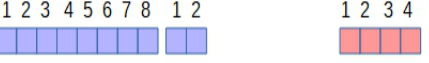
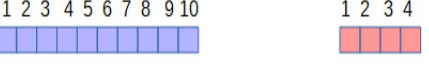
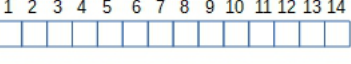
Црвена гранична линија показује где је на траци број 10. То нам помаже да одредимо први подсабирак. Црвена бројна трака показује колико ће први подсабирак да буде. У овом случају то је 2 и то је допуна првог сабирка до 10.



Други подсабирак уочавамо посматрајући другу црвену бројну осу. Она показује да је други подсабирак у овом случају 4. Други подсабирак можемо добити и одузимањем броја 6 и броја 2, односно другог сабирка и првог подсабирка.



Ако пратимо алгебарски запис то изгледа овако:
 $8 + 6 = 8 + (2+4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$

<p>Сада понављамо алгоритам, али без помоћних трака.</p> <p>У 1. кораку нацртамо сабирке и лабеле са бројним осама.</p>	
<p>У 2. кораку обојимо сабирке. Први сабирак је обојен у плаво, а други сабирак је обојен у црвено.</p> <p>У 3. кораку одређујемо допуну броја 8 до 10. То нам је потребно да бисмо поделили други сабирак на два сабирка. Допуна броја 8 до 10 је број 2. Тако да је први подсабирак другог сабирка број 2.</p> <p>У 4. кораку је потребно одредити други подсабирак. Други подсабирак се добија када од другог сабирка одузмемо први подсабирак. $6-2=4$</p>	
<p>У 5. кораку први подсабирак припајамо првом сабирку. Суштински примењујемо здруживање сабирака.</p>	
<p>У 6. кораку мењамо боју првог подсабирка из црвене боје у плаву боју. Желимо да бојом нагласимо да желимо да "здружимо сабирке".</p>	
<p>У 7. кораку користимо допуну до 10 и можемо да добијемо поново два сабирка, али сада знамо да је први сабирак 10, а да је други сабирак 4.</p>	
<p>У 8. кораку бришемо боју и добијамо коначан резултат 14.</p>	
<p>Ако пратимо алгебарски запис то изгледа овако: $8 + 6 = 8 + (2+4) = (8 + 2) + 4 = 10 + 4 = 14$</p>	

САБИРАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА БЕЗ ПРЕНОСА

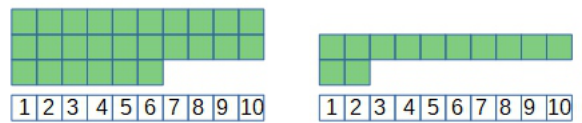
Пример сабирања двоцифрених бројева

Треба израчунати $26+12$.

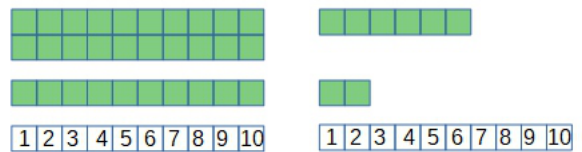
На моделу представимо бројеве

$26 = 20 + 6$ односно 2 десетице и 6 јединица

$12 = 10 + 2$ односно 1 десетица и 2 јединице



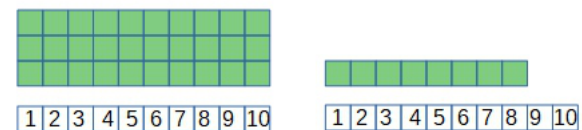
У 2. кораку групишемо десетице и групишемо јединице. Зато што се вредност на моделу не мења можемо да премештамо вредности како желимо.



У 3. кораку јединице смо "исправили" и ставили у један ред. Сада је модел спреман за израчунавање, односно пребројавање десетица и јединица:

3 десетице и 8 јединица

$30+8=38$



Ово је пример који не садржи "пренос", већ су зборови јединица и зборови десетица мањи од 10.

САБИРАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ

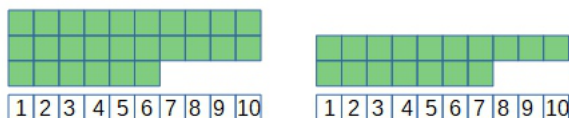
Пример сабирања двоцифрених бројева са преносом.

Треба израчунати $26+17$.

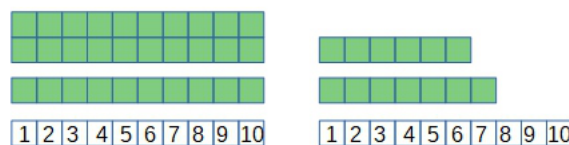
Представимо бројеве

$26 = 20 + 6$ односно 2 десетице и 6 јединица

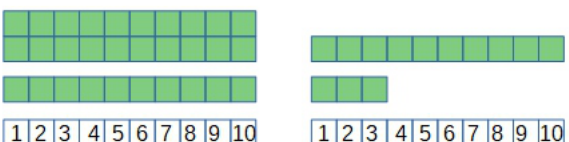
$17 = 10 + 7$ односно 1 десетица и 7 јединица



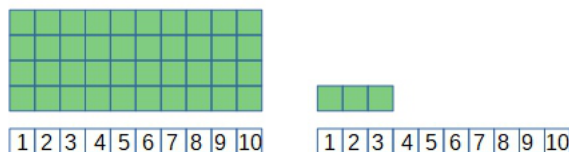
У 2. кораку групишемо десетице и групишемо јединице. Зато што се вредност на моделу не мења можемо да премештамо вредности како желимо.



У 3. кораку јединице смо "исправили" и покушали јединице да ставимо у један ред. Број јединица је већи од 9 и "напунили" смо још једну десетицу. Због тога морамо десетицу пребацити у њену колону.



То видимо 4. кораку: 10 јединица груписано у једну десетицу је пребачено у суседну колону. Сада можемо почети израчунавање, односно пребројавање десетица и јединица.
 $40+8=48$



САБИРАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА БЕЗ ПРЕНОСА

Алгоритам сабирања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што посебно приказујемо десетице а посебно јединице и сваки део има бројевне траке.

Изрчунајмо колики је збир бројева 26 и 12.

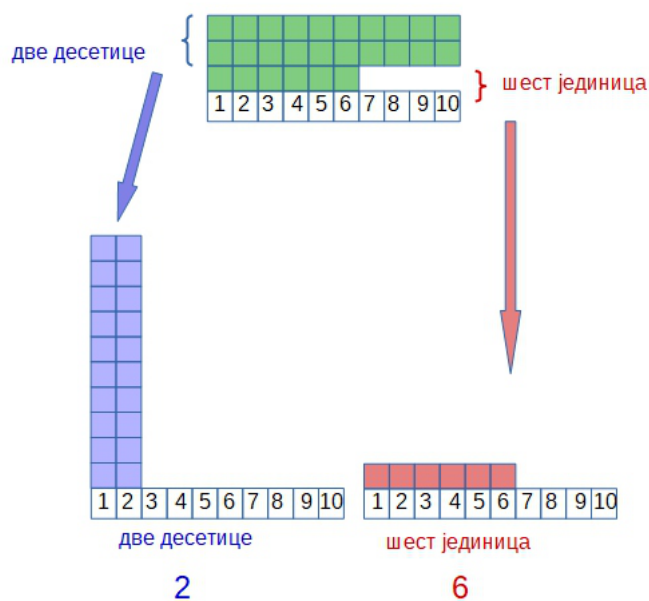
Број 26 је приказан као две десетице и шест јединица. Сада смо направили две бројевне траке.

Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

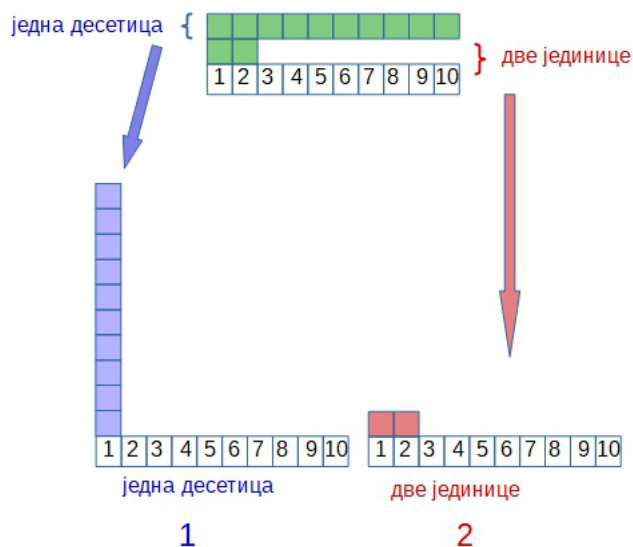
Десетицу представља десет квадрата. Десетице смо "усправили" да можемо да их бројимо на траци.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја).

Број 12 је приказан као једна десетица и две јединице. Као и за број 26 користимо исто две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.



26

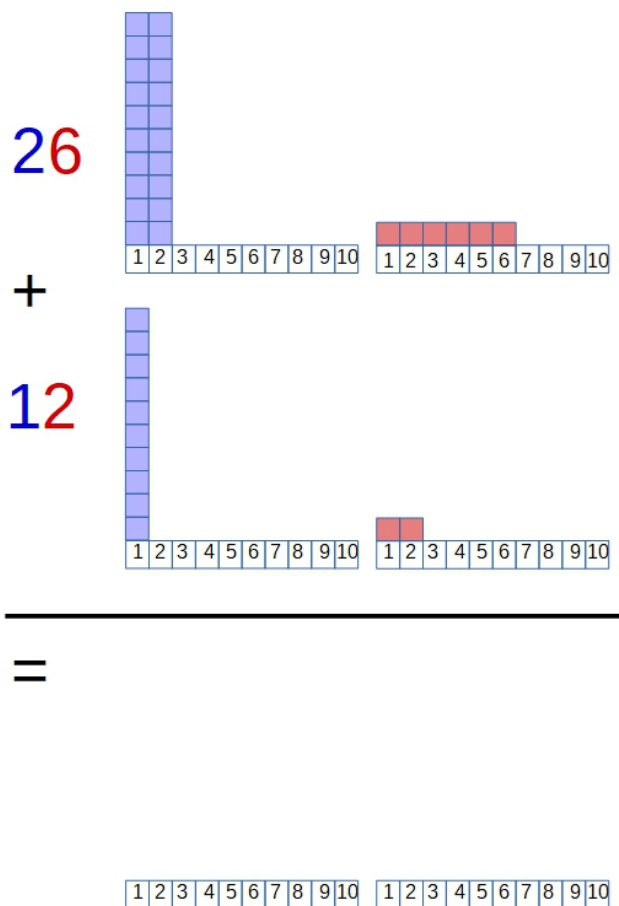


12

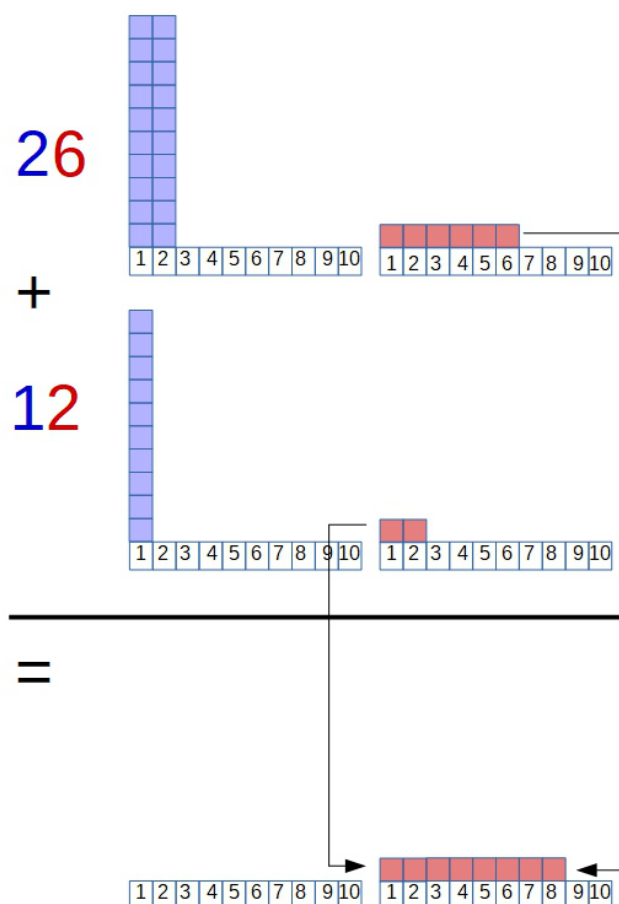
Број 26 је приказан као две десетице и шест јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

Број 12 на исти ЈЕ начин приказан као и број 26.

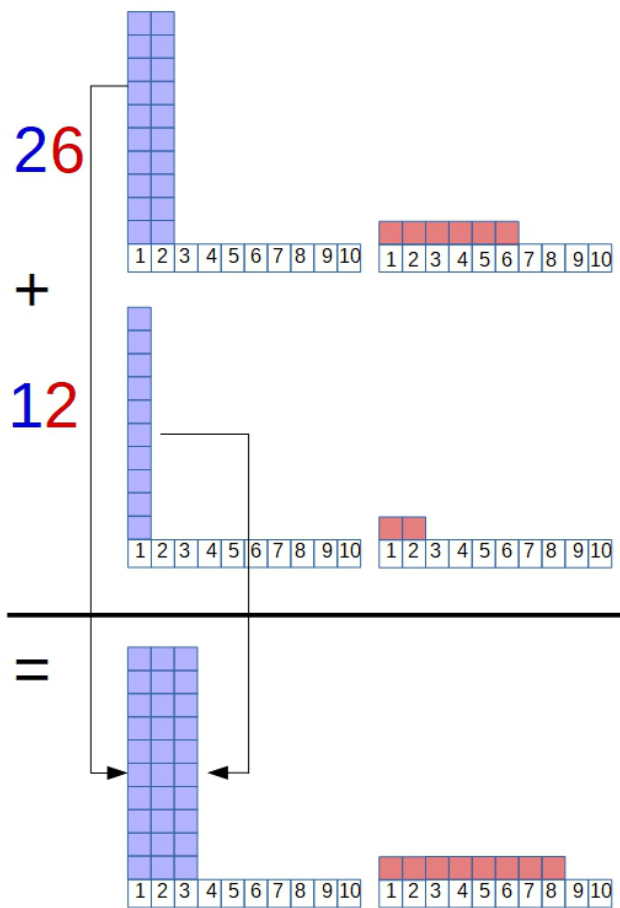
Приказана је бројевна трака за резултат. Једна бројевна трака за јединице а друга бројевна трака за десетице.



Сабирамо јединице и пребацујемо резултате на бројевну траку резултата једница.

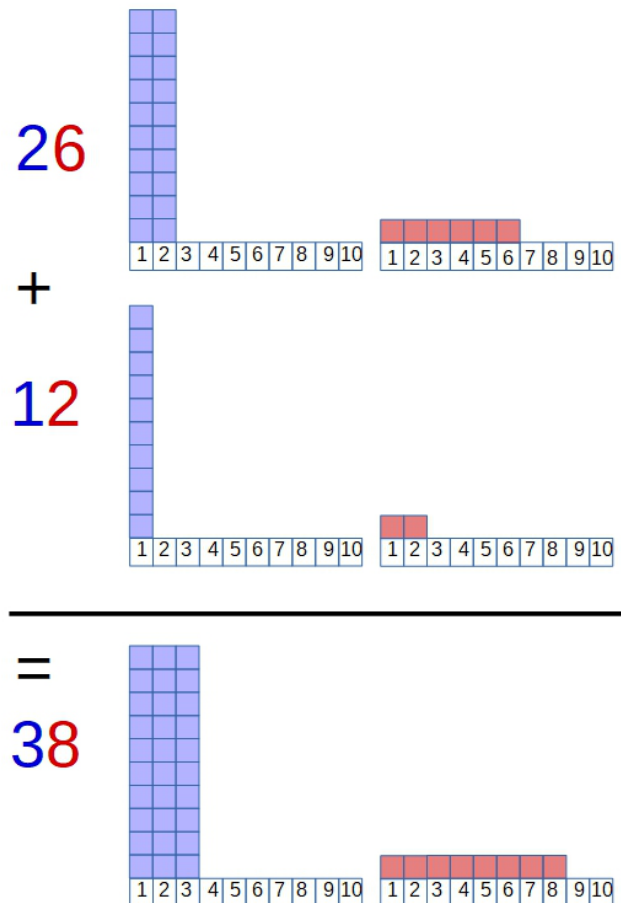


Сабирамо десетице и пребацујемо резултат на бројевну траку резултата десетица .



Како смо пребацили и десетице и јединице на њихове бројевне траке, можемо одредити резултат. Са бројевне траке читамо колико је у збиру јединица (8) и колико је десетица у збиру (3).

$$26+12=38.$$



САБИРАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ

Алгоритам сабирања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што посебно приказујемо десетице као десет квадрата, а посебно јединице и сваки део има бројевне траке.

Израчунајмо колики је збир бројева 26 и 17.

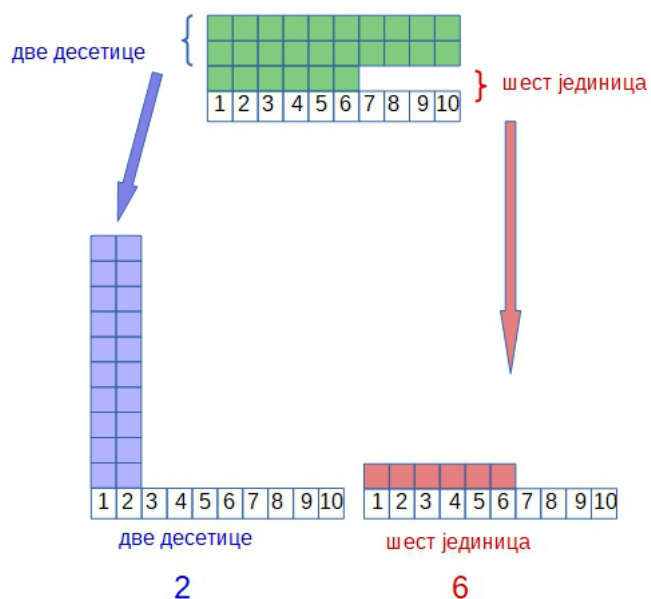
Број 26 приказан је као две десетице и шест јединица. Сада смо направили две бројевне траке.

Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

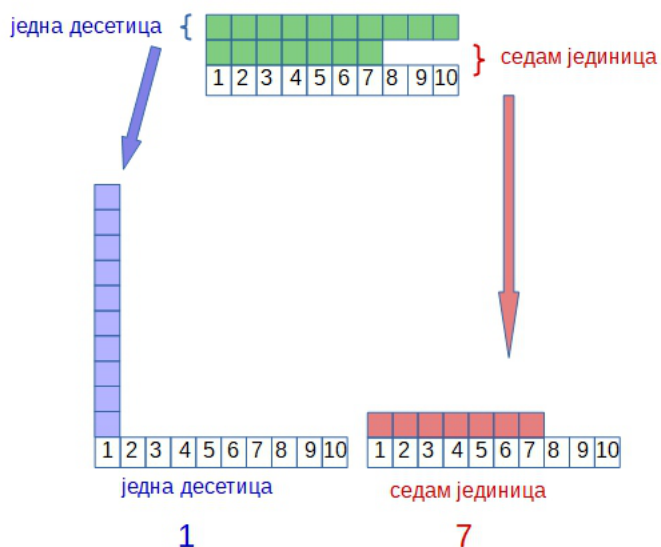
Десетицу представља десет квадрата. Десетице смо "усправили" да можемо да их бројимо на траци.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја).

Број 17 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 26 користимо две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.



26



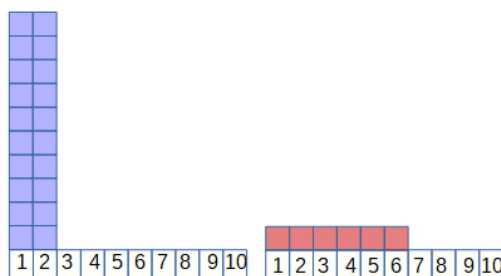
17

Број 26 приказан је као две десетице и шест јединица при чему су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

Број 17 на исти је начин приказан као и број 26.

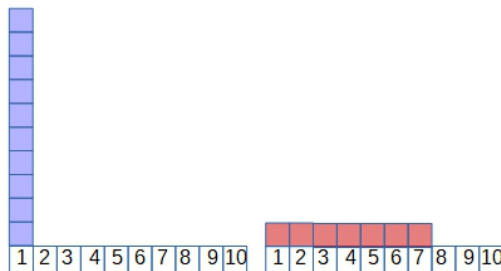
Приказана је бројевна трака за резултат, једна бројевна трака за јединице и друга бројевна трака за десетице.

26

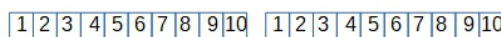


+

17



=

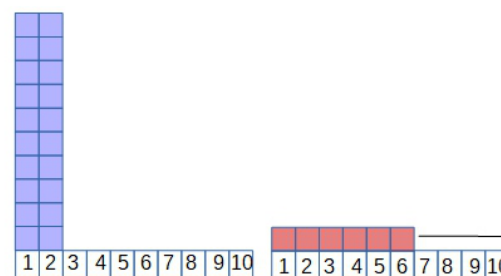


Прво из сваког сабирка пребацујемо јединице на бројевну траку где су јединице

$$6+7=13$$

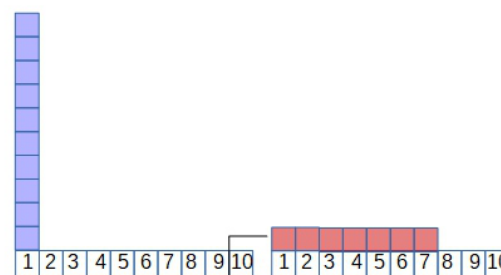
Резултат сабирања јединица је 13.

26

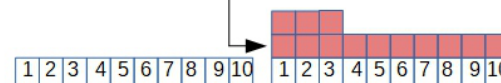


+

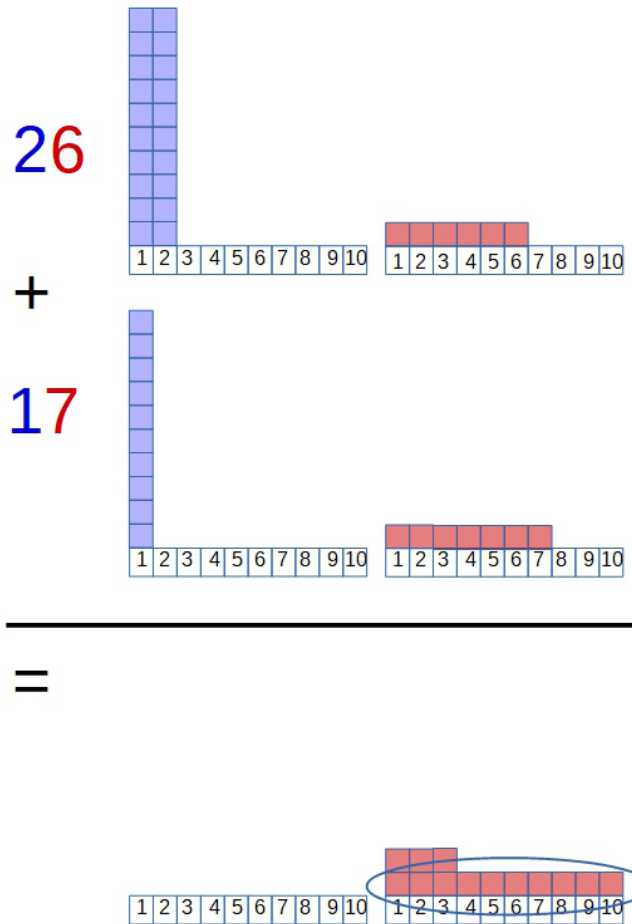
17



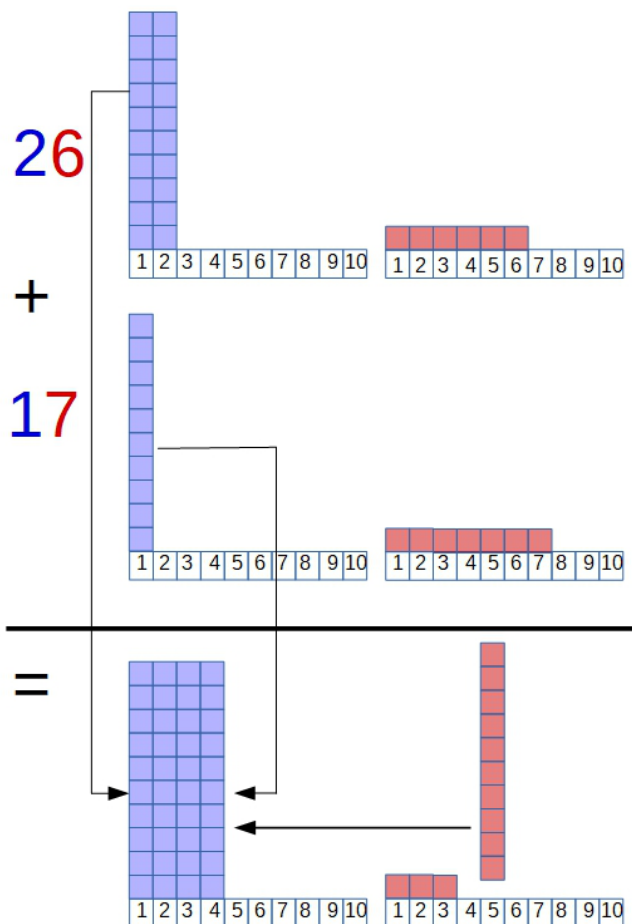
=



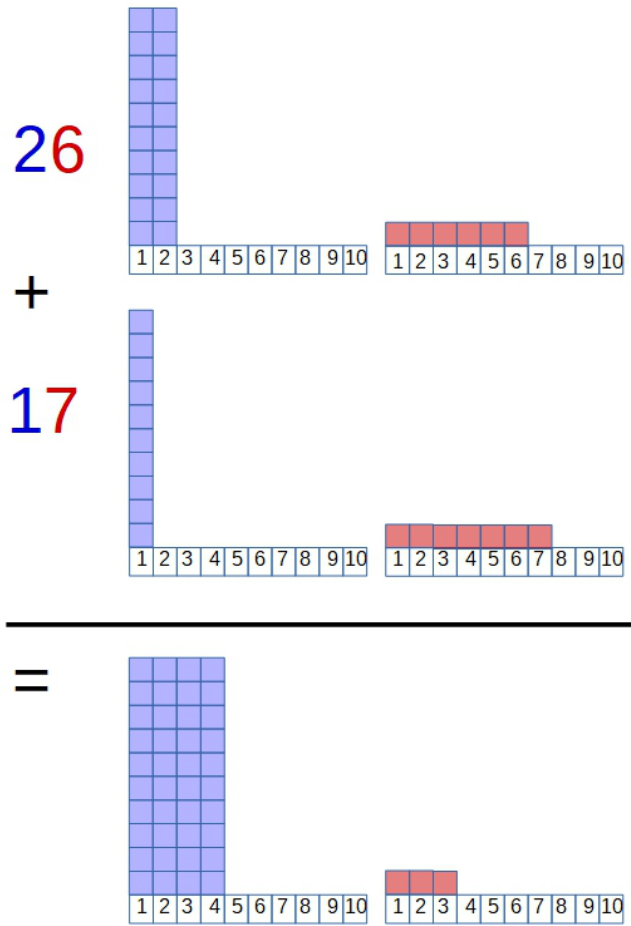
Резултат сабирања је 13, што значи да имамо једну десетицу и три јединице (имамо пренос).



Потребно је сабрати десетице: две десетице у првом сабирку, једну десетицу у другом сабирку и једна десетица која прелази из колоне јединица.

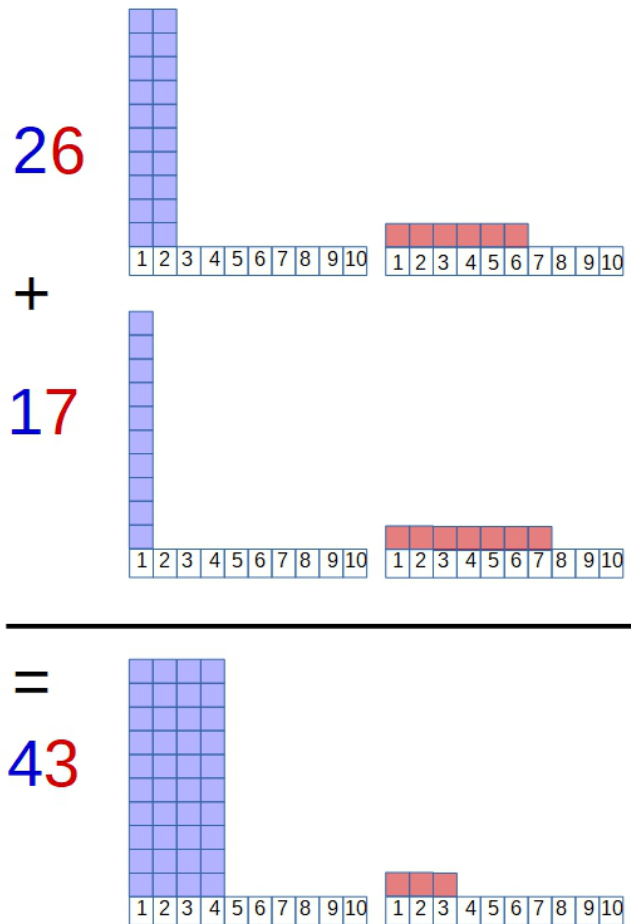


Добили смо четири десетице.
Све то треба да објединимо на
бројевној траци за десетице.



Сада остаје да са бројевне траке
прочитамо резултат. Бројевној траке за
десетице показује да имао 4 десетице,
а бројевна трака за јединице показује
да имамо 3 јединице.
Резултата је 43.

$$26 + 17 = 43.$$



САБИРАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА БЕЗ ПРЕНОСА

Алгоритам сабирања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што посебно приказујемо десетице као квадрат са ознаком 10, а јединице као квадрат са ознаком 1 и сваки део резултата има бројевне траке.

Израчунајмо збир бројева 26 и 12.

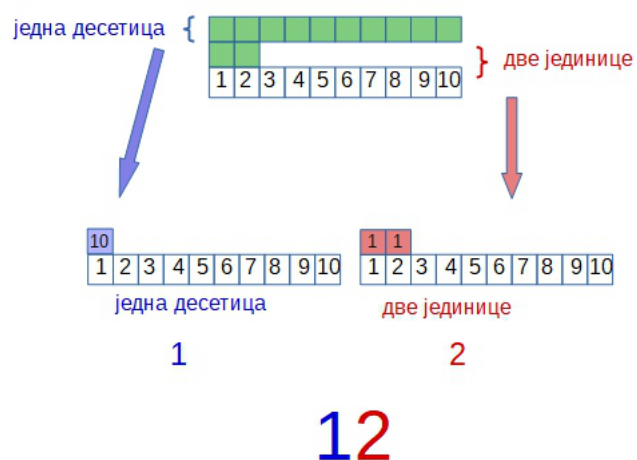
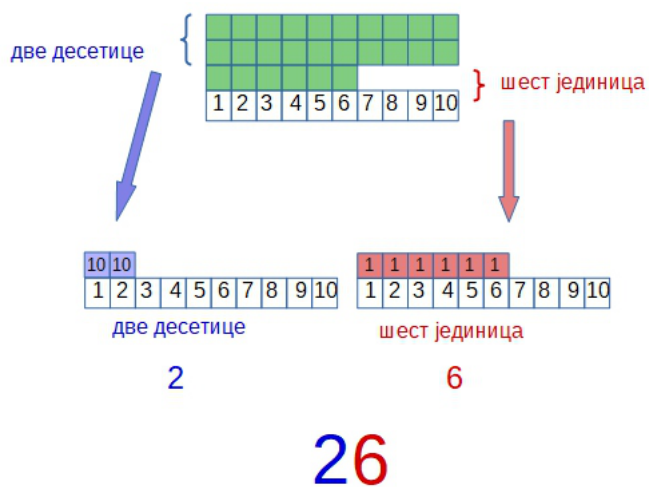
Број 26 је приказан као две десетице и шест јединица. Сада имамо две бројевне траке.

Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

Десетицу представља један квадрат са ознаком 10. Укупно два таква квадрата представљају две десетице. Јединице представљају квадрати са ознаком 1. Шест таквих квадрата престављају јединице.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја)

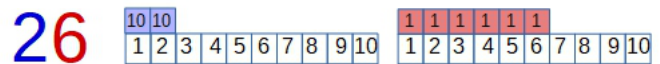
Број 12 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 26 користимо две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.



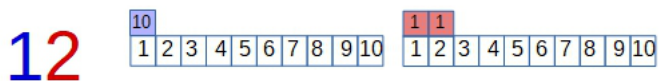
Број 26 приказан је као две десетице и шест јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

Број 12 на исти је начин приказан као и број 26.

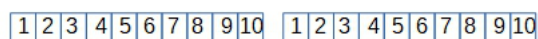
Приказана је бројевна трака за резултат: једна бројевна трака за јединице и друга бројевна трака за десетице.



+



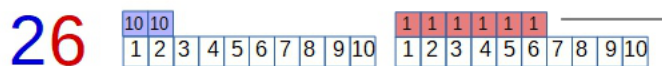
=



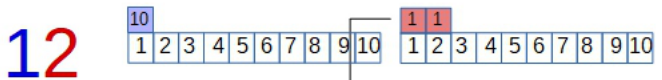
Сабирамо јединице:
шест јединица из првог сабирка и две јединице из другог сабирка.

$$6+2=8$$

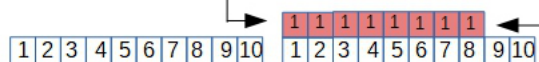
Јединице приказујемо на бројевној траци резултата јединица.



+



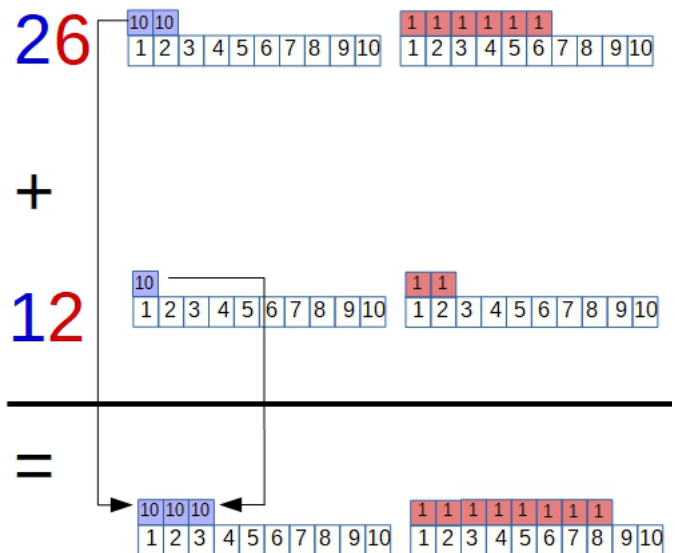
=



Сада сабирамо десетице:
 две десетице из првог сабирка и једна
 десетица из другог сабирка.

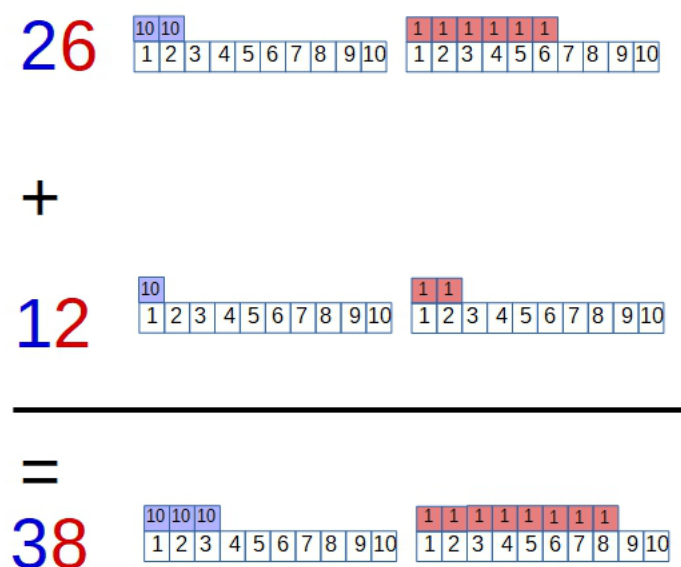
$$2+1=3$$

Десетице приказујемо на бројевној
 траци резултата десетица.



Са бројевне траке читамо колико је у
 збиру јединица (8) и колико је десетица
 у збиру (3).

$$26+12=38.$$



САБИРАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ

Алгоритам сабирања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што посебно приказујемо десетице, а посебно јединице и сваки део има бројевне траке.

Израчунајмо збир бројева 26 и 17.

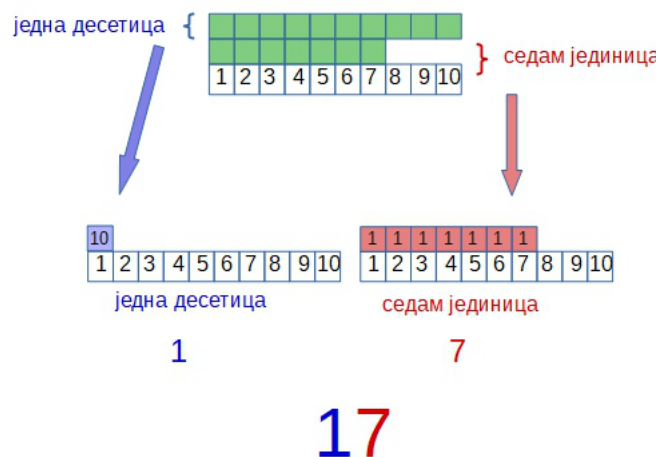
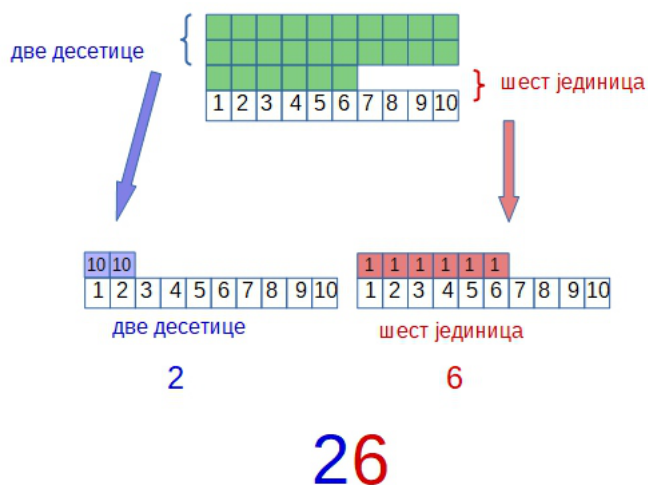
Број 26 приказан је као две десетице и шест јединица. Сада имамо две бројевне траке.

Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

Десетицу представља један квадрат са ознаком 10. Укупно два таква квадрата представљају две десетице. Јединице представљају квадрати са ознаком 1. Шест таквих квадрата престављају јединице.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и јединице (црвена боја).

Број 17 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 26 користимо две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.

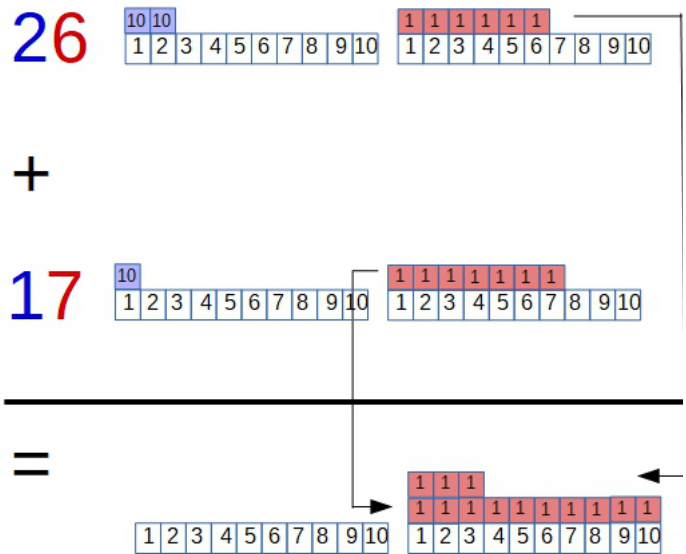


Број 26 приказан је као две десетице и шест јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

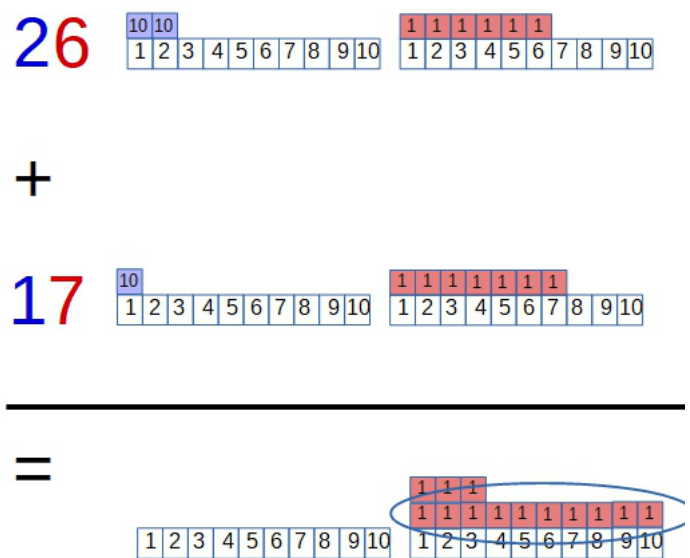
Број 17 на исти је начин приказан као и број 26.

Резултат сабирања формирамо тако што из сваког сабирка пребацујемо јединице на бројевну траку где су јединице:

$$6+7=13$$

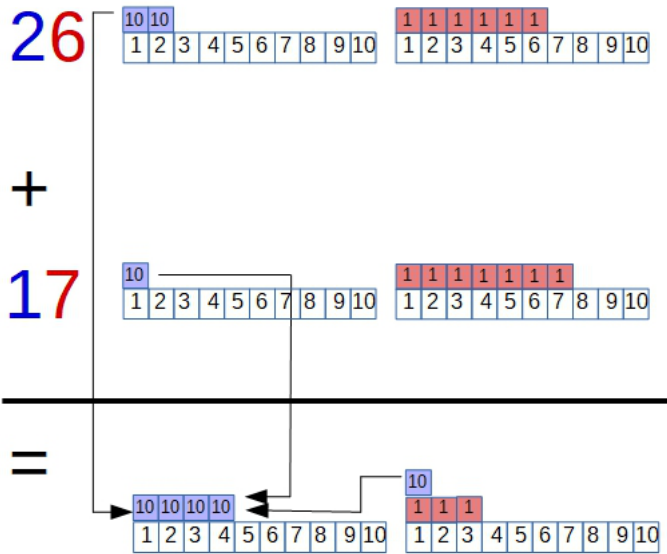


Резултат сабирања је већи од 13, што значи да имамо једну десетицу и три јединице. (имамо пренос)



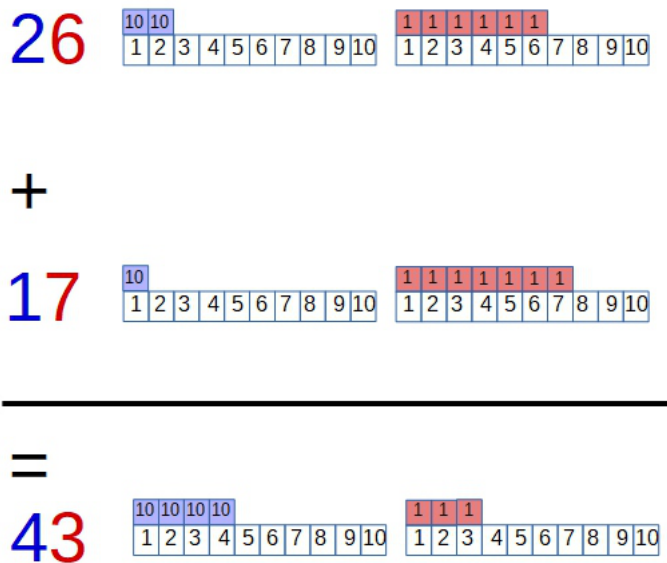
Сада треба сабрати десетице. Имамо десетице у сваком сабирку, али имамо и једну десетицу у колони где су јединице. Све то треба да објединимо на бројевној траци за десетице.

$$2+1+1=4$$



Сада остаје да са бројевне траке прочитамо резултат. Бројевна трака за десетице показује да имао 4 десетице, а бројевна трака за јединице показује да имамо 3 јединице. Резултат је 43.

$$26+17=43.$$



Алгоритам сабирања сада пребацујемо са квадратића на десетице и јединице. Важно је да ђаци науче појам записа броја и значење позиције цифара у броју.

26 је запис који представља 2 десетице и 6 јединица.

12 је запис који представља 1 десетицу и 2 јединице.

Израчунајмо збир бројева 26 и 12.

На моделу у 1. кораку сабирке записујемо једне испод других у табели. У једној колони су јединице, а у другој колони су десетице.

26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
+ 12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ

У 2. кораку сабирамо јединице и резултат уписујемо у табелу. 6 јединица + 2 јединице
Резултат је 8 јединица.
 $6+2=8$

26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
+ 12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ
		8 ЈЕДИНИЦА

У 3. кораку сабирамо десетице и резултат уписујемо у табелу. 2 десетице + 1 десетица
Резултат је 3 десетице.
 $2+1=3$

26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
+ 12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ
	3 ДЕСЕТИЦЕ	8 ЈЕДИНИЦА

У 4. кораку формирамо резултат. 3 десетице + 8 јединица
38
 $26+12=38$

26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
+ 12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ
38	3 ДЕСЕТИЦЕ	8 ЈЕДИНИЦА

Израчунајмо збир бројева 26 и 17.

На моделу у 1. кораку сабирке записујемо једне испод других у табели. У једној колони су јединице, а у другој колони су десетице.

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17		

У 2. кораку сабирамо јединице и резултат уписујемо у табелу. 6 јединица + 7 јединица
Резултат је 13 јединица.
 $6+7=13$

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17		
		13 ЈЕДИНИЦА

У 3. кораку резултат 13 јединица претварамо у 1 десетицу и 3 јединице.
 $13=10+3$

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17		
		1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ

У 4. кораку из колоне где су јединице морамо пребацити 1 десетицу у колону где су десетице.

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17		
		1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ

У 5. кораку смо добили да се у колони десетица налазе све десетице. Сада је све припремљено за сабирање десетица.

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17	1 ДЕСЕТИЦА	
		3 ЈЕДИНИЦЕ

У 6. кораку сабирамо све десетице које у у колони десетица:
2 десетице + 1 десетица + 1 десетица = 4 десетице
 $2+1+1=4$

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17	1 ДЕСЕТИЦА	
	4 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ

У 7. кораку формирамо резултат
4 десетице + 3 јединице
43
 $26+17=43$

+ 26	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
+ 17	1 ДЕСЕТИЦА	
43	4 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ

Овај задатак можемо урадити на други начин.

<p>На моделу у 1. кораку сабирке записујемо једне испод других у табели. У једној колони су јединице, а у другој колони су десетице.</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td> </td><td> </td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА							
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
<p>У 2. кораку сабирамо јединице и резултат уписујемо у табелу. 6 јединица + 7 јединица Резултат је 13 јединица.</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td> </td><td>13 ЈЕДИНИЦА</td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА		13 ЈЕДИНИЦА					
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
	13 ЈЕДИНИЦА												
<p>У 3. кораку сабирамо десетице и резултат уписујемо у табелу: 2 десетице + 1 десетица Резултат је 3 десетице.</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>3 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>13 ЈЕДИНИЦА</td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА	3 ДЕСЕТИЦЕ	13 ЈЕДИНИЦА					
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
3 ДЕСЕТИЦЕ	13 ЈЕДИНИЦА												
<p>У 4. кораку Како је вредност јединица већа од 9 претварамо 13 јединица у 1 десетица и 3 јединице $13=10+3$</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>3 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ</td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА	3 ДЕСЕТИЦЕ	1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ					
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
3 ДЕСЕТИЦЕ	1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ												
<p>У 5. кораку означавамо да десетицу из колоне јединица треба пребацити у колону где су све десетице.</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>3 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ</td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА	3 ДЕСЕТИЦЕ	1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ					
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
3 ДЕСЕТИЦЕ	1 ДЕСЕТИЦА 3 ЈЕДИНИЦЕ												
<p>У 6. кораку груписали смо све десетице и припремили смо их за сабирање: 3 десетице + 1 десетица Резултат је 4 десетице.</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>3 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>3 ЈЕДИНИЦЕ</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td> </td></tr> <tr><td>4 ДЕСЕТИЦЕ</td><td> </td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА	3 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ	1 ДЕСЕТИЦА		4 ДЕСЕТИЦЕ		
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
3 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ												
1 ДЕСЕТИЦА													
4 ДЕСЕТИЦЕ													
<p>У 7. кораку добијени резултат уписали смо у поље где су десетице.</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>4 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>3 ЈЕДИНИЦЕ</td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА	4 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ					
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
4 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ												
<p>У 8. кораку добијамо резултат: 4 десетице + 3 јединице 43 $26+17=43$</p>	$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \\ \hline 43 \end{array}$	<table border="1"> <tr><td>2 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>6 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>1 ДЕСЕТИЦА</td><td>7 ЈЕДИНИЦА</td></tr> <tr><td>4 ДЕСЕТИЦЕ</td><td>3 ЈЕДИНИЦЕ</td></tr> </table>	2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА	4 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ					
2 ДЕСЕТИЦЕ	6 ЈЕДИНИЦА												
1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА												
4 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ												

Коначни алгоритам сабирања. Сабирање без преноса.

Израчунај збир $26+12$.
 Сабирке пишемо једне испод других.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 12 \\ \hline \end{array}$$

Сабирке уписујемо у посебне ћелије тако да јединице буду испод јединица, а десетице испод десетица.
 Плавом бојом бојимо "кућице" резултата.
 Између бројева убацујемо "кућице" за евентуални пренос.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 12 \\ \hline \\ \end{array}$$

Прво сабирамо јединице.
 $6+2=8$
 Резултат уписујемо у "кућицу" за јединице резултата.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 12 \\ \hline 8 \\ \end{array}$$

Сабирамо десетице.
 $2+1=3$
 Резултат уписујемо у "кућицу" за десетице резултата.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 12 \\ \hline 38 \\ \end{array}$$

Остаје да прочитамо резултат.
 $26+12=38$.
 Резултат је 38.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 12 \\ \hline 38 \\ \end{array}$$

Коначни алгоритам сабирања. Сабирање са преносом.

Израчунај збир $26+17$.
Сабирке пишемо једне испод других.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \\ \hline \end{array}$$

Сабирке уписујемо у посебне ћелије тако да јединице буду испод јединица, а десетице испод десетица. Плавом бојом бојимо "кућице" резултата. Између бројева убацујемо "кућице" за евентуални пренос.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \\ \hline \\ \hline \end{array}$$

Прво сабирамо јединице.
 $6+7=13$
Како је резултат већи од 9, у црвену "кућицу" за пренос уписујемо 1 (једна десетица), а 3 уписујемо у "кућицу" за јединице.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \\ \hline 13 \\ \hline \end{array}$$

Сабирамо десетице.
 $2+1+1=4$
Сабрали смо и десетицу из преноса. Резултат уписујемо у "кућицу" за десетице резултата.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \\ \hline 13 \\ \hline 43 \\ \hline \end{array}$$

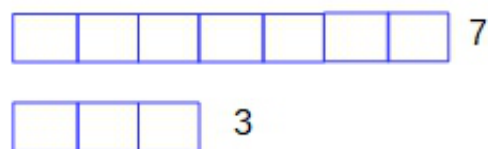
Остаје да прочитамо резултат.
 $26+17=43$.
Резултат је 43.

$$\begin{array}{r} 26 \\ + 17 \\ \hline 13 \\ \hline 43 \\ \hline \end{array}$$

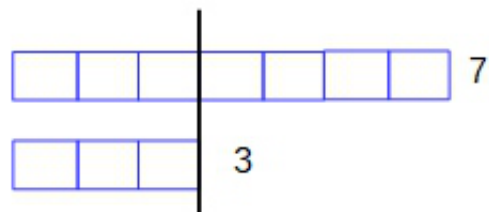
ОДУЗИМАЊЕ БРОЈЕВА

Израчунати разлику 7-3

Бројеве смо представили квадратима. Поступак одузимање своди се на упоређивање броја квадрата, односно колико квадрата има више у првом броју.



Бројеве смо "поравнали" по левој страни. На десној страни се види број квадрата који представљају разлику. Овде можемо да пребројимо квадрате и утврдимо разлику.



Разлику ћемо обележити стрелицом.

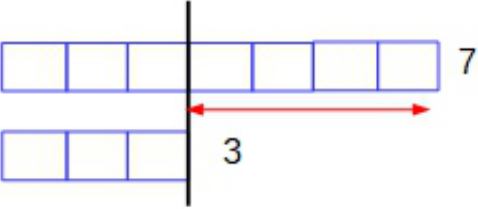
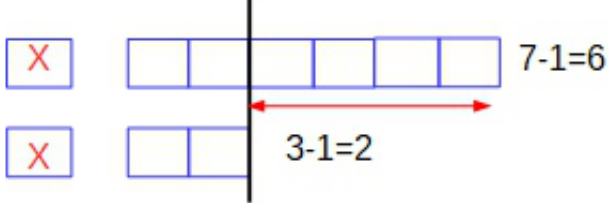
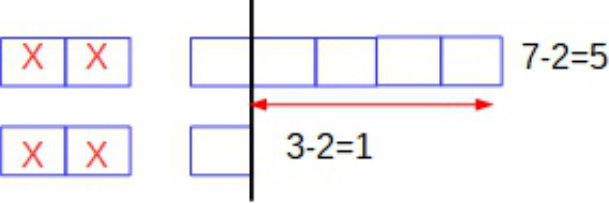
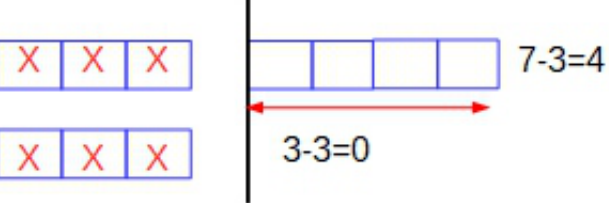
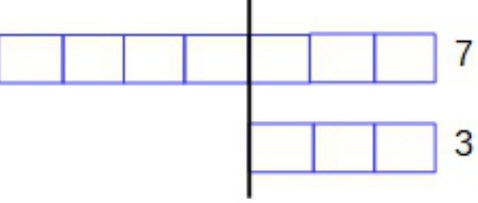
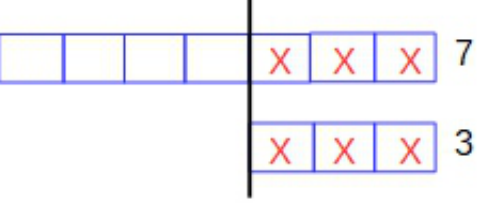
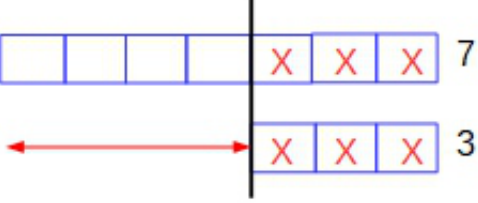


Овакав модел омогућава нам да прикажемо сталност разлике. Ако умањеник и умањилац смањимо (повећамо) за исту вредност разлика се неће променити.

$$a = b - c = (b - d) - (c - d)$$

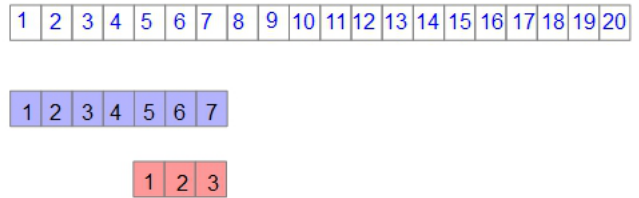
$$a = b - c = (b + d) - (c + d)$$

Овако исказани закони нису лако разумљиви ђацима. Зато прибегавамо визуелизацији.

<p>Рачунање почињемо од слике завршног модела.</p>	
<p>Ако прецртамо по један квадрат и "склонимо" га, добили смо да је разлика остала иста, а да су се умањеник и умањилац смањили за 1.</p>	
<p>Алгоритам настављамо даље. Прецртавамо по један квадрат и "склањамо" их у страну. Разлика је и даље иста, а умањеник и умањилац су се смањили за 2.</p>	
<p>Коначно прецртавамо и последњи пар квадрата. Добијамо да је умањилац "нестао", односно постао 0. Сада се види да је разлика у ствари добијена као $7-3=4$.</p>	
<p>Основни модел је могао и другачије да изгледа. Умањеник и умањилац поравнамо по десној страни.</p>	
<p>Систем прецртавања остаје исти тако да се ништа не мења у објашњавању.</p>	
<p>Додамо стрелицу и знак питања да обележимо део који треба израчунати.</p>	

За одузимање можемо користити бројевну траку на којој је лакше одређивати резултат. Овакви модели користе се у почетним фазама учења док ученици не стекну рутину.

Формирамо бројевну траку.
Додамо умањеник и умањилац.
Ради лакшег рада и распознавања
плавом бојом ћемо обојити умањеник,
а умањилац бојимо црвеном бојом.

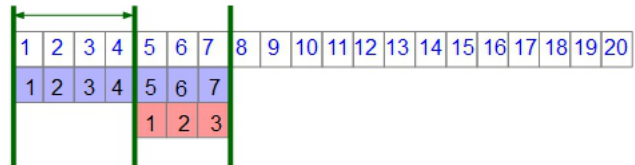


Умањеник поравнавамо по бројевној
траци са леве стране.
Умањеник и умањилац поравнавамо
по десном крају умањеника.



Поставимо граничнике и стрелицу која
показује резултат.

$$7-3=4$$



Особине разлике приликом промене умањеника и умањилоца

Ако се умањеник и умањилац смање за исту вредност разлика се не мења.

$$c = a - b = (a - d) - (b - d)$$

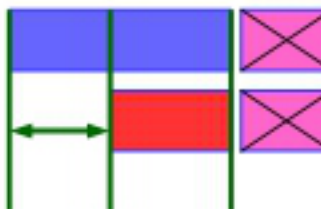
Представићемо разлику две вредности. Умањеник ћемо обојити плавом бојом. Умањилац ћемо обојити црвеном бојом. Зелена стрелица показује вредност разлике.



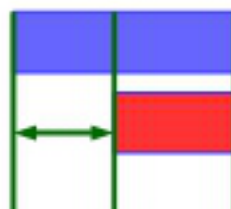
Умањеник и умањилац ћемо смањити за исту вредност. Ту вредност ћемо обојити розе бојом.



Розе вредност ћемо прецртати да бисмо нагласили да је то смањење, односно одузимање.



Са модела смо склонили розе вредност и сада су нам и умањеник и умањилац умањени за исту вредност, а вредност разлике остала иста (зелена стрелица).

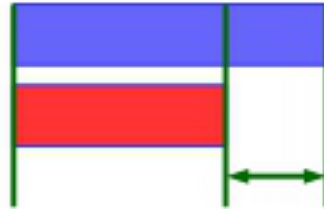


Особине разлике приликом промене умањеника и умањилоца

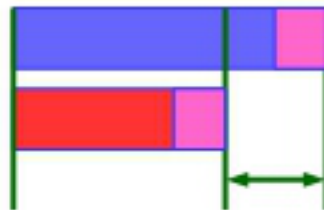
Ако се умањеник и умањилац смање за исту вредност, разлика се не мења.

$$c = a - b = (a - d) - (b - d)$$

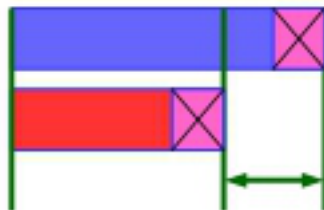
Представићемо разлику две вредности. Умањеник ћемо обојити плавом бојом. Умањилац ћемо обојити црвеном бојом. Зелена стрелица показује вредност разлике.



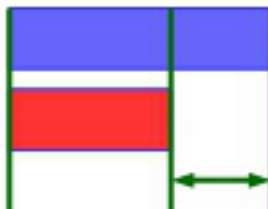
Умањеник и умањилац ћемо смањити за исту вредност. Ту вредност ћемо обојити розе бојом.



Розе вредност ћемо прецртати да бисмо нагласили да је то смањење, односно одузимање.



Са модела смо склонили розе вредност и сада су нам и умањеник и умањилац умањени за исту вредност, а вредност разлике остала је иста (зелена стрелица).

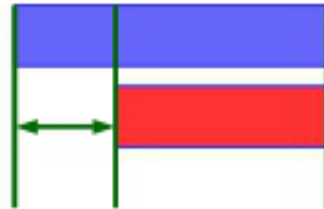


Особине разлике приликом промене умањеника и умањилоца

Ако се умањеник и умањилац увећа за исту вредност разлика се не мења.

$$c = a - b = (a + d) - (b + d)$$

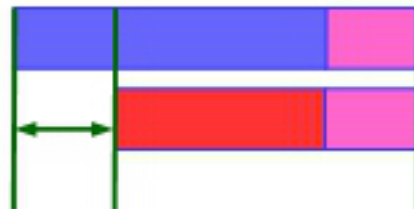
Представићемо разлику две вредности. Умањеник ћемо обојити плавом бојом. Умањилац ћемо обојити црвеном бојом. Зелена стрелица показује вредност разлике.



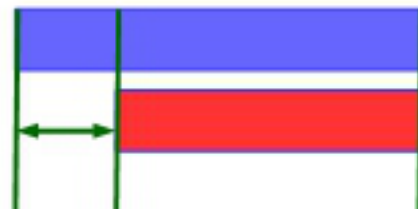
Умањеник и умањилац ћемо увећати за исту вредност. Ту вредност ћемо обојити розе бојом.



Граничник ћемо померити у десну страну да бисмо показали да се умањеник и умањилац увећавају за исту вредност.



Са модела смо склонили розе вредност и сада су нам и умањеник и умањилац увећани за исту вредност, а вредност разлике остала је иста (зелена стрелица).

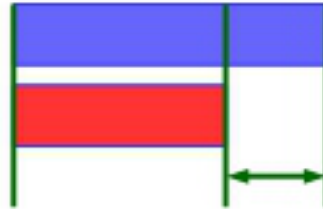


Особине разлике приликом промене умањеника и умањилоца

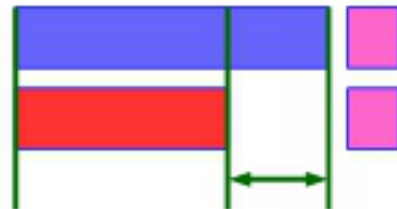
Ако се умањеник и умањилац увећа за исту вредност разлика се не мења.

$$c = a - b = (a + d) - (b + d)$$

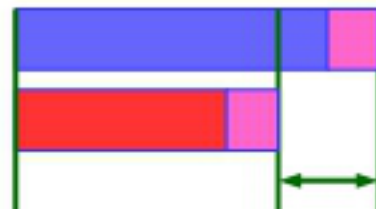
Представићемо разлику две вредности. Умањеник ћемо обојити плавом бојом. Умањилац ћемо обојити црвеном бојом. Зелена стрелица показује вредност разлике.



Умањеник и умањилац ћемо увећати за исту вредност. Ту вредност ћемо обојити розе бојом.



Граничник ћемо померити у десну страну да бисмо показали да се умањеник и умањилац увећавају за исту вредност.



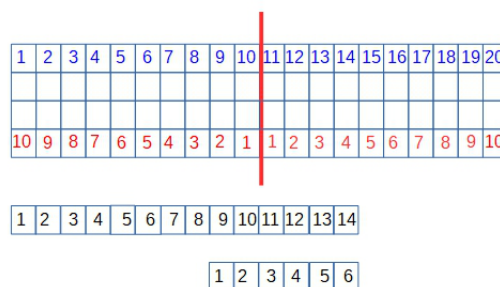
Са модела смо склонили розе вредност и сада су нам и умањеник и умањилац увећани за исту вредност, а вредност разлике остала иста је (зелена стрелица).



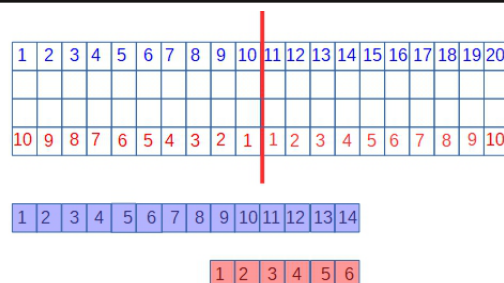
ОДУЗИМАЊЕ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ ПРЕКО 10

Пример: Израчунати разлику 14-6.

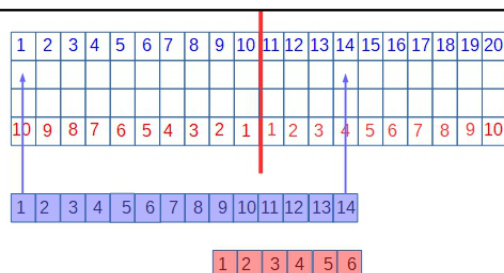
Користићемо модел за одузимање који има четири траке. Прва трака је бројевна трака од 1 до 20 уписана у квадратиће.
 Друга трака је трака за умањеник.
 Трећа трака је трака за умањилац.
 Четврта трака је за одређивање "разбијања" умањеника на два сабирка од којих је један допуна до 10.
 Четврта трака се састоји од две бројевне траке. Обе су од 1 до 10. Прва иде са десна у лево и служи за одређивање допуне до 10, а друга трака иде са лева у десно и служи да одреди другог сабирка.



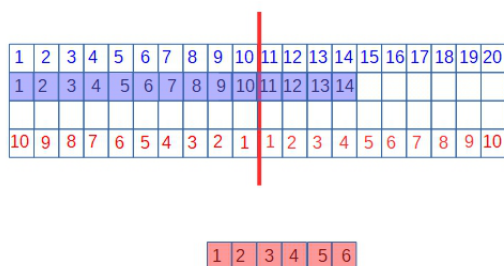
У 1. кораку смо обојили умањеник у плаво, а умањилац у црвено да бисмо их лакше разликовали.



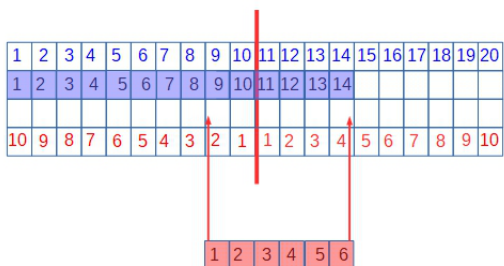
У 2. кораку смо означили стрелицом да желимо умањеник (плаво) да додамо на траку за умањеник (друга трака). Поравнавамо са првом бројевном осом.

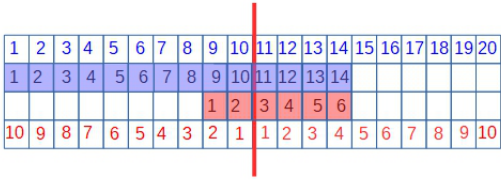
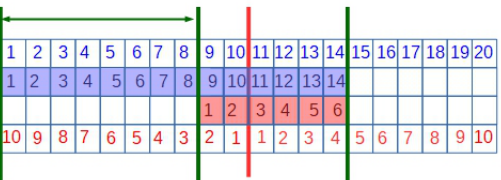
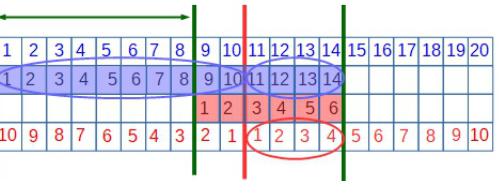
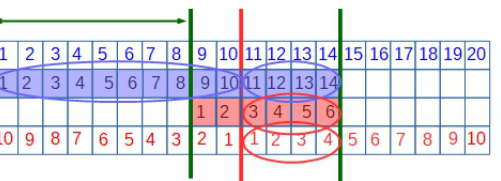
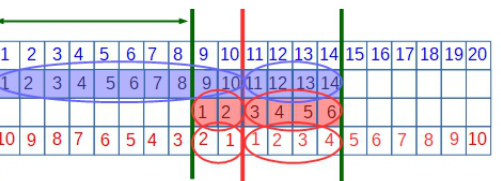


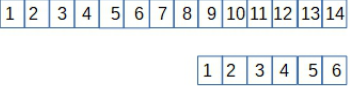
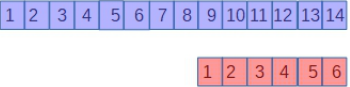
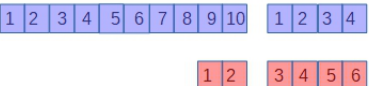
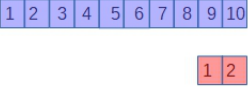
У 3. кораку смо то урадили. Умањеник је прешао на траку.



У 4. кораку смо означили стрелицом да желимо умањилац (црвено) да додамо на траку за умањилац (трећа трака).



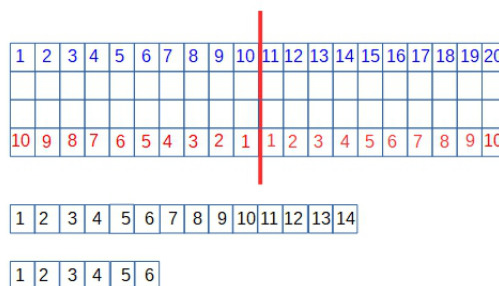
<p>У 5. кораку уписали смо умањилац у трећу траку. Поравнање је са десним крајем умањеника.</p>	
<p>У 6. кораку додајемо граничне линије и стрелицу која показује резултат: $14-6=8$</p>	
<p>Овај модел ћемо искористити да одредимо алгоритам. Умањеник (плава боја) је већи од 10 и десно од црвене линије која одваја прву десетицу се налази вредност 4 (црвена бројевна трака). Умањеник смо поделили на два сабирка: $14=10+4$.</p>	
<p>Корак 2. Потребно је умањилац поделити на два сабирка. Како је прелаз преко 10 у умањенику 4, тако мора и у умањеоцу да се појави сабирак 4. То је код нас вредност коју приказује десна црвена бројевна трака.</p>	
<p>Корак 3. Други сабирак показује лева црвена бројевна трака, То је у овом случају 2.</p>	
<p>У кораку 1. умањеник пишемо као збир два сабирка од којих је један десетица, а други сабирак је прелаз преко 10.</p>	$14-6= (10+4)-6$
<p>У кораку 2. умањилац треба написати као збир два сабирка од којих је један прелаз преко 10 умањеника. Један сабирак је 4, а други је $6-4=2$.</p>	$(10+4)-6=(10+4)-(2+4)$
<p>Сада примењујемо особину разлике да се разлика не мења ако се умањеник и умањилац повећају за исту вредност (у овом случају 4).</p>	$(10+4)-(2+4)=10-2=8$

Сада понављамо алгоритам, али без помоћних трака.	
Умањеник обојимо у плаво. Умањилац обојимо у црвено.	
Умањеник приказујемо као два сабирка од којих је један десетица, а други јединице. $14=10 + 4$.	
Умањилац приказујемо као два сабирка од којих је један једнак броју јединица умањеника. То је у овом случају 4. Други сабирак се добија када 4 одузмемо од умањеника.	
Сада користимо особину разлике да се разлика не мења ако се од умањеника и умањилоца одузму односно додају исте вредности.	
У кораку 1. умањеник пишемо као збир два сабирка од којих је један десетица, а други сабирак су јединице.	$14-6= (10+4)-6$
У кораку 2. умањилац треба написати као збир два сабирка од којих је један прелаз преко 10 умањеника. Један сабирак је 4, а други је $6-4=2$.	$(10+4)-6=(10+4)-(2+4)$
Сада примењујемо особину разлике да се разлика не мења ако се умањеник и умањилац повећају за исту вредност (у овом случају 4).	$(10+4)-(2+4)=10-2=8$

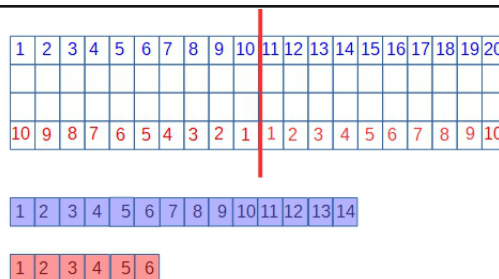
ОДУЗИМАЊЕ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ ПРЕКО 10

Пример: Израчунати разлику 14-6.

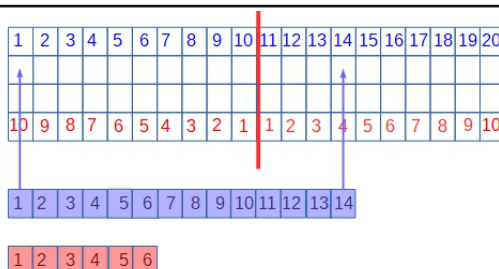
Користићемо модел за одузимање који има четири траке. Прва трака је бројевна оса од 1 до 20 уписана у квадратиће.
 Друга трака је трака за умањеник.
 Трећа трака је трака за умањилац.
 Четврта трака је за одређивање "разбијања" умањеника на два сабирка од којих је један допуна до 10.
 Четврта трака има две бројевне осе. Обе су од 1 до 10. Прва иде са десна у лево и служи за одређивање допуне до 10, а друга трака иде са лева у десно и служи да одреди другог сабирка.



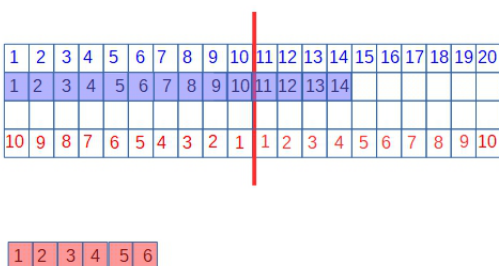
У 1. кораку смо обојили умањеник у плаво, а умањилац у црвено да бисмо их лакше разликовали.



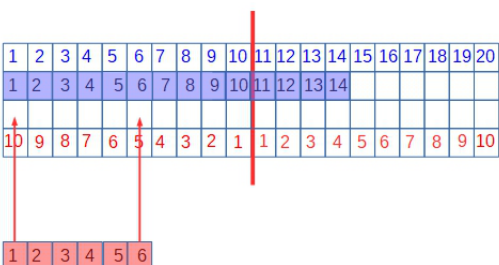
У 2. кораку означили смо стрелицом да желимо да умањеник (плаво) додамо на траку за умањеник (друга трака). Поравнавамо са првом бројевном траком.



У 3. кораку смо то урадили. Умањеник је прешао на траку.



У 4. кораку смо означили стрелицом да желимо умањилац (црвено) да додамо на траку за умањилац (трећа трака).



У 5. кораку уписали смо умањилац у трећу траку.
Поравнање је било са левим крајем умањеника.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14							
1	2	3	4	5	6															
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

У 6. кораку уочавамо колика је допуна умањеноца до 10. Ту ће нам помоћи лева бројевна трака која нам показује који је број допуна до 10.
То је у овом случају број 4.
Допуна броја 6 до 10 је број 4.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14							
1	2	3	4	5	6															
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

У 7. кораку ћемо искористити особину одузимања да ако умањеник и умањилац увећамо за исту вредност разлика се неће променити. Та вредност ће бити 4, јер желимо да умањилац увећамо до броја 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14							
1	2	3	4	5	6															
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

У 8. кораку ћемо после увећања израчунати умањеник и умањилац.
У овом случају добијамо да је умањеник $14+4=18$, а умањилац $6+4=10$ (допуна до 10).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10											
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Променимо боју да бисмо нагласили да су то нови умањеник и умањилац.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10											
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

Сада остаје да обележимо разлику. Поставимо зелену стрелицу којом визуелно показујемо колика је разлика. Допуна до 10 омогућава нам да ту разлику лакше израчунамо.
 $18-10=8$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10											
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

ОДУЗИМАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА БЕЗ ПРЕНОСА

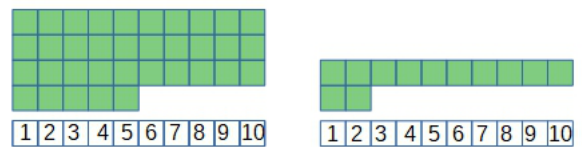
Пример одузимања двоцифрених бројева

Треба израчунати $35-12$.

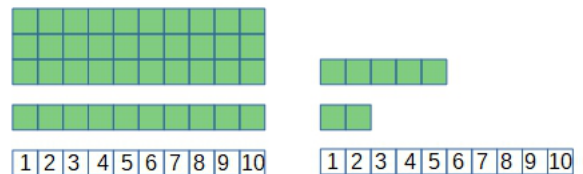
На моделу представимо бројеве:

$35 = 30 + 5$ односно 3 десетице и 5 јединица

$12 = 10 + 2$ односно 1 десетица и 2 јединице

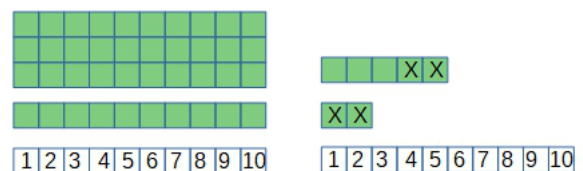


У 2. кораку групишемо десетице и групишемо јединице. Премештамо вредности у умањенику и премештамо вредности у умањиоцу.



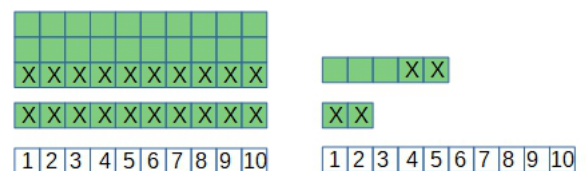
У 3. кораку јединице смо "исправили" и ставили у један ред. Одузимамо јединице тако што прецртавамо квадрате. Прецртавамо прво јединице. Прецртали смо две јединице.

Две јединице прецртамо у умањенику и две јединице прецртамо у умањиоцу.



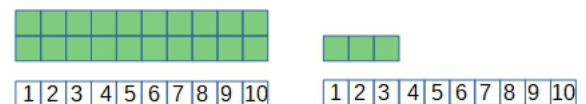
У 4. кораку прецртавамо десетице (10 квадрата). Прецртавамо једну десетицу .

Једну десетицу прецртамо у умањенику и једну десетицу прецртамо у умањиоцу.



У 5. кораку оставимо непрецртане квадрате и прочитамо резултат. 23.

$35-12=23$



ОДУЗИМАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ

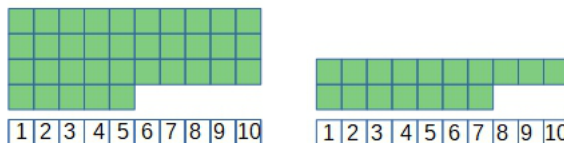
Пример одузимања двоцифрених бројева са преносом.

Треба израчунати $35-17$.

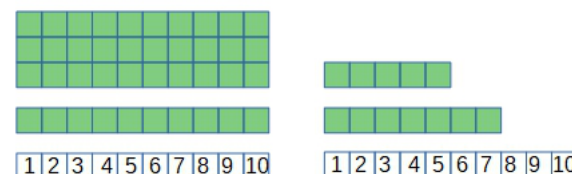
Представимо бројеве:

$35 = 30 + 5$ односно 3 десетице и 6 јединица

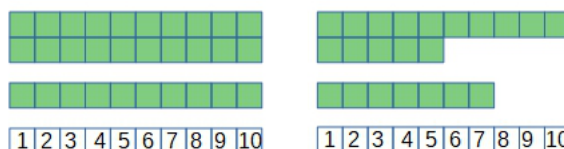
$17 = 10 + 7$ односно 1 десетица и 7 јединица



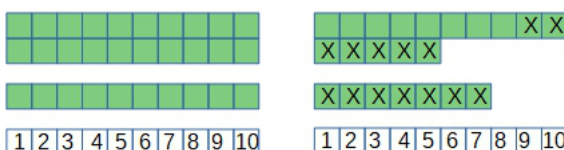
У 2. кораку групишемо десетице и групишемо јединице. Премештамо вредности у умањенику и премештамо вредности у умањиоцу.



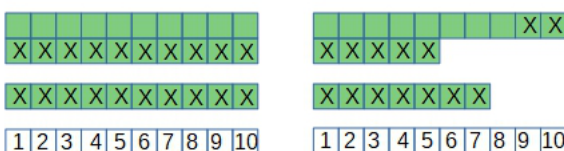
У 3. кораку видимо да је број јединица у умањенику мањи него у умањиоцу. Због тога морамо да једну десетицу пребацимо у колону где су јединице.



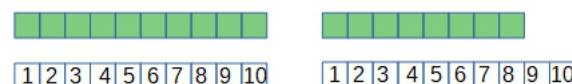
У 4. кораку одузимамо јединице тако што прецртавамо квадрате. Прецртавамо прво јединице. Прецртали смо седам јединица. Седам јединица прецртамо у умањенику и седам јединица прецртамо у умањиоцу.



У 5. кораку одузимамо десетице тако што прецртавамо квадрате. Прецртамо једну десетицу. Једну десетицу прецртамо у умањенику и једну десетицу прецртамо у умањиоцу.



У 6. кораку оставимо непрецртане квадрате да бисмо одредили резултат. 18
 $35-17=18$.



ОДУЗИМАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА БЕЗ ПРЕНОСА

Алгоритам одузимања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што посебно приказујемо десетице као десет квадрата, а посебно јединице и сваки део има бројевне траке.

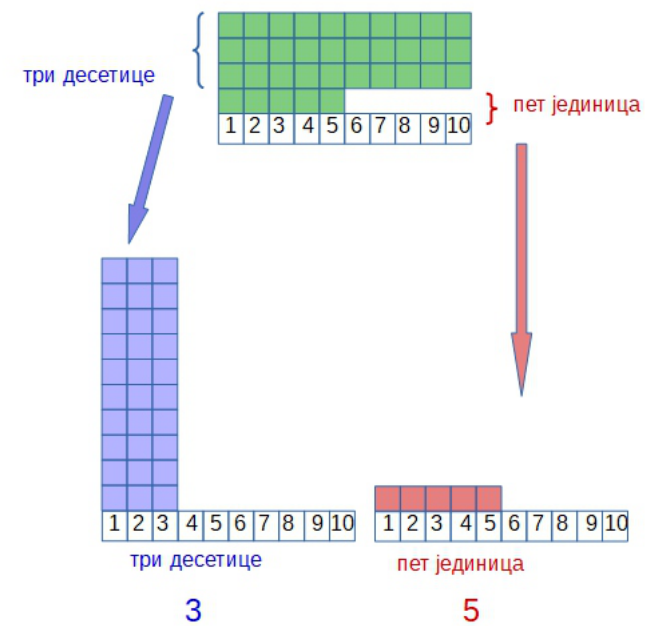
Израчунајмо колика је разлика бројева 35 и 12.

Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица. Сада смо направили две бројевне траке.

Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

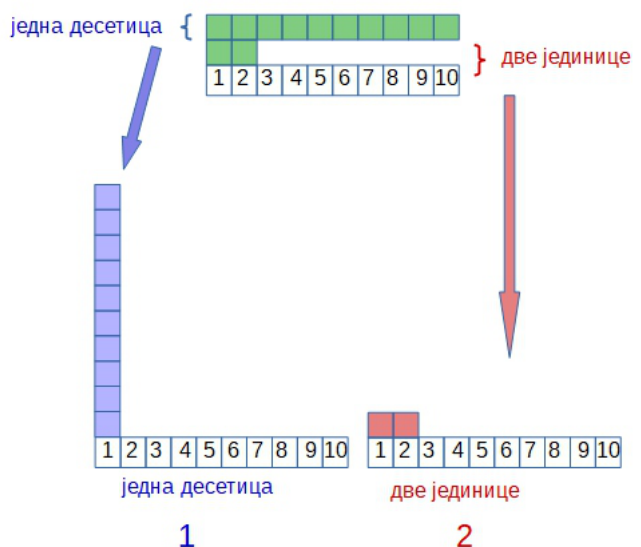
Десетицу представља десет квадрата. Десетице смо "усправили" да можемо да их бројимо на траци.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја)



35

Број 12 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 35 користимо исто две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.

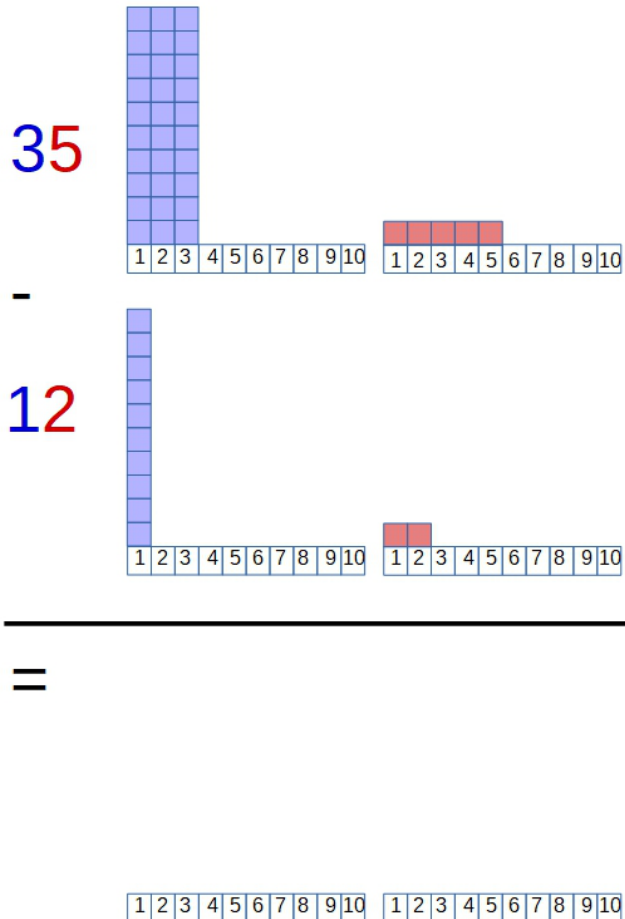


12

Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

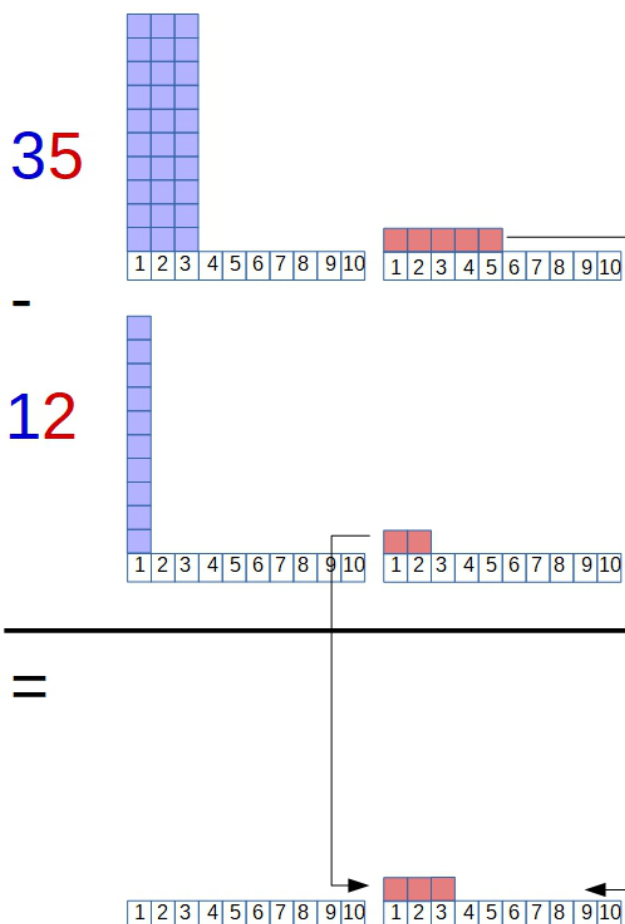
Број 12 на исти је начин приказан као и број 35.

Приказана је бројевна трака за резултат: једна трака за јединице и друга бројевна трака за десетице.



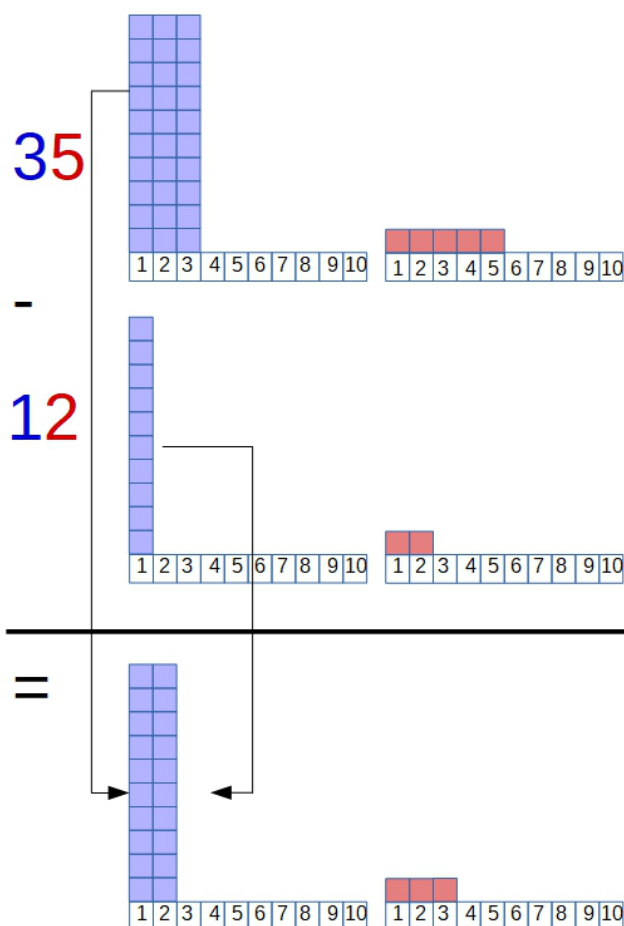
Сада одузимамо јединице. Резултат приказујемо на бројевној траци резултата:

$$5-2=3$$



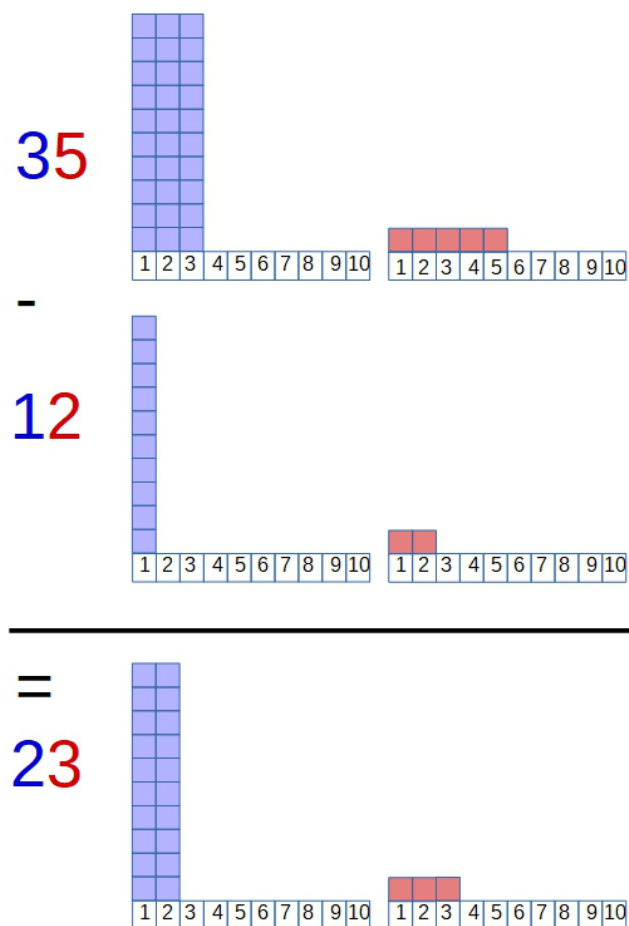
Одузимамо десетице. Десетице из резултата приказујемо на бројевној траци десетица резултата:

$$3-1=2$$



Са бројевне траке читамо колико је у збиру јединица (3) и колико је десетица у збиру десетица (2):

$$35-12=23.$$



ОДУЗИМАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ

Алгоритам одузимања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што посебно приказујемо десетице, а посебно јединице и сваки део има бројевне траке.

Израчунајмо колики је разлика бројева 35 и 17.

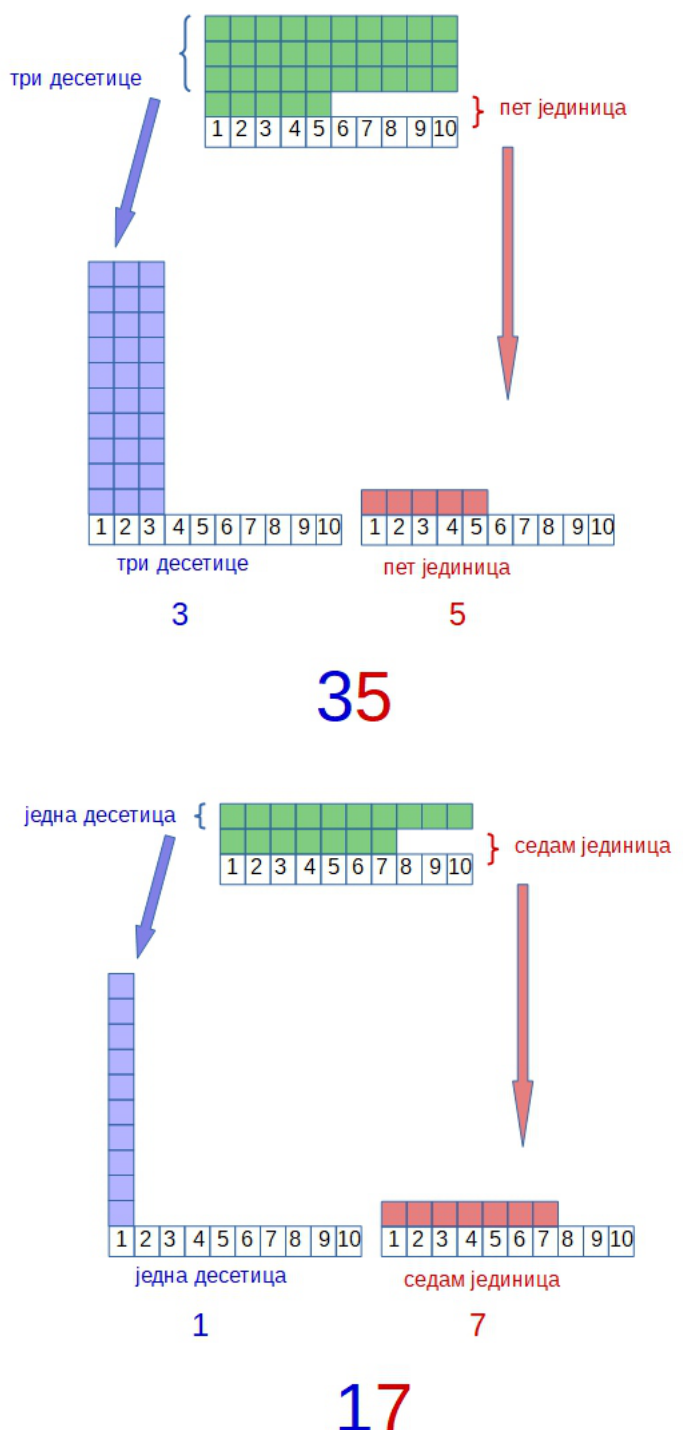
Број 35 приказан је као две десетице и шест јединица. Сада смо направили две бројевне траке.

Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

Десетицу представља десет квадрата. Десетице смо "усправили" да можемо да их бројимо на траци.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја)

Број 17 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 35 користимо две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.

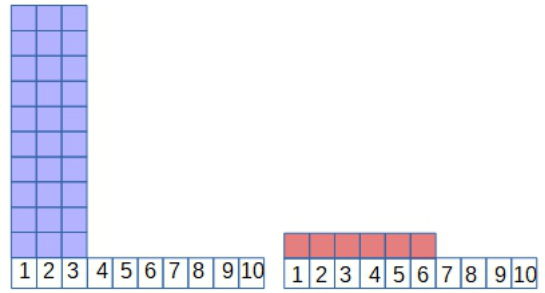


Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

Број 17 на исти је начин приказан као и број 35.

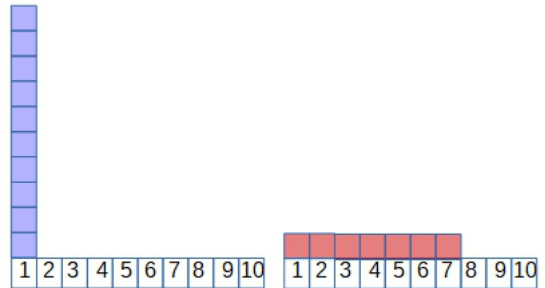
Приказана је бројевна трака за резултат, једна бројевна трака за јединице и друга бројевна трака за десетице.

35

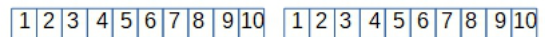


-

17



=



Прво треба одузети јединице. На бројевној траци јединица умањеника налази се мање јединица него на бројевној траци јединица умањеника.

$$5 < 7$$

Због тога морамо једну десетицу умањеника пребацити на бројевну траку јединица умањеника.

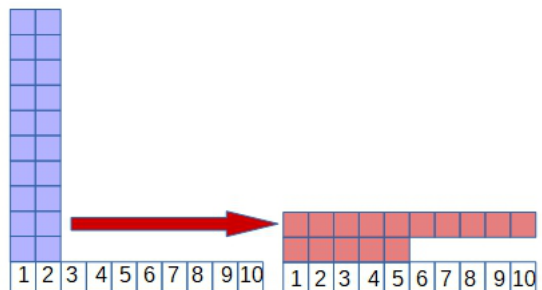
$$5 + 10 = 15$$

Сада је број јединица умањеника већи од броја јединица умањеника.

$$15 > 7$$

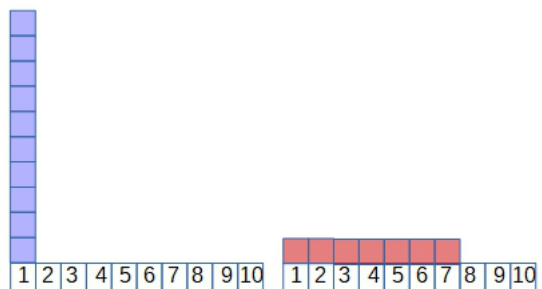
Сада је могуће одузимање.

35

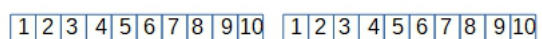


-

17



=

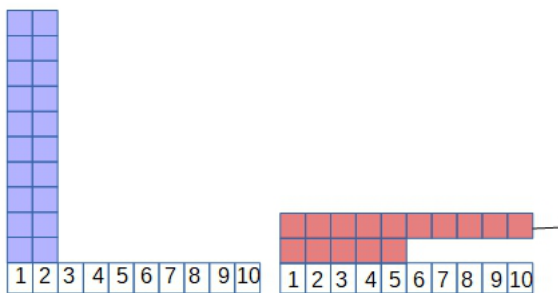


Одузимамо јединице:

$$15 - 8 = 7$$

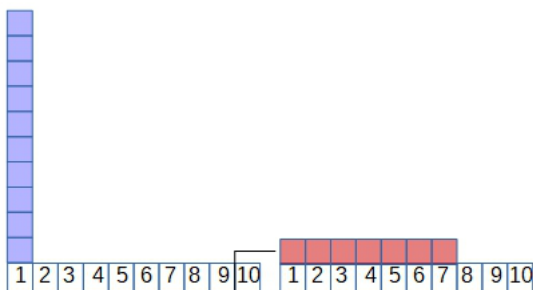
Јединице приказујемо на бројевној траци јединица резултата.

35

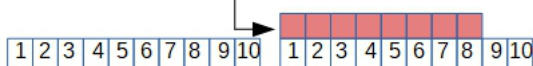


-

17



=

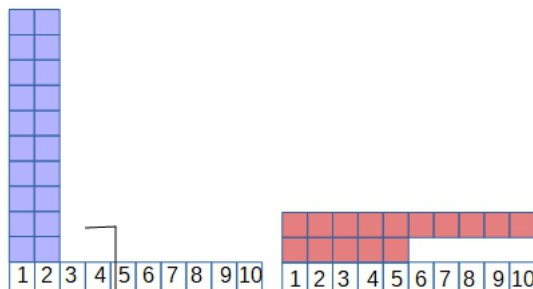


Одузимамо десетице:

$$2 - 1 = 1$$

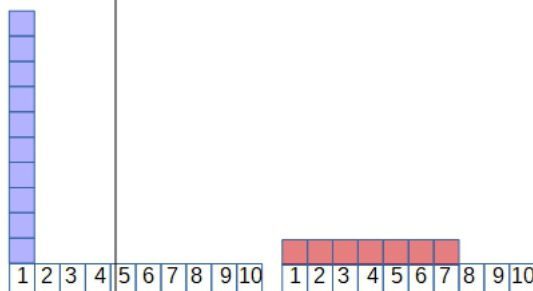
Десетице представљамо на бројевној траци резултата.

35

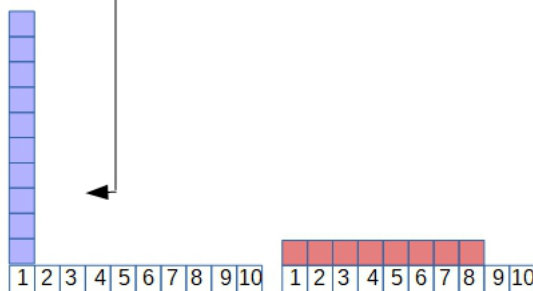


-

17

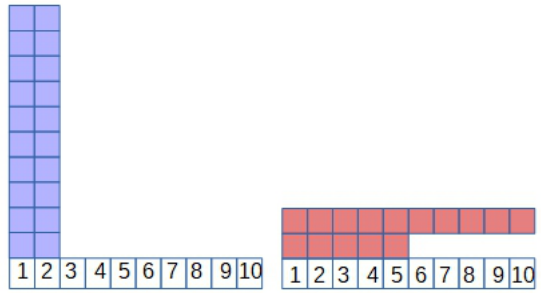


=



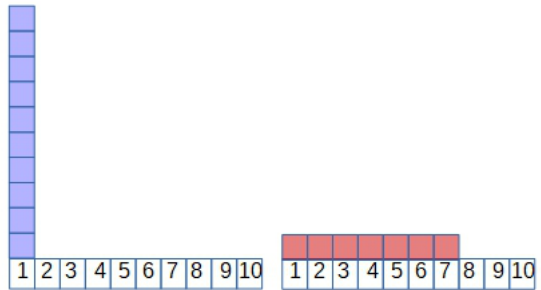
Остало је да прочитамо резултат:
једна десетица и осам јединица.
 $35-17=18$

35



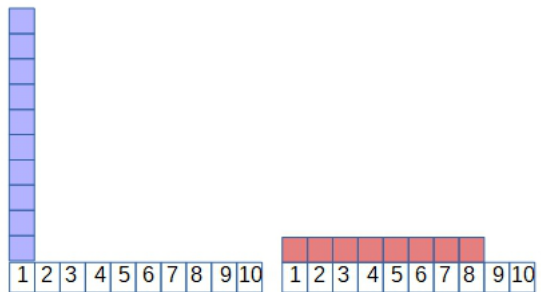
-

17



=

18



ОДУЗИМАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА БЕЗ ПРЕНОСА

Алгоритам одузимања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што десетице представљамо једним квадратом у коме пише 10, а јединице квадратима на којима пише 1. Сваки део има бројевне траке.

Израчунајмо колика је разлика бројева 35 и 12.

Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица. Сада смо направили две бројевне траке.

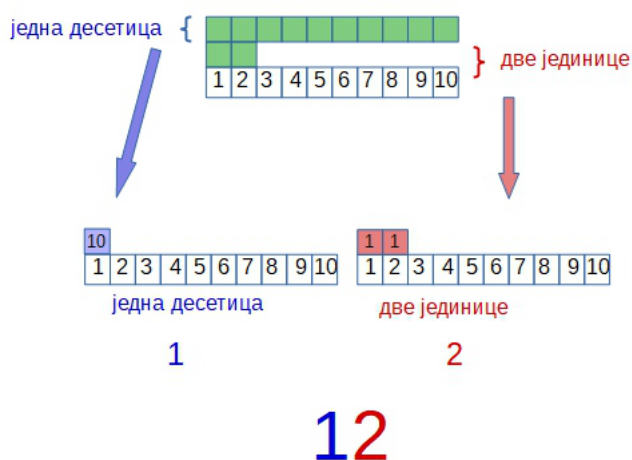
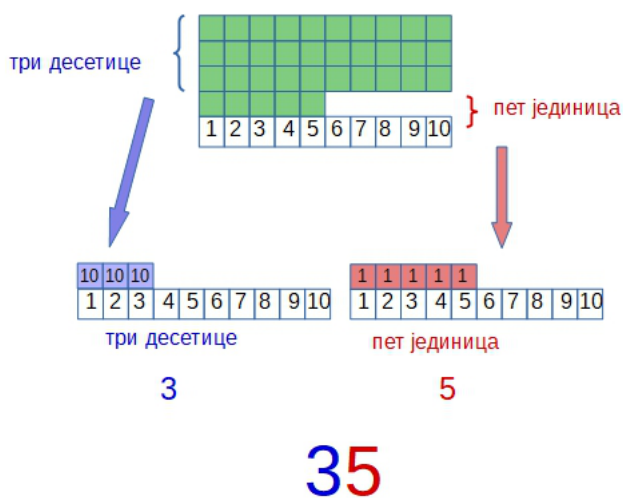
Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

Десетицу представља један квадрата са ознаком 10. Укупно три таква квадрата представљају три десетице.

Јединице представљају квадрати са ознаком 1. Пет таквих квадрата представљају јединице.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја).

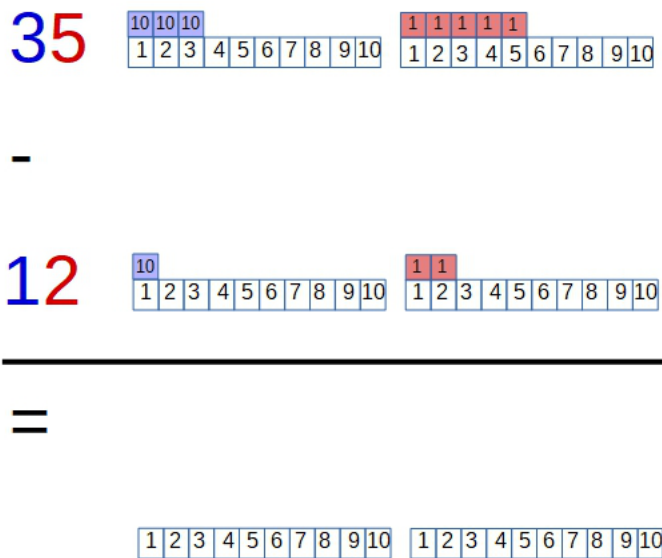
Број 12 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 35 користимо две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.



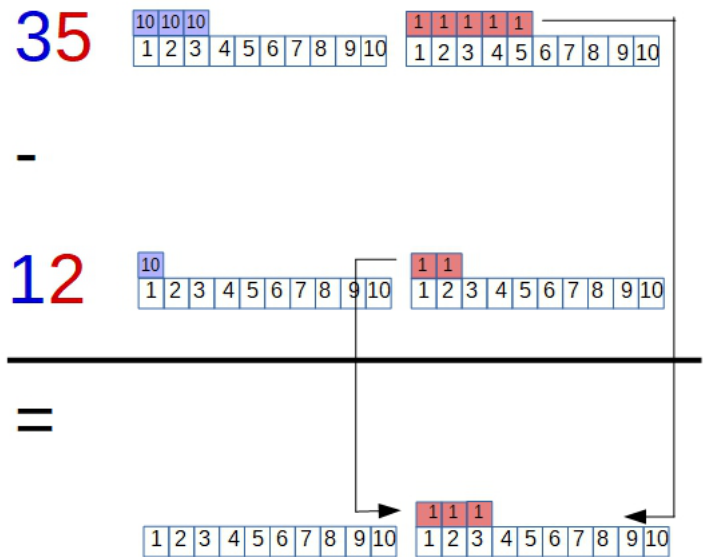
Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

Број 12 на исти је начин приказан као и број 35.

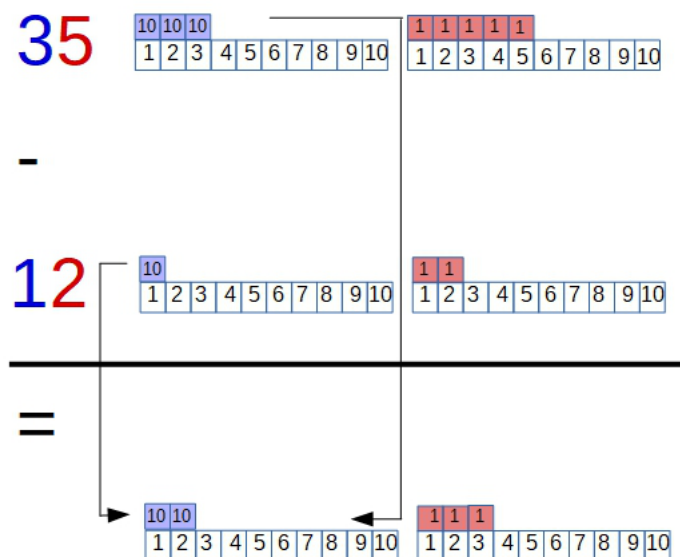
Приказана је бројевна трака за резултат, једна бројевна трака за јединице и друга бројевна трака за десетице.



Сада одузимамо јединице. Резултат приказујемо на бројевној траци резултата за јединице.

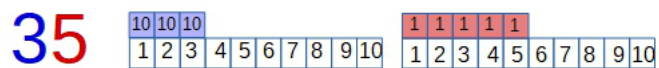


Сада одузимамо десетице. Резултат приказујемо на бројевној траци резултата за десетице.

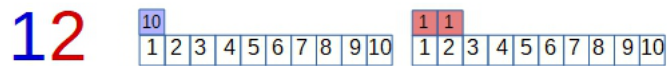


Остало је да прочитамо резултат:
две десетице и три јединица.

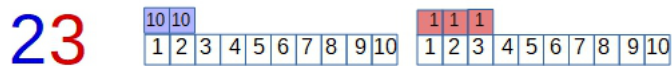
$$35 - 12 = 23$$



-



=



ОДУЗИМАЊЕ ДВОЦИФРЕНИХ БРОЈЕВА СА ПРЕНОСОМ

Алгоритам одузимања сада пребацујемо на другачији визуелни облик. Бројеве представљамо тако што десетице представљамо једним квадратом у коме пише 10, а јединице квадратима на којима пише 1. Сваки део има бројевне траке.

Израчунајмо разлику бројева 35 и 17.

Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица. Сада смо направили две бројевне траке.

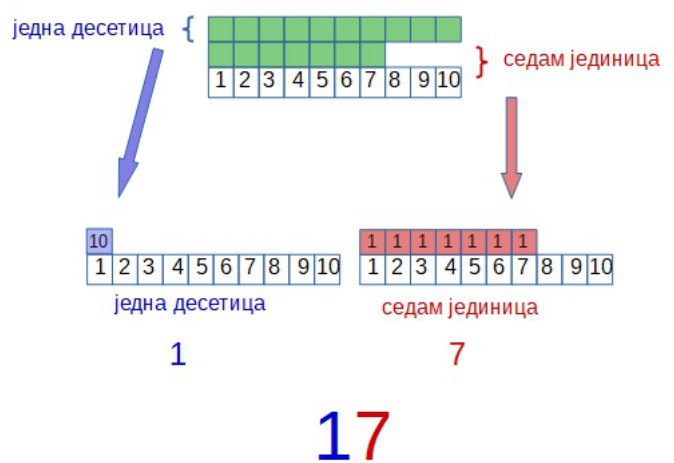
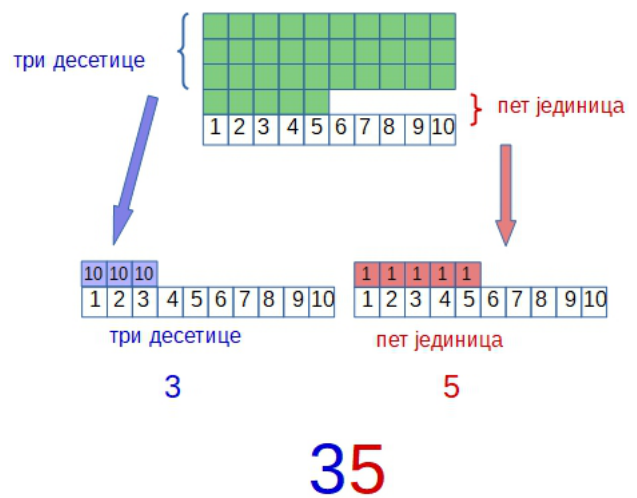
Једна трака броји јединице, а друга трака броји десетице.

Десетицу представља један квадрата са ознаком 10. Укупно три таква квадрата представљају три десетице.

Јединице представљају квадрати са ознаком 1. Пет таквих квадрата престављају јединице.

Боје које користимо само нам служе да означимо десетице (плава боја) и означимо јединице (црвена боја).

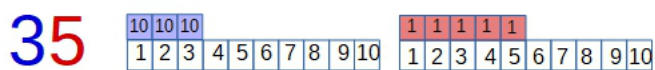
Број 17 приказан је као једна десетица и две јединице. Као и за број 35 користимо две бројевне траке и плаву и црвену боју да означимо десетице и јединице.



Број 35 приказан је као три десетице и пет јединица где су десетице и јединице одвојене на две бројевне траке.

Број 12 на исти је начин приказан као и број 35.

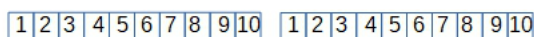
Приказана је бројевна трака за резултат, једна бројевна трака за јединице и друга бројевна трака за десетице.



-



=

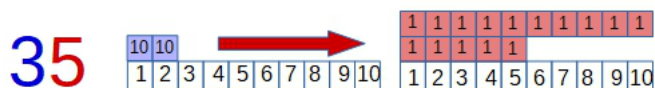


Прво треба одузети јединице.
На бројевној траци јединица умањеника налази се мање јединица него на бројевној траци јединица умањеника.
 $5 < 7$

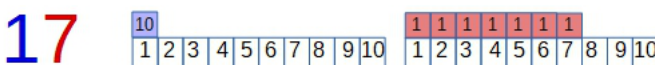
Због тога морамо једну десетицу умањеника пребацити на бројевну траку јединица умањеника.
 $5 + 10 = 15$

Сада је број јединица умањеника већи од броја јединица умањеноца.
 $15 > 7$

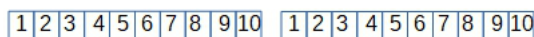
Сада је могуће одузимање.



-

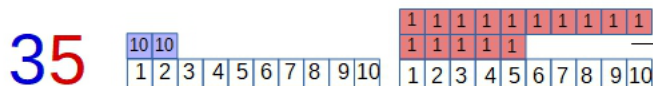


=

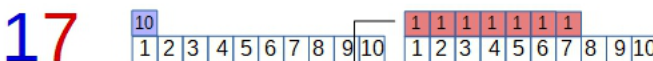


Одузимамо јединице.
 $15 - 8 = 7$

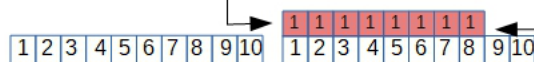
Јединице приказујемо на бројевној траци јединица резултата.



-



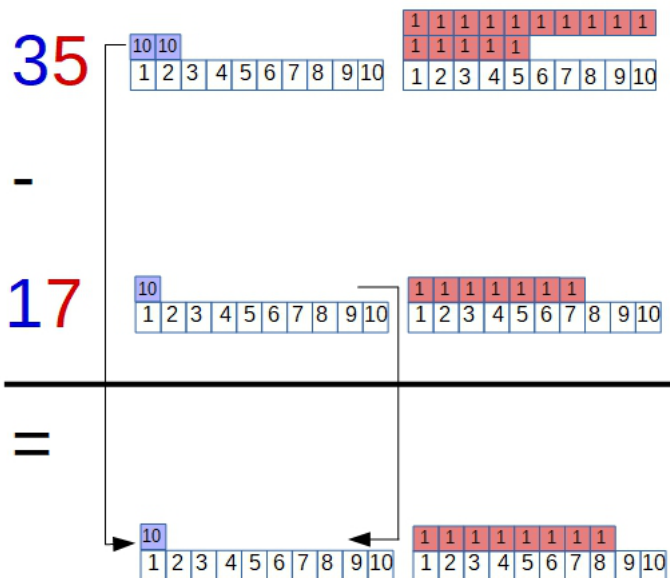
=



Одузимамо десетице.

$$2-1=1$$

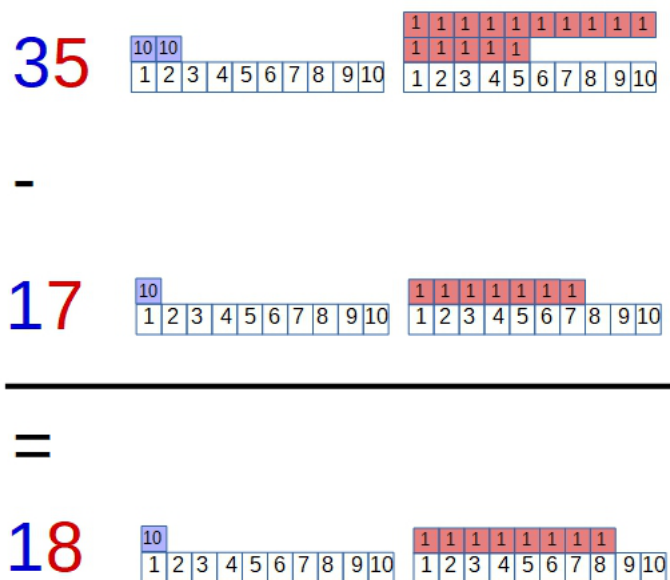
Десетице представљамо на бројевној траци резултата.



Остало је да прочитамо резултат.

Једна десетица и осам јединица.

$$35-17=18$$



Алгоритам одузимања сада пребацујемо са квадратића на десетице и јединице. Важно је да ђаци науче појам записа броја и значење позиција цифара у броју.

35 је запис који представља 3 десетице и 5 јединица.

12 је запис који представља 1 десетицу и 2 јединице.

Израчунајмо разлику бројева 35 и 12.

На моделу у 1. кораку уписујемо умањеник и умањилац записујемо једне испод других у табели. У једној колони су јединице, а у другој колони су десетице.

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-		
12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ

У 2. кораку одузимамо јединице и резултат уписујемо у табелу. 5 јединица - 2 јединице
Резултат је 3 јединице.
 $5-2=3$

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-		
12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ
		3 ЈЕДИНИЦЕ

У 3. кораку одузимамо десетице и резултат уписујемо у табелу. 3 десетице - 1 десетица
Резултат је 2 десетице.
 $3-1=2$

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-		
12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ
	2 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ

У 4. кораку формирамо резултат. 2 десетице + 3 јединица
23
 $35-12=23$

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-		
12	1 ДЕСЕТИЦА	2 ЈЕДИНИЦЕ
23	2 ДЕСЕТИЦЕ	3 ЈЕДИНИЦЕ

Изрчунајмо разлику бројева 35 и 17.

На моделу у 1. кораку сабирке записујемо једне испод других у табели. У једној колони су јединице, а у другој колони су десетице.

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-		
17	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА

У 2. кораку сабирамо јединице и резултат уписујемо у табелу. 6 јединица + 7 јединица
Резултат је 13 јединица.
 $6+7=13$

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-	2 ДЕСЕТИЦЕ	15 ЈЕДИНИЦА
17	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА

У 3. кораку резултат 13 јединица претварамо у:
1 десетица и 3 јединице.
 $13=10+3$

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-	2 ДЕСЕТИЦЕ	15 ЈЕДИНИЦА
17	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
		8 ЈЕДИНИЦА

У 4. кораку из колоне где су јединице морамо пребацити 1 десетицу у колону где су десетице.

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-	2 ДЕСЕТИЦЕ	15 ЈЕДИНИЦА
17	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
	1 ДЕСЕТИЦА	8 ЈЕДИНИЦА

У 5. кораку можемо прочитати резултат:
1 десетица и 8 јединица.

$$35-17=18$$

35	3 ДЕСЕТИЦЕ	5 ЈЕДИНИЦА
-	2 ДЕСЕТИЦЕ	15 ЈЕДИНИЦА
17	1 ДЕСЕТИЦА	7 ЈЕДИНИЦА
18	1 ДЕСЕТИЦА	8 ЈЕДИНИЦА

Коначни алгоритам одузимања. Одузимање без преноса.

Израчунати разлику 35-12.
Умањеник и умањилац записујемо један испод другог.

$$\begin{array}{r} 35 \\ - \\ 12 \end{array}$$

Умањеник и умањилац уписујемо у посебне ћелије тако да јединице буду испод јединица, а десетице испод десетица. Плавом бојом бојимо "кућице" резултата. Између бројева убацујемо "кућице" за евентуални пренос.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Прво одузимамо јединице.
 $5-2=3$
Резултат уписујемо у "кућицу" за јединице резултата.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline & 3 \\ \hline \end{array}$$

Сада одузимамо десетице.
 $3-1=2$
Резултат уписујемо у "кућицу" за десетице резултата.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Остаје да прочитамо резултат.
 $35-12=23$
Резултат је број 23.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Коначни алгоритам одузимања. Одузимање са преносом.

Израчунати разлику 35-17.
Умањеник и умањилац записујемо један испод другог.

$$\begin{array}{r} 35 \\ - \\ 17 \end{array}$$

Умањеник и умањилац уписујемо у посебне ћелије тако да јединице буду испод јединица, а десетице испод десетица. Плавом бојом бојимо "кућице" резултата. Између бројева убацујемо "кућице" за евентуални пренос.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline \hline - & \\ \hline 1 & 7 \\ \hline \hline \hline \hline \end{array}$$

Потребно је да одуземо јединице. Како је број јединица умањеника мањи од број јединица умањилоца, позајмљујемо једну десетицу и претварамо у јединице. У црвену кућицу уписујемо 2 (једна десетица мање) и 15 (10 јединица више).

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 15 \\ \hline - & \\ \hline 1 & 7 \\ \hline \hline \hline \hline \end{array}$$

Сада можемо одузети јединице:
 $15-7=8$
Резултат уписујемо у "кућицу" за јединице резултата.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 15 \\ \hline - & \\ \hline 1 & 7 \\ \hline \hline \hline 8 & \end{array}$$

Одузимамо десетице.
 $3-2=1$
Резултат уписујемо у "кућицу" за десетице резултата.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 15 \\ \hline - & \\ \hline 1 & 7 \\ \hline \hline 1 & 8 \end{array}$$

Остаје да прочитамо резултат.
 $35-17=18$
Резултат је број 18.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 5 \\ \hline 2 & 15 \\ \hline - & \\ \hline 1 & 7 \\ \hline \hline 1 & 8 \end{array}$$