Кенгур без граница 2012. - Анализа проблема са решењима

СЕМИНАР МАТЕМАТИКЕ
Истраживачка станица Петница

Такмичење **"Кенгур без граница"** у школској 2011 / 2012 години одржано је 22. марта. Такмичење је једнокружно тест такмичење без селекције, елиминација и финала. На такмичењу могу учествовати ученици од 2. разреда основне до завршне године средње школе.

Само такмичење је јако популарно у Србији - сваке године око 20 хиљада основаца и средњошколаца учествује на истом. Нажалост, билтен са решењима задатака се не штампа последњих година. Зато су се полазници **семинара МАТЕМАТИКЕ у Истраживачкој станици Петница** одлучули да изађу у сусрет својим вршњацима и да направе билтен са анализом проблема.

Полазници семинара који су учествовали у изради овог билтена су (поредак је случајан):

- Тамара Станковић, Ниш
- Кристина Силађи, Нови Сад
- Јелена Мрдак, Београд
- Ђорђе Ивановић, Чачак
- Вељко Вранић, Крагујевац
- Стефан Станковић, Краљево
- Едис Ујкановић, Нови Пазар
- Анђела Шарковић, Ниш
- Лука Булатовић, Панчево
- Анђела Младеновић, Београд
- Тања Асановић, Рума
- Данијел Силађи, Нови Сад
- Кристина Јовицић, Смедеревска Паланка

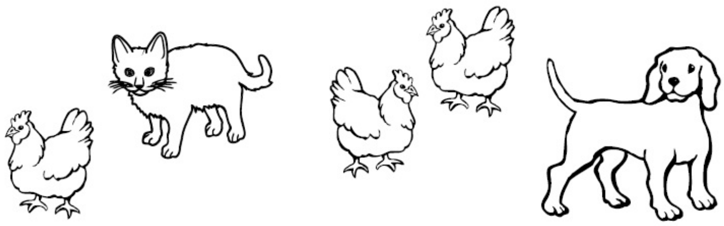
У изради билтена учестовали су и Андреја Илић, вођа семинара математике иначе софтверски инжењер у Мајкрософт развојном центру Србија, и Никола Милосављевић, сарадник семинара математике иначе студент Природно математичког факултета у Нишу.

Аутори ову верзију билтена сматрају рандом верзијом. Решења проблема су куцана током зимског семинара математике који траје свега пар дана, а како је у питању велики број задатака, билтен сигурно има грешака и најасних решења. Такмичаре, и све који се тако осећају, би овом приликом замолили да уколико уоче неке грешке (којих сигурно има) или имају додатне идеје / коментаре на решења и проблеме, да нам се обрате путем маила.

Није знање знање знати, већ је знање знање другом дати.

1 Категорија - 2. разред

Задатак 1. Колико укупно ногу имају животиње на слици?

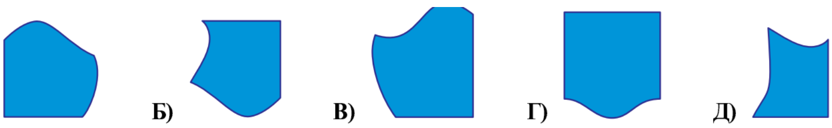


А) 5 **Б)** 10 **В)** 12 **Г)** 14 **Д)** 20

Тачан одговор: Г

Решење. На слици су 3 кокошке (2 ноге), једна мачка (4 ноге) и један пас (4 ноге). Према томе, укупно има $3 \cdot 2 + 4 + 4 = 14$ ногу.

Задатак 2. Који део може да попуни празан простор на слици?



А) **Б)** **В)** **Г)** **Д)**

Тачан одговор: Б

Решење. Потребно је да се убаци део који има један прав угао и две праве странице. Остале две странице би требало да буду једна удубљена, а једна испупчена. Једини такав услов задовољава фигура под Б.

Задатак 3.Јелена је написала реч КЕНГУРКО два пута. Колико пута је написала слово К?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 6

Тачан одговор: Г

Решење. Реч КЕНГУРКО садржи два слова К у себи. Како је реч написана два пута крајњи број слова К јендак је $2 + 2 = 4$.

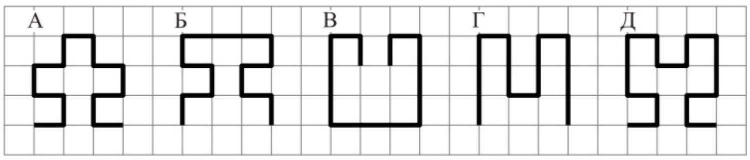
Задатак 4.Дејан је у петак почео да боји реч БАНАНА. Сваког дана је бојио по једно слово. Ког дана је обојио последње слово?

А) у понедељак **Б)** у уторак **В)** у среду **Г)** у четвртак **Д)** у петак

Тачан одговор: В

Решење. Дејан започиње бојење у петак и обоји слово Б. У суботу слово А, у недељу слово Н, понедељак слово А, у уторак слово Н и у среду слово А. Дакле, последње слово је обојену у среду.

Задатак 5. Која је најдужа линија на слици?

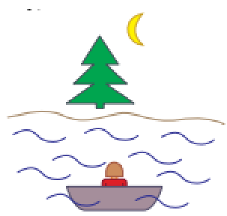


А) А **Б)** Б **В)** В **Г)** Г **Д)** Д

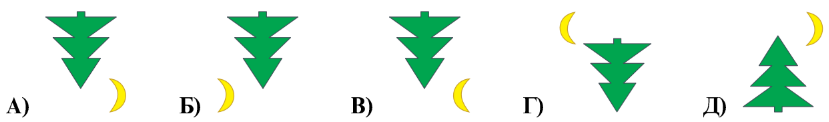
Тачан одговор: Д

Решење. Дужине линија можемо рачунати пребројавањем "цртацица". Линија обележена са А има дужину 13. Б је дугачка 13, В је 13, Г исто 13, док је Д дужине 15. Самим тим најдужа је линија Д.

Задатак 6. Ката је у чамцу на језеру (види слику).



Коју од следећих слика она види у језеру?



Тачан одговор: В

Решење. Површина језера је слична огледалу, тј ликови у води обрћу - што је горе у води је доле и обрнутно. Са друге стране, хоризонтални поред објеката се задржава. На основу ових чињеница добијамо да слика В приказује оно што види Ката.

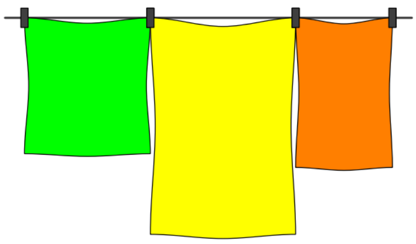
Задатак 7.Тринаесторо деце се играло жмурке. Једно од њих жмури, а остали се крију. После неког времена деветоро деце је пронађено. Колико их је још скривено?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 9 **Д)** 22

Тачан одговор: А

Решење. Укупно има триаенсторо деце, а како једно дете жмури имамо да се њих 12 скривају. Како је 9 пронађено, имамо да се још 12 - 9 ı 3 крију.

Задатак 8.Тата качи веш на конопац за сушење. Он жели да употреби што је могуће мање штипаљки. За 3 пешкира потребне су 4 штипаљке. Колико штипаљки је потребно за 9 пешкира?



А) 8 **Б)** 10 **В)** 12 **Г)** 16 **Д)** 18

Тачан одговор: Б

Решење. Са слике се види да ће за сваки наредни пешкир бити потребна по још једна додатна штипаљка. Пошто имамо закачена три пешкира помоћу четири штипаљке, преостаје нам да окачимо још шест пешкира. За сваки од њих нам треба по једна штипаљка, то јест за свих шест је потребно шест додатних штипаљки. Укупан број штипаљки је: $4 + 6 = 10$.

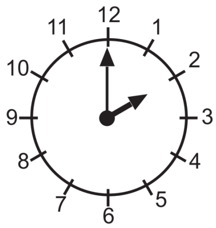
Задатак 9. Нина је сабрала број својих година и број година њене сестре и добила збир 10. Колики ће бити збир бројева њихових година после годину дана?

А) 5 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12 **Д)** 20

Тачан одговор: Г

Решење. Након годину дана, Нина је годину дана старија, па је њен број година већи за 1. Такође је број година њене сестре већи за 1. Онда је збир њених година и година њене сестре већи за 2. Самим тим, решење је $10 + 1 + 1 = 12$.

Задатак 10. Сат на слици показује време када Стефан одлази из школе. Ручак у школи почиње 3 сата пре краја школе.



У колико сати почиње ручак?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 5 **Г)** 11 **Д)** 12

Тачан одговор: Г

Решење. Стефан је ручао пре 3 сата, односно у 14 - 3 = 11 часова.

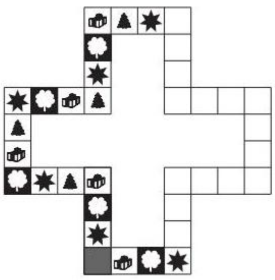
Задатак 11. Змај има 3 главе. Сваки пут када му јунак одсече једну главу њему израсту нове 3 главе. Јунак му је одсекао једну главу, а затим је одсекао још једну. Колико глава змај сада има?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7 **Д)** 8

Тачан одговор: Г

Решење. Пошто змају за сваку одсечену главу израсту још три, можемо посматрати да после сваког јунаковог ударца мачем змају израсту две главе. Зато, после првог одсецања змај има 5 глава, а након другог 7.

Задатак 12. Звезде, цветићи, поклони и јелке се понављају редом на табли за игру. Просут је сок на таблу и због тога се део табле не види (види слику).



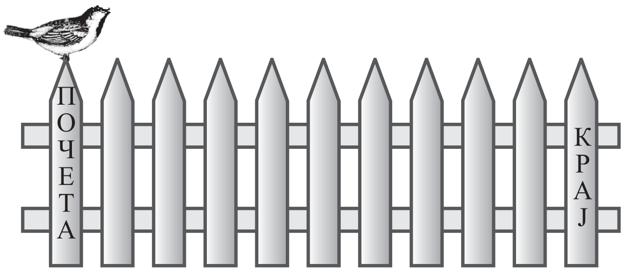
А) 3 **Б)** 6 **В)** 8 **Г)** 9 **Д)** 20

Колико звезда је било на табли пре него то је просут сок?

Тачан одговор: Г

Решење. Са слике видимо да је свака четврта сличица звезда. Ако попунимо преостала поља табле по тој шеми, видећемо да се звезда јавља укупно $6 + 3 = 9$ пута.

Задатак 13. Врабац скаче са једног на други стуб ограде. За сваки скок му је потребна 1 секунда. Он прави четири скока напред, па један скок назад, затим опет 4 напред, па 1 назад и тако даље. За колико секунди ће стићи од почетка до краја ограде приказане на слици?



А) 10 **Б)** 11 **В)** 12 **Г)** 13 **Д)** 14

Тачан одговор: Д

Решење. Дужина ограда је 10 (не рачунамо почетни стуб). У првој секунди ће врабац бити на првом стубу, у другој на другом, у трећој на трећем, у четвртој на четвртом, у петој на трећем (прва четири скока је ишао унапред, а онда иде један уназад), у шестој на четвртом, у седмој на петом, у осмој на шестом, у деветој на седмом, у десетој на шестом (јер је скочио уназад), у једанаестој на седмом, у дванаестој на осмом, у тринаестој на деветом, у четрнаестој на дестом, последњем стубу. Сада видимо да је решење 14 секунди.

Задатак 14. Бака је направила 11 колача. Украсила је 5 колача сувим грожђем, а затим 7 орасима. Колико је најмање колачха украсила и сувим грожђем и орасима?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 5 **Г)** 7 **Д)** 12

Тачан одговор: А

Решење. Како је укупан број колача које је бака украсила 11 и како је она 5 колача украсила на један начин,а 7 колача на други начин и $7 + 5 = 12$ закључцујемо да је бака украсила $12 - 11 = 1$ колац и сувим грожђем и орасима.

Задатак 15. Који број је прекривен детелином на слици?

$$\circledcirc + \triangle = 3$$
$$\triangle + \triangle = 4$$
$$\triangle + \square = 5$$
$$\circledcirc + \square = \clubsuit$$

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 5

Тачан одговор: Г

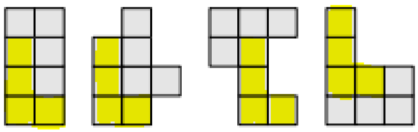
Решење. Из друге једначине може се закључити да је $\triangle = 2$. Ако се то примени у првој једначини, добијемо да је $\circledcirc = 1$, а ако се то примени у трећој, онда је $\square = 3$. На основу тога можемо израчунати да је $\clubsuit = \circledcirc + \square = 1 + 3 = 4$.

Задатак 9. Имаш плочицу у облику слова L, која се састоји од 4 квадрата, као на слици. Колико од следећих облика можеш добити лепљењем две такве плочице?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

Тачан одговор: Д

Решење. Можемо конструисати следећи пример:



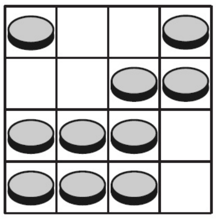
Задатак 17. У кутији се налазе три кутије, од којих свака садржи три мање кутије. Колико укупно има кутија?

А) 9 **Б)** 10 **В)** 12 **Г)** 13 **Д)** 15

Тачан одговор: Г

Решење. У кутији се налазе три кутије у којима има по три кутије односно има укупно девет кутија. Девет кутија се налази у три кутије па је то дванаест, а све оне се налазе у једној великој што значи да је укупно тринаест кутија.

Задатак 18. На табли се налазе жетони. Хоћемо да у свакој врсти и свакој колони буде по 2 жетона. Колико жетона треба склонити?



А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

Тачан одговор: В

Решење. Да би се добило да се у свакој колони и врсти налази тачно 2 жетона, потребно је избацити оне жетоне који припадају колони и врсти који имају по 3 жетона. На пример: жетон који припада трећој врсти и првој колони, као и жетон који припада четвртој врсти и трећој колони. Упарво избацивањем та два жетона добићемо да се у свакој колони и врсти налазе по два жетона. Према томе, решење је 2.

2 Категорија - 3. и 4. разред

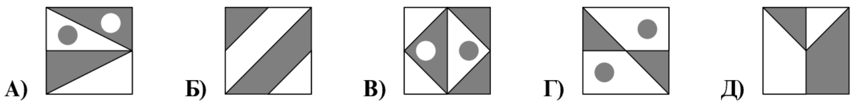
Задатак 1. Бојан жели да напише реч МАТЕМАТИКА на папиру, тако што ће различита слова бити написана различитим бојама, а иста слова истом бојом. Колико боја му је потребно?

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 8 **Д)** 10

Тачан одговор: Б

Решење. У речи МАТЕМАТИКА се налазе слова М, А, Т, Е, И и К. То значи да се у тој речи налази 6 различитих слова, па је Бојану потребно 6 различитих боја.

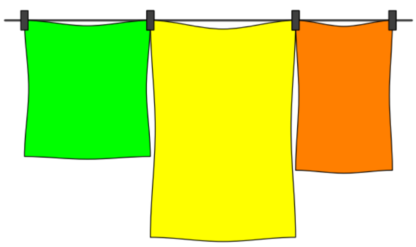
Задатак 2. На четири од датих пет слика површина белог дела је једнака површини сивог дела. На којој слици се површина белог и сивог дела разликују?



Тачан одговор: Г

Решење. На слици А се види да су површине сивог и белог круга једнаке као и површине сивог и белог троугла и површине сивог и белог троугла без круга. На слици Б су површине сивог и белог троугл исте каои сивог и белог четвороугла. На слици В су површине сивог и белог круга једнаке као и површине сивиг и белих троуглова и троуглова без кругова. На слици Д су површине сивог и белог троугла једнаке као и порвршине сивог и белог четвороугла. Дакле на свакој осим на слици Г моземо да упаримо одређене сиве и беле делове које имају исту површину до на слици г то није могуце јер имамо два сива круга и два сиве троугла.

Задатак 3.Тата качи веш на конопац за сушење. Он жели да употреби што је могуће мање штипаљки. За 3 пешкира потребне су 4 штипаљке. Колико штипаљки је потребно за 9 пешкира?

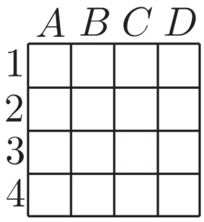


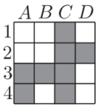
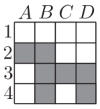
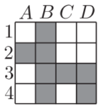
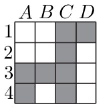
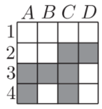
А) 8 **Б)** 10 **В)** 12 **Г)** 14 **Д)** 16

Тачан одговор: Б

Решење. Са слике се види да ће за сваки наредни пешкир бити потребна по још једна додатна штипаљка. Пошто имамо закачена три пешкира помоћу четири штипаљке, преостаје нам да окачимо још шест пешкира. За сваки од њих нам треба по једна штипаљка, то јест за свих шест је потребно шест додатних штипаљки. Укупан број штипаљки је: $4 + 6 = 10$.

Задатак 4. Илија је обојио квадрате $A2, B1, B2, B3, B4, C3, D3$ и $D4$ на слици. Која од датих слика одговара његовом бојењу?



А)  **Б)**  **В)**  **Г)**  **Д)** 

Тачан одговор: В

Решење. Посматрајмо слике квадрата. Закључимо да је по услову задатка обојено слово $B1$, то је случај само на слици В, па је то и решење овог задатка.

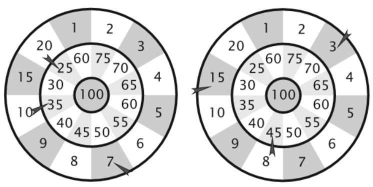
Задатак 5. Тринаесторо деце се играло жмурке. Једно од њих жмури, а остали се скривају. После неког времена деветоро деце је пронађено. Колико их је још скривено?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 9 **Д)** 22

Тачан одговор: А

Решење. Од тринаесторо деце, једно од њих жмури а преосталих $13 - 1 = 12$ се скривају. Деветоро је пронађено па је, према томе, сакривено остало $12 - 9 = 3$ детета.

Задатак 6. Милан и Јован бацају пикадо. Сваки од њих је бацио по три пута (види слику). Ко је победио, и колико поена више је освојио?



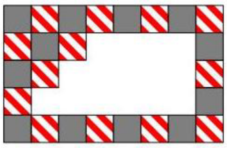
Милан Јован

А) Милан са 3 поена више. **Б)** Јован са 4 поена више.
В) Милан са 2 поена више. **Г)** Јован са 2 поена више.
Д) Милан са 4 поена више.

Тачан одговор: Д

Решење. Милан је освојио $7 + 25 + 35 = 67$, а Јован $3 + 15 + 45 = 63$ поена. Дакле, Милан је победио, са 4 поена више.

Задатак 7. Правоугаона шара на зиду је направљена коришћењем две врсте плочица: сивих и пругастих. Неке плочице су отпале са зида (види слику). Колико је сивих плочица отпало?



А) 9 **Б)** 8 **В)** 7 **Г)** 6 **Д)** 5

Тачан одговор: Б

Решење. Приметимо да се црвено-беле и сиве плочице смењују. Ако попунимо празан простор плочицама које су отпале, видећемо да сивих фали 8.

Задатак 8. Година 2012. је преступна, што значи да фебруар има 29 дана. Данас, 15. марта 2012, пачићи мог деде су стари 20 дана. Када су се они излегли?

А) 19. фебруара **Б)** 21. фебруара **В)** 23. фебруара
Г) 24. фебруара **Д)** 26. фебруара

Тачан одговор: Г

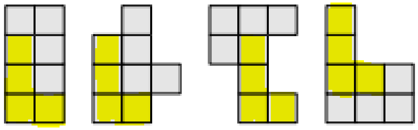
Решење. Пилићи су 15. марта имали 20 дана, 14. марта 19 дана... 1. марта $20 - 14 = 6$ дана. То значи да су 29. фебруара имали 5 дана, па су рођени 24. фебруара.

Задатак 9. Имаш плочицу у облику слова Л, која се састоји од 4 квадрата, као на слици. Колико од следећих облика можеш добити лепљењем две такве плочице?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3 **Д)** 4

Тачан одговор: Д

Решење. Можемо конструисати следећи пример:



Задатак 10. Три балона коштају 12 центи више него један балон. Колико центи кошта један балон?

А) 4 **Б)** 6 **В)** 8 **Г)** 10 **Д)** 12

Тачан одговор: Б

Решење. То што три балона коштају 12 центи више него један, може се записати у облику:

$3B = 12 + B$, где је B цена једног балона.

Ова једаначина се може решити:

$$3B - B = 12$$

$$2B = 12$$

$$B = 6.$$

Дакле, цена једног балона је 6 центи.

Задатак 11. Бака је направила 20 медењака за своје унуке. Украсила их је сувим грожђем и орасима. Прво је 15 медењака украсила сувим грожђем, а затим 15 орасима. Колико је најмање медењака било украшено и сувим грожђем и орасима?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 8 **Д)** 10

Тачан одговор: Д

Решење. Тражени број се може добити на следећи начин $(15 + 15) - 20 = 10$.

Задатак 12. У игри судоку бројеви 1, 2, 3 и 4 се појављују тачно једном у свакој колони и свакој врсти. Пера је у математички судоку на слици најпре уписао резултате израчунавања, а затим комплетирао судоку.

1×1		1×3	
2×2	6−3		6−5
4−1	1+3	8−7	
9−7	2−1		

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** 1 или 2

Тачан одговор: В

Решење.

1		3	
4	3		1
3	4	1	
2	1		

Прво се израчунају вредности израза у квадратићима. У другој врсти недостаје број 2, јер сви остали бројеви постоје и исто тако у трећој врсти такође фали број 2. Сада посматрајмо трећу колону и приметимо да фали број 4. На крају видимо да у у четвртој врсти фали број 3, а то је и уједно сиво поље. Остало је још да у другој колони упишемо број 2, јер он недостаје и у последњој колони недостаје број 4 и судоку је сада комплетиран.

Задатак 13. Међу Николиним другарима из разреда је два пута више девојчица него дечака. Који од следећих бројева може бити једнак укупном броју деце у том разреду ?

А) 30 **Б)** 20 **В)** 24 **Г)** 25 **Д)** 29

Тачан одговор: Г

Решење. Означимо са x број дечака у Николином разреду. Тада је број девојчица једнак $2 \cdot x$. Рачунајући и њега у број деце у разреду, добијамо да је $1+x+2\cdot x = 1+3\cdot x$. Провером добијамо да је једини број тог облика $1+3\cdot 8 = 25$.

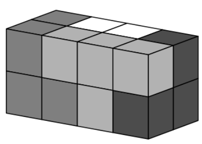
Задатак 14. У школи за животиње 3 мачета, 4 пачета, 2 гушчета и неколико јагњића је присуствовало часу. Учитељица сова је закључила да њени ученици сви заједно имају 44 ногу. Колико је јагњића међу њима?

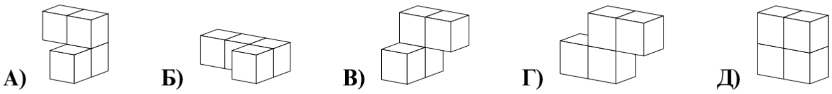
А) 6 **Б)** 5 **В)** 4 **Г)** 3 **Д)** 2

Тачан одговор: Б

Решење. Укупан број ногу 3 мачета, 4 пачета и 2 гушчета је $3\cdot 4+4\cdot 2+2\cdot 2 = 12+8+4 = 20+4 = 24$. То значи да јагњићи заједно имају $44-24 = 20$ ногу. Пошто свако јагње има 4 ноге, број јагњића је $20 \div 4 = 5$.

Задатак 15. Квадар је састављен од четири дела, као што је приказано на слици. Сваки део је обојен једном бојом и састоји се од четири коцке. Ког је облика бели део?





Тачан одговор: Г

Решење. Приметимо да бела фигура зеаузима два централна поља горњег задњег слоја квадра као и доње лево задње поље зато сто се на слици виде цетри поља фигуре лево од беле и ниједно од њих није доње лево задње (поља осталих сивих фигура не могу да се нађу на том пољу). Од поља којих се не виде остају још 2 испод горњих белих од којих је једно бело. Како фигуа десно од беле има 3 видљива поља њено цетвртo поље је једно од та два и то мора да буде десно поље јер је у супротном фигура не би била повезана.

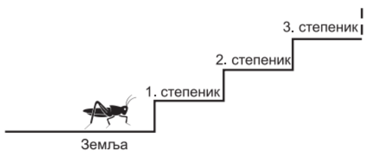
Задатак 16. На Божићној прослави на сваком од 15 столова налазио се по један свећњак. Било је 6 свећњака са по 5 свећа, док су остали били са по 3 свеће. Колико је свећа било потребно купити за све свећњаке?

А) 45 **Б)** 50 **В)** 57 **Г)** 60 **Д)** 75

Тачан одговор: В

Решење. Пошто је на сваком столу по један свећњак, потребно је укупно 15 свећњака, јер је толико и столова. За шест свећњака са по пет свећа потребно је укупно $6 \cdot 5 = 30$ свећа. Свећњака са по три свеће има $15 - 6 = 9$, а свећа потребно за њих $9 \cdot 3 = 27$. За све свећњаке нам је потребно укупно $30 + 27 = 57$ свећа.

Задатак 17. Скакавац жели да се попне на степенице које се састоје из више степеника (види слику). Он прави само два различита скока: 3 степеника горе или 4 степеника доле. Ако крене са земље, колико најмање скокова мора да направи да би се одмарао на 22. степенику?

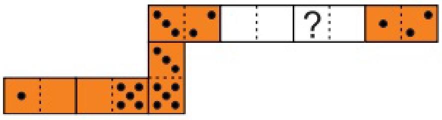


А) 7 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 12 **Д)** 15

Тачан одговор: Г

Решење. Скакавац скаче унапред све док не скочи на 22. степеник или га не прескочи када мора да се врати уназад. Када би скакавац 7 пута скочио унапред, налазио би се на 21. степенику. Значи да мора да скочи 8 пута унапред, и после осмог скока скавац ће се налазити на 24. степенику. У деветом потезу скакавац мора да се врати уназад 4 поља, па ће се после деветог потеза налазити на 20. степенику. У десетом потезу скакавац скаче три поља унапред и налази се на 23. степенику. У једанаестом потезу скакавац се враћа назад 4 поља и скаче на 19. поље. У дванаестом, последњем потезу скакавац скаче три поља унапред на 22. степеник.

Задатак 18. Филип је направио змију од домина употребивши седам плочица. Стављао је плочице једну до друге тако да се стране са истим бројем тачкица додирују. Змија је имала укупно 33 тачкице. Међутим, његов брат Ђорђе је извукао две плочице (види слику). Колико је тачкица било на месту где је знак питања?



А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

Тачан одговор: В

Решење. Посматрајмо 4 празна квадрата. На левој домини леви квадрат имаће две тачкице, јер тај број тачкица мора бити једнак оном суседном. Аналогно десни квадрат десне домине имаће једну тачкицу. Како је змија имала укупно 33 тачкице, следи да је преостали број тачкица $33-(1+5+5+3+3+2+2+1+1+2)=8$. Како је збир броја тачкица на преостала два квадрата једнак 8, а број тачкица на оба квадрата једнак, значи да је број тачкица на сваком од та два квадрата једнак $\frac{8}{2}=4$.

Задатак 19. Марко је формирао два броја користећи цифре 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Оба броја имају по три цифре, и свака цифра је употребљена само једном. Он је сабрао та два броја. Који је највећи збир који је Марко могао да добије?

А) 975 **Б)** 999 **В)** 1083 **Г)** 1173 **Д)** 1221

Тачан одговор: Г

Решење. Да би добијени збир био што већи, јасно је да требамо бирати та два броја тако да је збир цифара стотина што већи. Тај збир можемо добити од цифара 6 и 5 (дакле бројеви су нам 6** и 5**). Даље, битно нам је да је збир цифара десетица већи од збира цифара јединица. То значи да су на местима десетица следеће две највеће цифре, тј. 4 и 3. За цифре јединица су остале само цифре 2 и 1.
Дакле, ти бројеви су 642 и 531, а њихов збир је 1173.

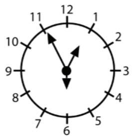
Задатак 20. Лаза, Игор, Воја и Каја су желели да буду заједно на слици. Каја и Лара су најбоље другарице и желе да на слици буду једна до друге. Игор жели да стоји поред Ларе, јер му се она допада. На колико начина се они могу распоредити за сликање тако да све жеље буду испуњене?

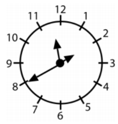
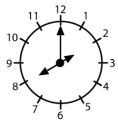
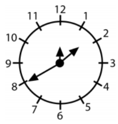
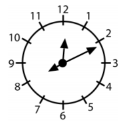
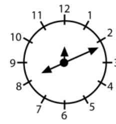
А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 7

Тачан одговор: Б

Решење. Из услова да Каја и Лара стоје једна до друге и да Урош жели да стоји поред Ларе, имамо распоред УЛК или КЛУ (дата слова представљају почетна слова њихових имена). Воја може стајати са било које стране, те ћемо имати следеће могућности: ВУЛК, УЛКВ, ВКЛУ, КЛУВ. Укупно их има 4.

Задатак 21. Специјалан сат има три казаљке различитих дужина (за сате, минуте и секунде). Не знамо која је која казаљка, али знамо да је сат исправан. У 12.55.30 казаљке су биле у позицији као на слици. Како ће изгледати сат у 8.11.00?



А)  Б)  В)  Г)  Д) 

Тачан одговор: Д

Решење. У 12.55.30 ће казаљка за сате бити близу броја један, казаљка за минуте на броју 11, а казаљка секунде на броју 6. Сада видимо да средња казаљка показује сате, најдужа минуте, а најкраћа секунде. У 8.11.00 ће казаљка за сате (средња) бити близу 8, казаљка за минуте (најдужа) близу 2, а за секунде (најкраћа) на 12, па је решење под д).

Задатак 22. Михаило је изабрао један позитиван број, помножио га са самим собом, додао 1, помножио резултат са 10, додао 3 и резултат помножио са 4. Тако је добио број 2012. Који број је Михаило изабрао?

А) 11 **Б)** 9 **В)** 8 **Г)** 7 **Д)** 5

Тачан одговор: Г

Решење. Претпоставимо да је Михаило замислио позитиван број a како је тај број помножио са собом и додао један то је $a \cdot a + 1$, даље је тај резултат помножио са десет и том резултату додао три ,па је $(a \cdot a + 1)10 + 3$,даље је цео тај број помножио са четири и резултат је 2012,дакле добија се једначина $((a \cdot a + 1)10) + 3))4 = 2012$,прво поделимо једнацину са четири ,онда се ослободимо унутрашњих заграда у изразу и добијемо $10a \cdot a + 13 = 503$ тј.$a \cdot a = 49$ како се трази позитиван број,а знамо да је $8 \cdot 8 = 64$ и $6 \cdot 6 = 36$ дати број мора бити 7 јер је он једини цео број између 8 и 6.

Задатак 23. Папир правоугаониг облика има димензије 192 x 84 mm. Можеш сећи папир дуж једне праве линије тако да добијеш два дела од којих је један облика квадрата. Исти поступак можеш применити на онај добијени део који није квадратног облика и тако даље. Колика је дужина странице најмањег квадрата који се може добити на тај начин?

А) 1 mm **Б)** 4 mm **В)** 6 mm **Г)** 10 mm **Д)** 12 mm

Тачан одговор: Д

Решење. Од правоуганика 192 x 84 mm, може се прво добити квадрат 84 x 84 mm; преостали правоугаоник је димензија 108 x 84 mm. Од правоуганика 108 x 84 mm, може се добити квадрат 84 x 84 mm; преостали правоугаоник је димензија 24 x 84 mm. Од овог правоугаоника могу се добити 3 квадрата величине 24 x 24 mm, а преостали правоугаоник је димензија 24 x 12 mm. Овај правоугаоник може се поделити на два квадрата 12 x 12 mm и не преостаје ништа више. Тако да најмањи квадрат има дужину странице 12 mm.

Задатак 24.. У фудбалу победник меча добија 3 бода, а порачени добија 0 бодова. Ако се меч заврши нерешено, тада оба тима добијају по 1 бод. Једна екипа је одиграла 38 утакмица и освојила 80 бодова. Колико највише утакмица је та екипа могла да изгуби?

А) 12 **Б)** 11 **В)** 10 **Г)** 9 **Д)** 8

Тачан одговор: В

Решење. Нека је a број добијених утакмица, b број изгубљених утакмица и c број нерешених утакмица. Важи следеће:
$3 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c = 80$
$a + b + c = 38$
Из система се добија $b = \frac{34-2c}{3}$. За $c = 1$, b није цео број. За $c = 2$ важи да је $b = 10$, што је тражени број.

---

3 Категорија - 5. и 6. разред

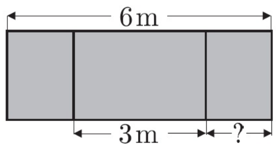
Задатак 1. Бојан жели да на зиду напише БАНЕ ВОЛИ КЕНГУРА, тако што ће различита слова бити обојена различитим бојама, а иста слова истом бојом. Колико боја му је потребно?

А) 10 **Б)** 11 **В)** 12 **Г)** 13 **Д)** 16

Тачан одговор: В

Решење. Укупно има 15 слова. Приметимо да се у речи КЕНГУРА налазе слова Е, Н, А која су већ употребљена у речи БАНЕ, па има $15 - 3 = 12$ слова одакле следи да је Бојану потребно 12 различитих боја.

Задатак 2. Табла приказана на слици је широка $6m$. Ширина средњег дела је $3m$, а преостала два дела имају исту ширину. Колико је широк део са десне стране ?



А) 1 m **Б)** 1,25 m **В)** 1,5 m **Г)** 1,75 m **Д)** 2 m

Тачан одговор: В

Решење. Дужина делова са стране је једнака разлици укупне дужине три дужи и средње дужи. Како су две дужи на крајевима једнаке дужине, свака ће појединачно бити дужине $\frac{6-3}{2} = 1,5m$.

Задатак 3.Селена у квадрат направљен од 4 палидрвца може да стави 4 жетона (види слику). Колико најмање палидрваца јој је потребно да би могла да направи квадрат у који може да се стави 16 жетона без преклапања?

А) 8 **Б)** 10 **В)** 12 **Г)** 15 **Д)** 16

Тачан одговор: А

Решење. Нека је d пречник једног жетона. Тада важи да је дужина страница квадрата, односно дужина једнох палидрвца једнака $2d$. Да би 16 жетона било распоређено у квадрат, потребно је да буду распоређени у 4 врсте по 4 жетона. То значи да је дужина странице новог квадрата $4d$, што је двапут веће од дужине палидрвца, па је за сваку страницу квадрата потребно 2 палидрвца, односно, за цео квадрат потребно је $4 \cdot 2 = 8$ палидрваца.

Задатак 4. У авиону су редови обележени бројевима од 1 до 25, али нема реда са бројем 13. Ред са бројем 15 има само 4 седишта, док сви остали редови имају по 6 седишта. Колико укупно седишта има у авиону?

А) 120 **Б)** 138 **В)** 142 **Г)** 144 **Д)** 150

Тачан одговор: В

Решење. Један ред има 0 седишта (изостављен је), један 4 а осталих 23 по 6 седишта. Укупан број седиста је дакле $0 + 4 + 6 \cdot 23 = 142$

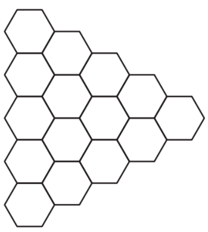
Задатак 5. Када је у Лондону 4 сата поподне, тада је у Мадриду 5 сати поподне, а у Сан Франциску је 8 сати ујутру истог дана. Ана је отишла на спавање у Сан Франциску синоћ у 9 сати. Које време је у том тренутку било у Мадриду?

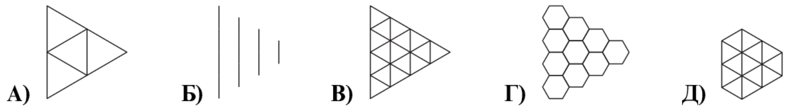
А) 6 сати јуче ујутру **Б)** 6 сати јуче увече **В)** 12 сати јуче у подне
Г) 12 сати у поноћ **Д)** 6 сати јутрос

Тачан одговор: Д

Решење. Време у Мадриду када је у Сан Франциску 8 ујутро можемо уместо у формату 5 сати поподне представити и као 17 часова у 24-часовном систему. Одатле је разлика у временима између Мадрида и Сан Франциска: $17 - 8 = 9$ часова, где је Мадрид испред Сан Франциска. Девет сати увече у Сан Франциску можемо представити и као 21 час у 24-часовном систему. Да бисмо добили време у Мадриду, потребно је да на време од 21 час додамо још 9 сати. До поноћи је потребно $24 - 21 = 3$ часа, након чега је у Мадриду нови дан. Пошто је Мадрид испред Сан Франциска за девет сати, то је нови дан у односу на Сан Франциско, то јест данашњи дан. Време у том тренутку је $9 - 3 = 6$ ујутро.

Задатак 6. На слици је приказана шара направљена од шестоуглова. Нову шару добијамо тако што спојимо средишта суседних шестоуглова. Коју шару ћемо добити?





Тачан одговор: В

Решење. Приметимо да када спојимо средишта суседних шестоуглова добијемо слике троуглова. Нова слика одговора слици В.

Задатак 7. Броју 6 смо додали 3. Затим смо резултат помножили са 2 и онда додали 1. Којој вредности израза ће добијени резултат бити једнак?

А) $(6+3\cdot 2)+1$ **Б)** $6+3\cdot 2+1$ **В)** $(6+3)\cdot(2+1)$
Г) $(6+3)\cdot 2+1$ **Д)** $6+3\cdot(2+1)$

Тачан одговор: Г

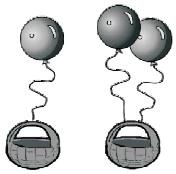
Решење. Дати израз биће једнак: $(6+3)\cdot 2+1$.

Задатак 8. Горњи жетон се ротира без клизања око фиксираног доњег жетона до позиције приказане на слици десно. Који је тада положај кенгура?

Тачан одговор: А

Решење. Горњи жетон се окрене за $90° + 90° = 180°$, јер се окреће око своје осе, као и око осе која пролази кроз средину доњег жетона.

Задатак 9. Један балон може да подигне корпу која садржи предмете чија је маса максимално $80kg$. Два таква балона могу подићи исту корпу која садржи предмете максимално $180kg$. Колика је маса корпе?



А) 10 kg **Б)** 20 kg **В)** 30 kg **Г)** 40 kg **Д)** 50 kg

Тачан одговор: Б

Решење. Један балон подиже $80kg$+корпу, два балона подигну $180kg$, тј. $180 = 80kg + 80kg$+маса корпе. Одатле добијамо да је маса корпе $20kg$.

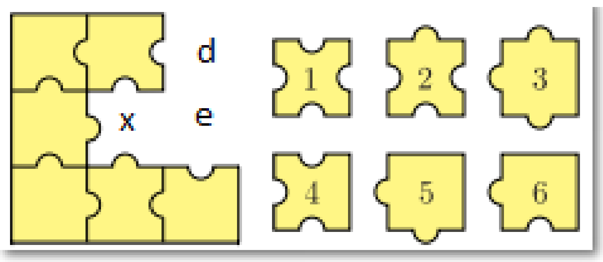
Задатак 10. Влада и Милош су добили неколико јабука и крушака од баке. Они у корпи имају укупно 25 воћки. На путу кући Влада је појео 1 јабуку и 3 крушке, а Милош је појео 3 јабуке и 2 крушке. Код куће су утврдили да имају исти број јабука и крушака. Колико су крушака добили од баке?

А) 12 **Б)** 13 **В)** 16 **Г)** 20 **Д)** 21

Тачан одговор: Б

Решење. Нека су j и k број јабука и крушака на почетку пута. На путу су појели укупно 4 јабуке и 5 крушака, па им је остало $j-4$ јабука и $k-5$ крушака. Имамо да је $j-4=k-5$ и да је $j+k=25$. Из прве једначине добијамо $j=k-1$, а из друге $25=k+k-1=2k-1$, па је $k=\frac{25+1}{2}=13$, а $j=25-13=12$.

Задатак 11. Којим бројевима су означена три дела слагалице које треба додати да би се на слици лево добио квадрат?



А) $1,3,4$ **Б)** $1,3,6$ **В)** $2,3,5$
Г) $2,3,6$ **Д)** $2,5,6$

Тачан одговор: Г

Решење. На слици видимо да на пољу x мозе да буде једино фигура означена са бројем 2,зато што једино она има испупчење са горње и удубљење са доње стране, даље на пољу означеном са e мора да буде фигура која има испупчење са доње и леве стране и са десне нема ни испупчење ни удубљење,због тога долазе у озбир само фигуре означене бројевима 3 и 5.Ако би на пољу e била фигура означена бројем 5 онда поље d не може бити поплочано са понуђеним фигурама, дакле на пољу e је фигура означена бројем 3 даље како на пољу d мора бити фигура која има само удубљење са доње стране и испупчење леве стране то оцигледно мозе да буде само фигура означена бројем 6.

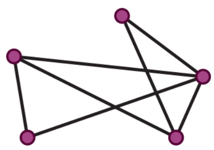
Задатак 12. Јана има 8 коцкица са словима А, Б, В и Г, тако да је исто слово на свакој страни коцкице. Она је од њих направила коцку. Две суседне коцкице увек имају различита слова. Које слово је на коцкици која се не види на слици?

А) А **Б)** Б **В)** В **Г)** Г **Д)** Не може се одредити

Тачан одговор: Б

Решење. На коцкици није слово Г зато што се коцкица са тим словом налази десно од ње. На њој није ни слово В, јер се коцкица са тим словом налази изнад ње. Није ни слово А, јер је та коцкица испред ње. Дакле, на коцкици која се не види је слово Б.

Задатак 13.У Земљи чуда има пет градова. Сваки пар градова је повезан путем, било видљивим било невидљивим. На мапи Земље чуда видљиво је само седам путева (види слику). Алиса има магичне наочаре и када кроз њих гледа мапу она види само путеве који су иначе невидљиви. Колико невидљивих путева она може да види?



А) 9 **Б)** 8 **В)** 7 **Г)** 3 **Д)** 2

Тачан одговор: Г

Решење. Број свих путева је једнак збиру дијагонала и броја страница петоугла, што износи $\frac{5(5-3)}{2} + 5 = 10$. Дакле, тражени број је једнак $10 - 7 = 3$.

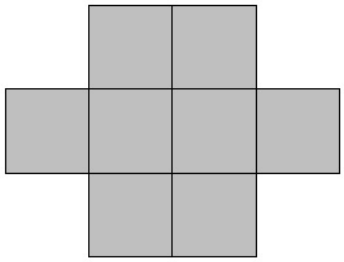
Задатак 14. Природни бројеви су обојени црвеном, плавом и зеленом бојом: 1 је обојен црвеном, 2 плавом, 3 зеленом, 4 црвеном, 5 плавом, 6 зеленом и тако даље. Радмила је рачунала збир једног црвеног и једног плавог броја. Којом бојом може бити обојен број који је она добила?

А) немогуће је одредити **Б)** црвеном или плавом **В)** само зеленом **Г)** само црвеном **Д)** само плавом

Тачан одговор: В

Решење. Број обојен црвеном бојом при дељењу са 3 даје остатак 1, бројеви плаве боје остатак 2, а бројеви зелене боје су дељиви са 3. Када се саберу црвени и плави број при дељењу са 3 дају остатак у збиру $2+1=3$ што значи да је и остатак дељив са 3, што даље имплицира да је њихов збир дељив са 3, а то значи да је број зелене боје.

Задатак 15. Обим фигуре приказане на слици, састављене од идентичних квадрата, једнак је $42cm$. Колика је површина ове фигуре?

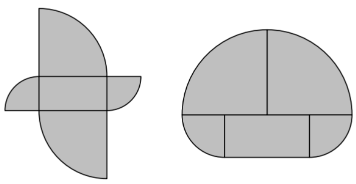


А) $8\,\mathrm{cm}^2$ **Б)** $9\,\mathrm{cm}^2$ **В)** $24\,\mathrm{cm}^2$ **Г)** $72\,\mathrm{cm}^2$ **Д)** $128\,\mathrm{cm}^2$

Тачан одговор: Г

Решење. Нека је страница једног од ових квадрата дужине a. Тада обим износи $14 \cdot a = 42cm$. Одатле је $a = 3cm$. Како има 8 квадрата површине a^2, површина фигуре је једнака $P = 8 \cdot a^2 = 8 \cdot 9cm^2 = 72cm^2$.

Задатак 16. Обе фигуре на слици су формиране од истих пет делова. Димензије правоугаоника су $5\ cm \times 10\ cm$, а преостали делови су четвртине два различита круга. Колика је разлика између дужине обима ових фигура.

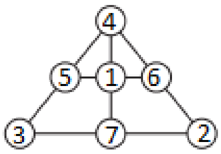


А) $2,5\,\mathrm{cm}$ **Б)** $5\,\mathrm{cm}$ **В)** $10\,\mathrm{cm}$ **Г)** $20\,\mathrm{cm}$ **Д)** $30\,\mathrm{cm}$

Тачан одговор: Г

Решење. Нека је a дужа, b краћа страница правоугаоника, R пречник великих четвртина круга и r пречник малих четвртина круга. У обим ове две фигуре улазе исти делови круга, тако да се обими те две фигуре разликују само у дужима које их чине. У првој су то 2 полупречника великих четвртина круга и 2 полупречника малих четвртина круга, док је у другој то само дужа страница правоугаоника, па имамо да је разлика у обимима једнака $2R + 2r - a$. Такође, $R = a$ и $r = b$, јер је пречник круга константан. Одатле добијамо да је разлика обима једнака $2a + 2b - a = a + 2b = 10\ cm + 2 \cdot 5\ cm = 20\ cm$.

Задатак 17. Упиши бројеве од 1 до 7 у кругове на слици, тако да збир бројева дуж сваке од обележених линија које садрже по три круга буде исти. Који број се налази на врху троугла?



А) 1 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

Тачан одговор: В

Решење. На врху троугла се налазе број a. Приметимо да остале бројеве можемо да групишемо у 3 групе од по 2 или 2 групе од по 3 броје чији је збир једнак па је број $\frac{7 \cdot 8}{2} - a$ дељив са 6, а $28 - a$ је дељив са 6 ако a даје остатак 4 при дељењу са 6. Како је a број између 1 и 7 једини кандидат зе број a је 4.

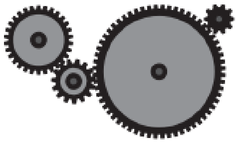
Задатак 18. Гумена лоптица пада вертикално са крова куће са висине од 10 м. После сваког удара у земљу она одскочи до $\frac{4}{5}$ претходне висине. Колико пута ће се лоптица појавити испред прозора правоугаоног облика чија је доња страница на висини од 5 м, а горња на висини од 6 м?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 8

Тачан одговор: Г

Решење. Први пут се лоптица види када пада са висине од 10 м. После тога она одскаче до 8 м, и током пењања и падања види се још по једном, укупно три пута. Након тога она одскаче до висине од 6.4 метара, и током тог успона и пада се поново уочи по једном са прозора, то јест укупно пет пута. Следећи пут лоптица ће стићи до висине од 5.12 метара, што је између горње и доње границе, па ће се у том периоду лоптица видети само једном, укупно шести пут. Након тога лоптица ће одскочити до висине мање од 5 метара, па више неће бити могуће видети је са прозора. Дакле, лоптица ће бити уочена укупно 6 пута.

Задатак 19.На слици су приказана 4 зупчаника, један поред другог, на фиксираним осовинама. Први има 30 зубаца, други 15, трећи 60 и последњи 10. Колико обртаја направи последњи зупчаник док први зупчаник направи један обртај?

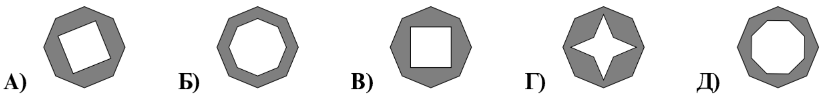


А) 3 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 8 **Д)** 9

Тачан одговор: А

Решење. Приметимо да због односа броја зубаца, када се први зупчаник обрне за неки угао, други ће се обрнути за дупло већи угао. Затим ће се трећи обрнути за четири пута мањи угао од угла другог зупчаника. Аналогно, ће се четври зупчаник обрнути за 6 пута већи угао у односу на угао обртаја трећег зупчаника. Тј, ако се први зупчаник обрне за неки угао вредности x, четврти зупчаник ће се обрнути за угао вредности y, где важи: $y = (x \cdot 2/4) \cdot 6 = 3$

Задатак 20. Правилни осмоугао је пресавијан на пола тачно три пута док није добијен троугао, као што је приказано на слици.
Онда је одсечен врх под правим углом, као на слици. Која фигура ће се добити након развијања?



Тачан одговор: В

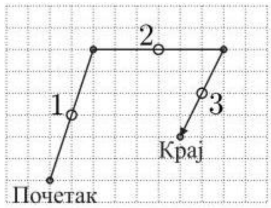
Задатак 21. Видина маринада од сирћета, вина и воде садржи сирће и вино у односу 1 према 2, а вино и воду у односу 3 према 1. Које је од следећих тврђења тачно?

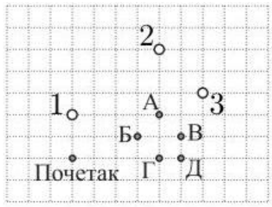
А) Има више сирћета него вина.
Б) Има више вина него сирћета и воде заједно.
В) Има више сирћета него вина и воде заједно.
Г) Има више воде него сирћета и вина заједно.
Д) Има мање сирћета и од воде и од вина.

Тачан одговор: Б

Решење. Ако количину сирћета обележимо са x, тада вина има $y = 2 \cdot x$. Количину воде (z) можемо добити из следеће пропорције : $\frac{y}{z} = \frac{3}{1}$. Добијамо да је $z = \frac{1}{3} \cdot y = \frac{1}{3} \cdot 2x = \frac{2x}{3}$. Сада имамо да су количине сирћета, вина и воде $x, 2x$ и $\frac{2x}{3}$, редом. Сада можемо проци кроз све понуђене одговоре, и елиминисати погрешне. Кренимо од одговора А: он тврди да је $x > y$, што је нетачно, јер је $x < y = 2x$. Даље проверавамо одговор Б: $y > x + z$, што је тачно јер је $2x > x + \frac{2x}{3}$, односно $x > \frac{2x}{3}$

Задатак 22. Кенгури Хип и Хоп се играју прескачући преко камена, тако што скачу на такву позицију да камен буде на средини сегмента који прескоче. На слици доле је приказано како је Хоп прескочио три камена обележена бројевима 1, 2 и 3. Хип има исти распоред камена 1, 2 и 3, али полази из друге позиције (слика десно). Која од тачака А, Б, В, Г или Д представља његову крајњу позицију

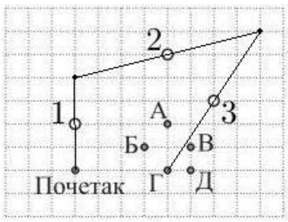




А) А **Б)** Б **В)** В **Г)** Г **Д)** Д

Тачан одговор: Г

Решење. Користећи слику десно, допунићемо путању кенгура Хипа, тј. његове следеће станице.



Са слике видимо да је његова крајња позиција тачка Г.

Задатак 23. На рођенданској забави је било дванаесторо деце. Деца су била стара 6, 7, 8, 9 или 10 година, при чему је било бар по једно дете сваког од наведених узраста. Четворо деце је било старо 6 догина. У групи је највише деце имало 8 година. Колика је била просечна старост деце на забави?

А) 6 **Б)** $6,5$ **В)** 7 **Г)** $7,5$ **Д)** 8

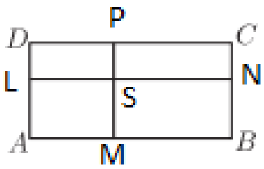
Тачан одговор: Г

Решење. Означимо са n_6, n_7, n_8, n_9 и n_{10} број деце са 6, 7, 8, 9 односно 10 година, редом. Из услова задатка имамо да је $n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{10} = 12$. Такође знамо да је $n_6 = 4$ и да је n_8 најевићи број од описаних. Како имамо да је било бар по једно дете сваког од наведених узрастам, имамо додатни услова да је $n_7, n_8, n_9, n_{10} \geq 1$. Како је n_8 највећи број, онда он мора бити већи од $n_6 = 4$, тј. мора бити барем 5. Уколико је $n_8 = 5$, једина могућност за остале вредности је да су управо једнаке један, тј. да је $n_7 = n_9 = n_{10} = 1$.

Сада можемо израчунати тражену просечну вредност. Наиме, просечна вредност је једнака:

$$avg = \frac{6 \cdot n_6 + 7 \cdot n_7 + 8 \cdot n_8 + 9 \cdot n_9 + 10 \cdot n_10}{12} = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 1}{12} = 7.5$$

Задатак 24. Правоугаоник$ABCD$ је подељен на четири мања правоугаоника као на слици. Четири мања правоугаоника имају следеце особине: (а) обими три од њих су 11, 16 и 19; (б) обим четвртог није ни најмањи ни највеци међу уочена четири правоугаоника. Колики је обим правоугаоника $ABCD$?

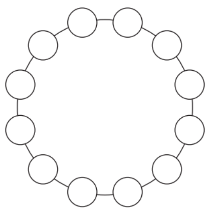


А) 28 **Б)** 30 **В)** 32 **Г)** 38 **Д)** 40

Тачан одговор: Б

Решење. На слици се јасно види да најмањи обим има правоугаоник $PSLD$,а да највећи обим има правоугаоник $SMBN$.Према томе се добијају следеће једнакости $LS + LD = \frac{11}{2}$ и $MB + MS = \frac{19}{2}$. Даље како је $AM + MB = AB$ и $MS + LD = AD$ заменом ових вредности у једначини $MB + MS = \frac{19}{2}$ се добија $AB - LS + AD - LD = \frac{19}{2} \Rightarrow AB + AD = \frac{19}{2} + \frac{11}{2} = 15$, Како је обим једнак $2 \cdot (AB + AD)$ решење је 30.

Задатак 25. Кенгур жели да распореди бројеве од 1 до 12 по кружници на слици тако да се суседни бројеви увек разликују или за 1 или за 2. Који бројеви морају бити суседни?



А) 5 и 6 **Б)** 10 и 9 **В)** 6 и 7 **Г)** 8 и 10 **Д)** 4 и 3

Тачан одговор: Г

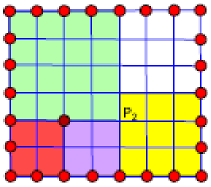
Решење. Ако бројеви на кружници морају да се разликују за највише 1 или 2, то значи да око броја 1 морају бити бројеви 2 и 3 са обе стране. Остале бројеве ређамо парне са једне, а непарне са друге стране. Од понуђених одговора једино су бројеви 8 и 10 два броја исте парности један поред другог. Тако да је решење Г.

Задатак 26.Петар жели да правоугаоник димензије 6 x 7 исече на квадрате са целобројним дужинама страница. Колико најмање квадрата он може добити?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 7 **Г)** 9 **Д)** 42

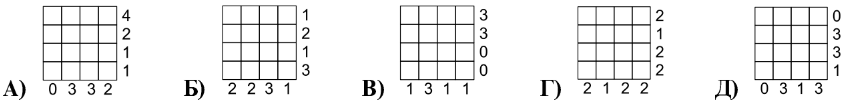
Тачан одговор: Г

Решење. Можемо конструисати следећи пример (5 исечених квадрата):



Највећи квадрат који се може исећи је димензије 6 x 6. Тада ће најмањи број исечених квадрата бити 7. Ако се исече квадрат димензије 5 x 5, тада је немогуће да укупни број исечених квадрата буде мањи од 5, што се тривијално може утврдити.

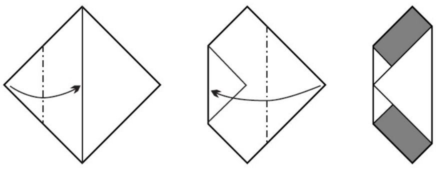
Задатак 27. Нека поља квадратне табле димензије 4×4 су обојена црвеном бојом. Број црвених поља у свакој врсти означен је на крају врсте, а број црвених поља у свакој колони је означен испод ње.



Тачан одговор: Г

Решење. Посматрајмо све табле понаособ. Табла под а) У првој врсти је било 4 поља обојена црвеном бојом, а у првој колони нула поља што је немогуће, јер је горње лево поље или обојено или необојено, не може обоје истовремено, што значи да оваква табла не постоји. Табла под б) Укупно црвених поља у колонама има $2+2+3+1 = 8$, а у врстама $3+3+1+1 = 7$ што није могуће. Табла под в) У другој колони број црвених поља је 3, а у 1. и 2. врсти је могуће да има по 3 обојена поља док у 3. и 4. врсти нема обојених поља, па је максималан број обојених поља у 2. колони 2, што је контрадикција. Табла под д) У 2. и 4. колони има по 3 обојена поља. У 1. врсти нема обојених поља што значи да у осталим морају бити барем по 2 обојена поља, а 4. врста има само 1 обојено поље што је контрадикција. Следи, једина могућа табла је под г).

Задатак 28. Парче папира квадратног облика има површину $64cm^2$. Квадрат је пресавијен два пута као што је приказано на слици. Колики је збир површина осенчених правоугаоника?



А) $10\,\mathrm{cm}^2$ **Б)** $14\,\mathrm{cm}^2$ **В)** $15\,\mathrm{cm}^2$ **Г)** $16\,\mathrm{cm}^2$ **Д)** $24\,\mathrm{cm}^2$

Тачан одговор: Г

Решење. Нека је теме које се прво помера A, а оно које се друго помера нека буде C. Теме почетног квадрата које се налази изнад дужи AC означимо словом B. Преостала необележена тачка почетног квадрата је D. Првим савијањем тачка A мора да се доведе на дуж BD, самим тим је дуж AA' једнака $A'B$, па су појединачно једнаке по $\frac{8}{2} = 4$. Сада обележимо пресечну тачку дужи која се добија првим савијањем и странице AD са E. Сада у другом савијању тачку C треба довести на дуж $A'E$. Уколико продужимо страницу AB до пресека са правом која пролази кроз C и паралелна је са $A'E$. Обележимо тачку пресека са F. Дуж $A'F = A'B + BF = A'B + BC$. Сада ће и та дуж бити преполовљена. Дакле дужина $CC' = \frac{A'B+BC}{2} = \frac{4+8}{2} = 6$. Дуж BC' ће бити једнака $BC - CC' = 8 - 6 = 2$. Ове дужи BC' и $A'B$ су управо странице правоугаоника чија се површина тражи. Како имамо два таква правоугаоника, решење $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16cm^2$

Задатак 29. Алексин кућни број има три цифре. Ако се обрише прва цифра Алексиног броја добија се Богданов кућни број. Брисањем прве цифре Богдановог кућног броја добија се Вељков кућни број. Збир Алексиног, Богдановог и Вељковог кућног броја је 912. Која је друга цифра Алексиног кућног броја?

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 0

Тачан одговор: В

Решење. Нека је Алексин број $\overline{abc} = 100a + 10b + c$. Тада је Богданов број $\overline{bc} = 10b + c$, а Вељков $\overline{c} = c$, где су a, b и c цифре. Збир ових бројева је:

$$\overline{abc} + \overline{bc} + \overline{c} = 912$$

$$100a + 10b + c + 10b + c + c = 912$$

$$100a + 20b + 3c = 912$$

$$100a + 20b = 912 - 3c$$

Како је лева страна дељива са 10, онда мора бити и десна, тј. број $912-3c$ се мора завршавати нулом. Како је c цифра, да би задовољавала овај услов, она мора бити 3, што се може утврдити провером за све вредности те цифре. Одавде је:

$$100a + 20b = 912 - 12$$

$$100a + 20b = 900$$

$$5a + b = 45$$

За a једнако $1, 2, 3, 4, 5, 6$ или 7, b неће бити цифра. За $a = 8$, b ће бити 5, док ће за $a = 9$, b бити 0, што није могуће, јер Богданов број, $\overline{bc}$, мора бити двоцифрен. Одатле је једина могућност $a = 8, b = 5$ и $c = 4$, односно, једина могућност за b је 5.

Задатак 30. Ани и Бојани су дата два узастопна природна броја (на пример Ани 7, а Бојани 6). Оне знају да су им дати узастопни бројеви, свака зна број који је њој дат, али не зна број који је дат другој девојчици. Оне су водиле следецји разговор. Ана каже Бојани: 'Ја не знам твој број.'Бојана каже Ани: 'Ја не знам твој број.' Онда Ана каже Бојани: 'Ја сада знам твој број! Он је делилац броја 20.'Који је Анин број?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

Тачан одговор: Б

Решење. Ана зна да је Бојанин броји делилац броја 20 и зна да је он за 1 веци или за 1 мањи од њеног боја. Па ако је Анин број x онда су и $x+1$ и $x-1$ делиоци броја 20. Такви бројеви су 3 и 1. Ако би имала број 1 једина могуцјност за Бојанин број била би 2 и она у првоји реценици неби рекла да не зна Бојанин број. Ана је добила броји 3.

4 Категорија - 7. и 8. разред

Задатак 1. Четири чоколадне табле коштају 6е више него што кошта једна чоколадна табла. Колико кошта једна чоколадна табла?

А) 1€ **Б)** 2€ **В)** 3€ **Г)** 4€ **Д)** 5€

Тачан одговор: Б

Решење. Једачина из које можемо добити вредност једне табле је: $4x = x + 6$, одакле је $x = 2$ евра.

Задатак 2. $11,11$ - $1,111$ =

А) $9,009$ **Б)** $9,0909$ **В)** $9,99$ **Г)** $9,999$ **Д)** 10

Тачан одговор: Г

Решење. Одузмимо ова два броја. Њихова разлика је 9,999.

Задатак 3. Сат стоји на столу, окренут на горе, тако да је казаљка која показује минуте усмерена ка североистоку. Колико минута треба да прође док казаљка која показује минуте не буде први пут била усмерена ка северозападу?

А) 45 **Б)** 40 **В)** 30 **Г)** 20 **Д)** 15

Тачан одговор: А

Решење. Како је угао између североисточне и северозападне позиције 270^o , а угао од 360^o одговара времену од 60 минута, следи да дати угао одговара времену од 45 минута (270 : 360 = x : 60 . Дакле, x = 45).

Задатак 4. Марија има маказе и пет слова од картона. Она сече свако слово тачно једном (по правој линији), тако да се добије што је могуће више делова. Од ког слова ће добити највише делова?

А) O **Б)** F **В)** S **Г)** H **Д)** M

Тачан одговор: Д

Решење. Оптимална сечења сваког слова су приказана на слици, са које се види да слово O можемо да пресечемо на 2 дела, слова F, S, H на по 4 дела, и слово M на 5 делова.

Задатак 5. Змај има пет глава. Сваки пут када му се одсече једна глава, њему израсте пет нових. Колико ће глава имати змај након што му се одсече шест глава?

А) 25 **Б)** 28 **В)** 29 **Г)** 30 **Д)** 35

Тачан одговор: В

Решење. После једног сечења, змај је ,,у добитку” за $-1+5=4$ главе. После 6 сечења, змај ће имати још $6\cdot 4$ главе, значи укупно $5+24=29$.

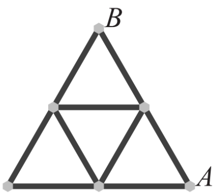
Задатак 6. У ком од следећих израза се уместо броја 8 може узети било који други позитиван број (број 8 се свуда где се јавља у изразу замењује истим бројем) тако да се вредност израза не промени?

А) $(8+8):8+8$ **Б)** $8\cdot(8+8):8$ **В)** $8+8-8+8$
Г) $(8+8-8)\cdot 8$ **Д)** $(8+8-8):8$

Тачан одговор: Д

Решење. Ако у изразима заменимо 8 са неким природним бројем k, добићемо:
а) $(k+k):k+k=2k:k+k=2+k$, што зависи од k (нема исту вредност за све позитивне бројеве)
б) $k\cdot(k+k):k=k\cdot 2k:k=2k$, што такође зависи од k
ц) $k+k-k+k=2k$, што зависи од k
д) $(k+k-k):k=k:k=1$, што не зависи од k.

Задатак 7. Свака од девет стаза у парку је дугачка 100 м. Ана жели да иде од тачке А до тачке Б тако да не иде истом стазом два пута. Колика је дужина најдуже маршруте коју она може изабрати?

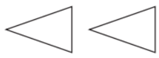


А) 900 m **Б)** 800 m **В)** 700 m **Г)** 600 m **Д)** 400 m

Тачан одговор: Б Очигледно први корак можемо извести на два начина,односно മоземо ићи путањом од A до L или од A до K.Ако би ишли првом путањом дакле од A до L простим пребројавањем свих могућих случајева видимо да је се најдужа путања састоји од 6 стаза односно најдужа путања у овом случају би била $600m$ један такав пример путање био био редом AL, LF, FK, KT, TF, FB.У другом случају тј.ако би нам први корак био од A до K тада би најдужа путања била сачињена од 7 стаза ,такав пример би био $AK, KL, LF, FK, KT, TF, FB$,па је маршрута дуга $700m$.

Решење.

Задатак 8. На слици су приказана два троугла.



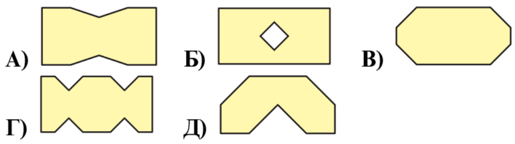
На колико начина се могу изабрати два темена, по једно на сваком троуглу, тако да права одређена тим теменима не прелази ни преко једног троугла?

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4 **Д)** више од 4

Тачан одговор: Г

Решење. Ако желимо да изаберемо праву, морамо да изаберемо два темена троуглова, једно из једног троугла, друго из другог, који је одређују. То можемо урадити на $3*3 = 9$ начина. Једноставном провером се види да само 4 од тих 9 правих задовољава услов да та права не прелази ни преко једног троугла.

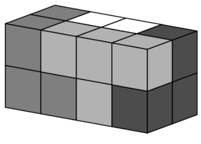
Задатак 9.Вукашин је пресавио лист папира као на слици и направио маказама два реза дуж правих линија. Који од следећих облика не може да буде резултат?

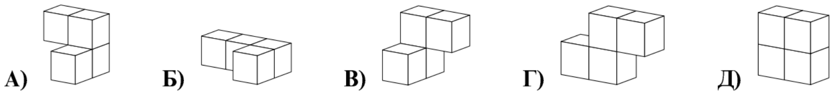


Тачан одговор: Г

Решење. Једним пресавијањем папира, прављењем 2 реза и враћањем папира у почетни положај, може се добити највише 4 реза. На слици Г постоје 8 резова, што је немогуће.

Задатак 10. Квадар је састављен од четири дела, као што је приказано на слици. Сваки део је обојен једном бојом и састоји се од четири коцке. Ког је облика бели део?





Тачан одговор: Г

Решење. Пошто се виде 2 коцке беле боје, остале две су у доњем реду који се не виде. Пошто се виде 3 тамно сиве коцке последња мора да се налази испод ближе беле коцке. Сва могућа решења отпадају сем слике под г).

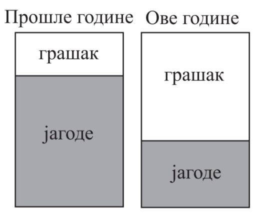
Задатак 11. Марко је формирао два четвороцифрена броја користећи цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Он жели да збир та два броја буде најмањи могућ. Који је најмањи могући збир ?

А) 2468 **Б)** 3333 **В)** 3825 **Г)** 4734 **Д)** 6912

Тачан одговор: В

Решење. Нека су цифре од којих је састављен неки четвороцифрен број A, B, C, D. Тада је вредност број управо $A \cdot 1000 + B \cdot 100 + C \cdot 10 + D \cdot 1$. Како имамо два четвороцифрена броја имамо два оваква израза, то јест, поред првог имамо још и $E \cdot 1000 + F \cdot 100 + G \cdot 10 + H \cdot 1$. Уколико саберемо ова два израза, добијамо $(A+E) \cdot 1000 + (B+F) \cdot 100 + (C+G) \cdot 10 + D + F$. Како овај израз треба да буде минималан, ставићемо да је $A + E = 1 + 2$. Одатле увиђамо како ће изгледати збир ова два броја, то јест, $B+F = 3+4$, $C+G = 5+6$, као и $D+F = 7+8$. Уколико израчунамо ове вредности у изразу изнад добијамо одговор 3825.

Задатак 12. Господин Живић сади грашак и јагоде. Ове године је променио део баште правоугаоног облика у коме сади грашак продужавајући једну страницу за 3 m и добио квадратни облик. Као резултат те промене површина дела баште под јагодама се смањила за 15 m^2. Колика је била површина дела баште под грашком пре промене?



А) $5\,\mathrm{m}^2$ **Б)** $9\,\mathrm{m}^2$ **В)** $10\,\mathrm{m}^2$ **Г)** $15\,\mathrm{m}^2$ **Д)** $18\,\mathrm{m}^2$

Тачан одговор: В

Решење. Како се дужина парцеле под грашком повећала за 3 m, а површина дела под јагодама се смањила за 15 m^2, односно површина дела под грашком се повећала за 15 m^2. Одавде се може закључити да је ширина парцеле $\frac{15m^2}{3\ m} = 5\ m$. Како је након промене парцела под грашком била квадратног облика, обе њене странице биће једнаке 5 m, па је површина нове парцеле под грашком $(5\ m)^2 = 25\ m^2$. Одатле се добија да је површина парцеле под грашком пре повећања била $25\ m^2 - 15\ m^2 = 10\ m^2$.

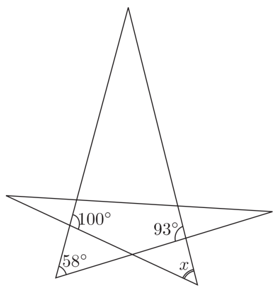
Задатак 13. Бојана жели да комплетира дијаграм уписујући три броја, по један у свако празно поље. Она жели да збир прва три броја буде 100, да збир три средња броја буде 200 и да збир последња три броја буде 300. Који број Бојана треба да упише у поље на средини дијаграма?

А) 50 **Б)** 60 **В)** 70 **Г)** 75 **Д)** 100

Тачан одговор: Б

Решење. Нек су на 2. 3. и 4. месту уписани бројеви a, b и c. знамо да је $10 + a + b = 100$, $a+b+c = 200$, $b+c+130 = 300$. $b = 10+a+b+b+c+130-a-b-c-10-130 = 300+100-200-130-10 = 60$.

Задатак 14. Одредити x на слици.



А) 35° **Б)** 42° **В)** 51° **Г)** 65° **Д)** 109°

Тачан одговор: Б

Решење. Тражени угао помоћу једнакости које важе за збир углова у троуглу и суплементне углове можемо добити из једначине: $x = 180-(180-93+180-(180-100+58))$, одакле је $x = 51$ степен.

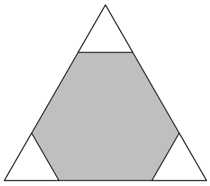
Задатак 15.На свакој од четири карте са једне стране је написан број, а са друге особина броја. Четири написане особине су: "дељив са 7","прост", "непаран", "већи од 100", а четири написана броја су: 2; 5; 7 и 12. На свакој карти написани број не задовољава особину написану са друге стране. Који број је написан на карти на којој пише "већи од 100"?

А) 2 **Б)** 5 **В)** 7 **Г)** 12 **Д)** Не може се одредити.

Тачан одговор: В

Решење. Посматрајмо број 7. Он је непаран, дељив са 7 и прост, па је самим тим он написан на јединој преосталој картици, а то је картица "већи од 100".

Задатак 16. Три мала једнакостранична троугла исте величине су одсечена на угловима великог једнакостраничног троугла странице дужине 6 cm, као што је приказано на слици. Збир обима три мала троугла је једнак обиму сивог шестоугла. Колика је дужина странице малих троуглова?



А) 1 cm **Б)** 1, 2 cm **В)** 1, 25 cm **Г)** 1, 5 cm **Д)** 2 cm

Тачан одговор: Г

Решење. Нека је страница малог троугла a. Означимо са O_T обим малог троугла (O_T=3a), а обим шестоугла O_6 (O_6 = 3a + 3b). По услову задатка је 3$\cdot$ O_T = O_6, одн. 9 a = 3 a + 3 b, следи b = 2 $\cdot$ a. Поред тога, $2a + b = 6$, одакле је $a = 1,5cm$.

Задатак 17. Комад сира је био исечен на велики број комада. Током дана лењи мачак Гингер је посматрао како су бројни мишеви дошли и украли неке парчиће сира. Гингер је приметио да је сваки миш украо различити број парчића, али сваки мање од 10 и да ниједан миш није украо два пута више парчића од било код другог миша. Који је највећи број мишева које је Гингер могао да види како краду сир?

А) 4 **Б)** 5 **В)** 6 **Г)** 7 **Д)** 8

Тачан одговор: В

Решење. Мишеви ће редом да једу природне бројеве парчића сира, при томе прескачући парне бројеве од којих се већ појавио дупло мањи број. Дакле, то су бројеви $1, 3, 4, 5, 7, 9$, односно 6 мишева је крало сир.

Задатак 18. Покретна трака на аеродрому је дугачка $500m$ и креће се брзином од $4km/h$. Ана и Бранко су стали на почетак покретне траке у истом тренутку. Ана се на траци креће брзином од $6km/h$, док Бранко стоји. Колико ће Ана бити удаљена од Бранка у моменту када она дође на крај траке?

А) 100 m **Б)** 160 m **В)** 200 m **Г)** 250 m **Д)** 300 m

Тачан одговор: Д

Решење. Нађимо време t после кога ће се Ана наћи на крају траке. Она се креће брзином од $6 + 4 = 10km/h$ (њена брзина+брзина степеница) и прелази растојање од $0, 5km$. Пошто је $t = s/v$, налазимо да је тражено време једнако $0, 05h$. За то време, Бранко ће прећи $0, 05 \cdot 4 = 0, 2km$, те ће растојање између њих бити $500 - 200 = 300m$.

Задатак 19. Магични квадрат који говори има оригинално страницу дужине 8 cm. Ако каже истину, његова страница постаје 2 cm краћа. Ако лаже, његов обим се удвостручи. Он је изговорио четири реченице, од којих су две истините, а две неистините, у неком поретку. Који је највећи могући обим квадрата након тих изговорених реченица?

А) 28 cm **Б)** 80 cm **В)** 88 cm **Г)** 112 cm **Д)** 120 cm

Тачан одговор: Г

Решење. Почетни обим је $32cm$. Ако квадрат каже истину, обим му се смањи за $4 \cdot 2 = 8cm$, а ако слаже обим се повећа два пута. Његове четири изјаве можемо да "распоредимо" на 6 начина:

1. Нетачна, нетачна, тачна, тачна: нови квадрат има обим $O_1 = 32 \cdot 2 \cdot 2 - 8 - 8 = 128 - 16 = 112cm$.
2. Нетачна, тачна, нетачна, тачна: обим новог квадрата $O_1 = (32 \cdot 2 - 8) \cdot 2 - 8 = 104cm$.
3. Нетачна, тачна, тачна, нетачна: обим новог квадрата $O_1 = (32 \cdot 2 - 8 - 8) \cdot 2 = 96cm$.
4. Тачна, нетачна, нетачна, тачна: обим је $O_1 = (32 - 8) \cdot 2 \cdot 2 - 8 = 88cm$.
5. Тачна, нетачна, тачна, нетачна: обим је $O_1 = ((32 - 8) \cdot 2 - 8) \cdot 2 = 80cm$.
6. Тачна, тачна, нетачна, нетачна: обим је $O_1 = (32 - 8 - 8) \cdot 2 \cdot 2 = 64cm$.

Дакле, максималан обим је $112cm$.

Задатак 20. Коцка се котрља у равни тако што се окреће око ивица. Њена доња страна пролази позиције 1; 2; 3; 4; 5;6 и7, редом, као на слици. На којим двема од ових позиција се нашла иста страна коцке?

А) 1 и 7 **Б)** 1 и 6 **В)** 1 и 5 **Г)** 2 и 7 **Д)** 2 и 6

Тачан одговор: Б

Решење. Доказаћемо доказаћемо да се истра страна коцке нашла на позицији 1 и 6 и да је та страна $ABCD$. Нека је дата коцка $ABCDEFGH$ обелезимо страну $ABCD$ са 1 то је уједно и основна ивица дате коцке,затим нека су $2, 3, 4, 5, 6$ ознаке за стране $ADHE, BCGF, ABFE, DCGH, EFGH$ редом.Даље према горњом слици после два потеза тј.кад се коцка нађе на квадрату означеним бројем 2 тј.на позиција 2 тада ће страна $ABCD$ коцке доћи на месту где је првобитно била страна 2 односно $ADHE$,даље када се коцка нађе у позицији 3 онда це страна $ABCD$ бити на месту где је у почетној позиција била страна 6 односно $EFGH$.Затим када се коцка нађе у позицији 5 тада ће страна $ABCD$ бити на месту где је у поцетној позицији била страна 5 односно $DCGH$,даље ако посматрамо слику из задатка очигледно да при преласку из позиције 5 у позицију 6 страна $ABCD$ мора наци на месту где је првобитно она и сам била тј.страна $ABCD$ постаје основна страна коцке у позиција 1 и 6,одакле следи тврђење задатка.

Задатак 21. Адам има 5 коцки. Када их распореди од најмање до највеће разлика између било које две сустедне је 2 cm. Највећа коцка је висока колико и кула направљена од две најмање коцке. Колико је висока кула направљена од свих пет коцки?

А) 6 cm **Б)** 14 cm **В)** 22 cm **Г)** 44 cm **Д)** 50 cm

Тачан одговор: Д

Решење. Обележимо са a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 висине коцки које су поређане у растућем поретку ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$). У задатку је речено да је:

$$a_1 + 2 = a_2$$

$$a_2 + 2 = a_1 + 4 = a_3$$

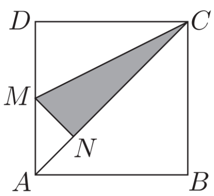
$$a_3 + 2 = a_1 + 6 = a_4$$

$$a_4 + 2 = a_1 + 8 = a_5.$$

Такође, знамо да је: $a_1 + a_2 = a_5$, па можемо израчунати да је: $a_1 + a_1 + 2 = a_1 + 8$, односно: $a_1 = 6$.

Сума је $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_1 + 2 + a_1 + 4 + a_1 + 6 + a_1 + 8 = 5a_1 + 20 = 50$.

Задатак 22.На слици $ABCD$ је квадрат, M је средиште дужи AD и MN је нормало на AC. Који је однос површине сивог троугла MNC према површини квадрата?



А) $1:6$ **Б)** $1:5$ **В)** $7:36$ **Г)** $3:16$ **Д)** $7:40$

Тачан одговор: Г

Решење. Нека је a страница квадрата $ABCD$, и нека је X пресек дијагонала AC и BD. Из питагорине теореме примењене на троуглове AXD, AXB, BXC, DXC и MDC добијамо: $DX = XB = XA = XC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и да је $MC = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Како је M средиште странице AD, одатле следи да је $MN = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Сада можемо израчунати следеће: $NC^2 = MC^2 - MN^2 = \frac{5a^2}{4}$. Површина троугла MNC се израчунава као $P(MNC) = \frac{MN \cdot NC}{2} = \frac{3a^2}{16}$, а површина квадрата $ABCD$ је a^2. Из добијеног следи да је однос површина једнак $3:16$.

Задатак 23. Танго се игра у паровима, сваки пар чине један мушкарац и једна жена. На балу је било присутно не више од 50 људи. У једном моменту је $\frac{3}{4}$ мушкараца играло са $\frac{4}{5}$ жена. Колико људи је играло у том моменту?

А) 20 **Б)** 24 **В)** 30 **Г)** 32 **Д)** 46

Тачан одговор: Б

Решење. Ако је $x + y =< 50$ и $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{4}{5} \cdot y$ следи да је $15 \cdot x = 16 \cdot y$. Следи да x мора бити дељив са 16 и y дељив са 15. Одакле је $x = 16$ и $y = 15$ јер би иначе био збир барем 2 пута већи и онда би збир био барем 62 што је контрадикторно услову. Па је укупан број људи који су плесали $\frac{3}{4} \cdot 16 + \frac{4}{5} \cdot 15 = 24$.

Задатак 24. Давид жели да распореди бројеве од 1 до 12 по кружници тако да се суседни бројеви увек разликују или за 2 или за 3. Који бројеви морају бити суседни?

А) 5 и 8 **Б)** 3 и 5 **В)** 7 и 9 **Г)** 6 и 8 **Д)** 4 и 6

Тачан одговор: Г

Решење. Након мало разматрања уочавамо да се око броја 1 морају наћи само бројеви 3 и 4. Такође, око броја 12 се морају наћи само бројеви 9 и 10. Довољно је да направимо један такав распоред и видимо да ли неки од понуђених одговора могуће пронаћи међу свим паровима пронађене комбинација. Једина комбинација која се појављује је управо 4 и 6.

Задатак 25. Неки троцифрени бројеви имају следећу особину: ако се обрише прва цифра броја, добија се потпуни квадрат; ако се уместо ње обрише последња цифра броја, опет се добија потпуни квадрат. Колики је збир свих троцифрених бројева са овом особином?

А) 1013 **Б)** 1177 **В)** 1465 **Г)** 1993 **Д)** 2016

Тачан одговор: Г

Решење. Како су ова два потпуна квадрата добијена брисањем једне цифре троцифрених броја, они морају бити двоцифрени. Двоцифрени потпуни квадрати су: $16, 25, 36, 49, 64, 81$. Такође, мора важити да је последња цифра првог квадрата једнака првој цифри другог квадрата. Уколико је први квадрат 25 или 49, онда други квадрат мора почињати цифром 5, односно 9, што је немогуће. Када је први квадрат једнак 16 или 36, други мора бити 64. Када је први квадрат 64, други мора бити 49, док, ако је први квадрат 81, други мора бити 16. Одавде се може закључити да су троцифрени бројеви који задовољавају услове задатка $164, 364, 649$ и 816, а њихов збир је 1993.

Задатак 26. Књига има 30 прича, од којих свака почиње на новој страни. Дужине прича су 1, 2, 3,.., 30 страна. Прва прича почиње на првој страни. Који је највећи број прича које могу почињати на странама са непарним бројем?

А) 15 **Б)** 18 **В)** 20 **Г)** 21 **Д)** 23

Тачан одговор: Д

Решење. Ако прица има непаран број страница следећа прича почиње на страници разилиците парности од предходне, а ако је број страница непаран онда на страници која је исте парности као и почетна страница предходне приче. Прва прица поциње непарним бројем. Ако би првих 15 прича имале паран број страница оне би све почињале на непарној страници. 16., 17., .. 30. прица би имале непаран број страница па би свеака друга почињала непарним бројем. Па како 16. почиње непарним бројем број прича које поцињу на непарноји страници почев од 16. до 30. је $\frac{15+1}{2} = 8$. Укупно има 23 прича које поцињу непарном страницом. јасно је да је ово највећи број јер свака прича непарне дужине мења парност почетне странице док парне дужине не мења. Па је број прича које имају непаран број страница и почињу парним бројем је 8 без обзира на нацин на који их распоредимо. Јасно је да ресење не мозе да буде веце од 8Ђ15 јер је преостало 15 прица и ресење је највеће ако све оне почињу непарним бројем.

Задатак 27. Једнакостранични троугао стартује из дате позиције и креће се до нове позиције низом корака. У сваком кораку се ротира око центра, прво за $3°$ затим за $9°$ онда за $27°$ и тако даље (у н-том кораку се ротира за $(3^n)°$. Колико ће укупно различитих позиција, укључујући и стартну позицију, троугао при том кретању заузети? (Две позиције се сматрају истом ако троугао покрива исти део равни.).

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 360

Тачан одговор: Б

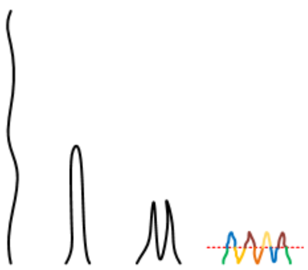
Решење. Да би се нашао у почетној позицији, троугао се мора ротирати за $120x$ степени, где је x неки природан број. Очито је да се први такав случај дешава када се троугао ротира четири пута, јер је $3 + 9 + 27 + 81 = 120$.

Задатак 28. Канап је пресавијен на пола, затим опет на пола, и још једном на пола. Након тога канап је пресечен и тако је добијено неколико делова. Дужине два од тих делова су $4m$ и $9m$. Која од следећих дужина не може представљати дужину целог канапа?

А) 52 m **Б)** 68 m **В)** 72 m **Г)** 88 m **Д)** све вредности су могуће

Тачан одговор: В

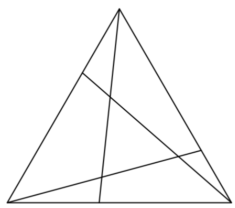
Решење. Током савијања канап ће имати облике попут облика на слици. Приметимо да током сечења канапа се добија више делова, који могу имати три различите дужине(на слици су делови различитих дужина обојени трима различитим бојама).



Означимо дужину жутог дела $a \in \mathbb{R}^+$, дужину црвеног дела $b \in \mathbb{R}^+$ и дужину зеленог дела $c \in \mathbb{R}^+$. Важи да је део канапа обојен зеленом бојом дупло дужи од дела канапа обојеног жутом бојом, тј. $c = 2a$. Из услова задатка следи да су 2 од ових 3 ралзличитих дужина

једнаке вредностима $4m$ и $9m$. Па одатле, следи да ако $s \in \mathbb{N}$ представаља дужину штапа може имати следеће вредности:
1)$a = 9m$ и $b = 4m$, тада је дужина канапа једнака $s = 8 \cdot a + 4 \cdot b = 88$
2) $a = 4m$ и $b = 9m$, тада је дужина канапа једнака $s = 8 \cdot a + 4 \cdot b = 68$
3) $b = 4m$ и $c = 9m$, тада је дужина канапа једнака $s = 4 \cdot b + 4 \cdot c = 52$
4) $b = 9m$ и $c = 4m$, тада је дужина канапа једнака $s = 4 \cdot b + 4 \cdot c = 52$
Пошто су наведене све могуће вредности дужине канапа, следи да од понуђених вредности дужина штапа не може бити $72m$, па је тачан одговор под В.

Задатак 29. Троугао је са три дужи подељен на четири троугла и три четвороугла. Збир обима три четвороугла је 25 cm, а збир обима четири троугла је 20 cm. Обим целог троугла је 19 cm. Колики је збир дужина три дужи којима је подељен троугао?



А) 11 cm **Б)** 12 cm **В)** 13 cm **Г)** 15 cm **Д)** 16 cm

Тачан одговор: В

Решење. Нека је O_4 сума обима четвороуглова, O_3 сума обима малих троуглова, O_T обим великог троугла, а l тражена дузина. Тада је $O_4 + O_3 = O_T + 2 \cdot l$, одн. $25 + 20 = 19 + 2 \cdot l$. Следи да је $l = 13$ cm.

Задатак 30. У свако поче мреже 3×3 на слици уписан је по један позитиван број, тако да важи: производ три броја из сваке врсте и сваке колоне је једнак 1; производ 4 броја у сваком квадрату 2×2 је једнак 2. Који број треба уписати у централно поље?

А) 16 **Б)** 8 **В)** 4 **Г)** $\frac{1}{4}$ **Д)** $\frac{1}{8}$

Тачан одговор: А

Решење. Обележићемо бројеве у овој мрежи на следећи начин:

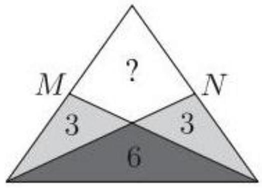
a_1	a_2	a_3
b_1	b_2	b_3
c_1	c_2	c_3

Када помножимо бројеве у свим квадратима 2×2, добијамо $2^4 = 16 = (a_1 \cdot a_2 \cdot b_1 \cdot b_2) \cdot (a_2 \cdot a_3 \cdot b_2 \cdot b_3) \cdot (b_1 \cdot b_2 \cdot c_1 \cdot c_2) \cdot (b_2 \cdot b_3 \cdot c_2 \cdot c_3) = a_1 \cdot a_2^2 \cdot a_3 \cdot b_1^2 \cdot b_2^4 \cdot b_3^2 \cdot c_1 \cdot c_2^2 \cdot c_3$ Када поделимо овај производ са врстом $b_1b_2b_3 = 1$ и колоном $a_2b_2c_2 = 1$, добијамо $16 \div (1^2) = 16 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot b_1 \cdot b_2^2 \cdot b_3 \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3$. Да би добили b_2, из овог производа требају да нестану $a_1, a_2, a_3, b_1, b_3, c_1, c_2, c_3$. То ћемо добити дељењем тренутног производа са врстама $a_1a_2a_3 = 1$, $b_1b_2b_3 = 1$, $c_1c_2c_3 = 1$, и тиме добијамо да је $16 = b_2$

---

5 Категорија - 9. и 10. разред

Задатак 1. На слици је приказан једнакокраки троугао. Тачке M и N си средишта једнаких страница. Троугао је двема правим линијама подељен на четири области. Површине три од тих области су 3,3 и 6, као што је приказано. Колика је површина четврте области?



А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 7

Тачан одговор: Г

Решење. Означимо темена троугла словима A, B, C. Из услова задатка је $AM = CM$, те је површина троуглова ABM и CBM једнака зато што имају заједничку висину. Одатле следи да је тражена површина $9 - 3 = 6$.

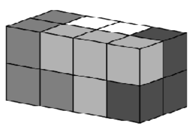
Задатак 2. $11,11 - 1,111 =$

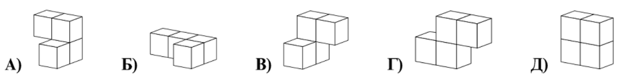
А) $9,009$ **Б)** $9,0909$ **В)** $9,99$ **Г)** $9,999$ **Д)** 10

Тачан одговор: Г

Решење. $11,11 - 1,111 = 11,110 - (1,110 + 0,001) = 11,110 - 1,110 - 0,001 = 10 - 0,001 = 9,999$

Задатак 3. Квадар је састављен од четири дела, као што је приказано на слици. Сваки део је обојен једном бојом и састоји се од четири коцке. Ког облика је бели део?





Тачан одговор: Г

Решење. За два дела видимо све четири коцке које је граде, осим за једну (најближу нама) за коју видимо само три дела. Уколико би и трећи део знали цео, могли би јединствено да одредимо тражени део. Међутим, то нам заправо и није потребно. Посматрајмо теме, односно коцку у темену коју не видимо (темена има 8 а ми са слике видимо само њих 7).

Оно припада траженом делу и то је једина коцка са задње стране које припада нашем делу. Посматрајућ две беле коцкице које видимо, оне су "изнад" коцке у темену, па да би их спојили морам додати још једну коцку, последњу за тај део. То је могуће урадити на само један начин, а то је управо могућност Г.

Проблем се може урадити и системом елиминације - једноставно разматрамо сваки понођени део и покушамо да исти поставимо на тражену позицију. Ово је можа и бољи приступ проблему, јер смо горе користили чињеницу да су коцкице из дела спојене (што формлано није наведене у самој поставци проблема).

Задатак 4. Када Анка шаље поруку Бори она користи следећи систем, који је Бори познат. За свако слово у поруци, она најпре слово преводи у број: $A = 01$, $B = 02$, $C = 03$, . . . , $Z = 26$, а затим тај број множи са 2 и додаје му 9. Бори шаље низ резултата. Јутрос је Бора добио низ $25 - 19 - 45 - 38$. Која је била оригинална порука?

А) HERO **Б)** HELP **В)** HEAR **Г)** HERS **Д)** Анка је направила грешку.

Тачан одговор: Д

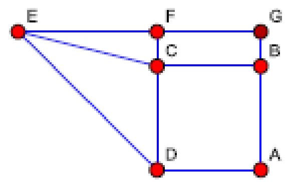
Решење. Решење је да је Анка направила грешку. Зашто? Кодови слова се множе са 2 и додаје им се 9. То значи да сваки резултат који се добије мора бити непаран број. Ако се погледа порука коју је Бора добио, може се видети да су сви бројеви непарни, осим 38. Дакле, Анка је направила грешку.

Задатак 5.Дужина странице квадрата $ABCD$ је $4cm$. Квадрат има исту површину као и троугао DCE. Колико је растојање тачке E од праве g?

А) 8 cm **Б)** $(4+2\sqrt{3})$ cm
В) 12 cm **Г)** $10\sqrt{2}$ cm **Д)** Зависи од положаја тачке E.

Тачан одговор: B

Решење.



Нека су F и G подножја нормала из тачке E на CD и AB, респективно. Из услова задатка следи да је $P(CDE) = \frac{CD \cdot EF}{2} = P(ABCD) = 16cm^2$. Одатле добијамо $EF = 8cm$. Лако се уочава да је $FG = AD = 4cm$. Растојање тачке E од праве g је $EF + FG = 12cm$.

Задатак 6. Збир цифара седмоцифреног броја је 6. Колики је производ његових цифара?

А) 0 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$ **Д)** 5

Тачан одговор: А

Решење. Ако је збир цифара седмоцифреног броја 6 онда барем једна цифра мора бити једнака нули, па је њихов производ једнак нули.

Задатак 7. Дужине катета правоуглог троугла ABC су $6cm$ и $8cm$. Тачке K, L и M су средишта страница троугла. Одредити обим троугла KLM.

А) 10 cm **Б)** 12 cm **В)** 15 cm **Г)** 20 cm **Д)** 24 cm

Тачан одговор: Б

Решење. Како су K, L, и M тачке које се налазе на средини страница, тада су странице троугла KLM заправо средње линије почетног троугла. Према Питагориној теореми $c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, па је $c = 10$. Обим почетног троугла је $O = 6 + 8 + 10 = 24$, а обим троугла KLM је пола од тога, јер је свака страница половина неке од страница трогла ABC, па је решење 12.

Задатак 8. У четири од датих израза се број 8 може заменити било којим другим позитивним бројем (број 8 се свуда где се јавља у изразу замењује истим бројем) тако да вредност остане иста. Који израз нема то својство?

А) $(8+8-8):8$ **Б)** $8+(8:8)-8$ **В)** $8:(8+8+8)$
Г) $8-(8:8)+8$ **Д)** $8\cdot(8:8):8$

Тачан одговор: Г

Решење. Ако уместо броја 8, у дате изразе заменимо позитивну променљиву x, вредност тих израза биће, редом, $1, 1, \frac{1}{3}, 2x-1, 1$. Оигледно, једини израз који мења вредност за различите вредности променљиве x јесте $2x-1$.

Задатак 9. Дужине двеју страница четвороугла су једнаке 1 и 4. Једна дијагонала има дужину 2 и дели четвороугао на два једнакокрака троугла. Одредити обим четвороугла.

А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 11 **Д)** 12

Тачан одговор: Г

Решење. Нека су темена датог четвороугла A, B, C и D. без умањења опстости моземо да претпоставимо да је $AB = 4$ и $AC = 2$ дијагонала која дели тај четвороугао на две једнакокрака троугла. Како из услова важи да је троугао ABC једнакокраки мора важити $AB = BC$ или $BC = CA.AC = BC = 2$ и $AB = 4$ не задовољава неједнакост троугла па је $AB = BC = 4$.Слично ако је $AD = CD = 1$ не би била задовољена неједнакост троугла па су странице AD и CD дужине 1 и 2 у неком редоследу. Обим четвороугла је $O = AB + BC + CD + DA = 4 + 4 + 2 + 1 = 11$.

Задатак 10. Сваки од бројева 144 и 220 је подељен природним бројем N и остатак у оба случаја је 11. Одредити N.

А) 7 **Б)** 11 **В)** 15 **Г)** 19 **Д)** 38

Тачан одговор: Г

Решење. На основу текста задатка имамо једначине: $144 = N \cdot x + 11$ и $220 = N \cdot y + 11$. Одатле се добија $x = 133/N$ и $y = 209/N$. Пошто су x и y природни бројеви, бројеви 133 и 209 морају бити дељиви са N. Растављањем броја 133 на просте факторе добијамо да N може бити 1, 7, 19 или 133. Када то исто учинимо и са 209, добијамо да је 19 једини број који је фактор и код 133 и код 209, па је $N = 19$.

Задатак 11. Ако Адам стоји на столу а Марко на поду, онда је Адам виши $80cm$ од Марка. Ако Марко стоји на том истом столу а Адам на поду, онда је Марко виши $1m$ од Адама. Колика је висина стола?

А) 20 cm **Б)** 80 cm **В)** 90 cm **Г)** 100 cm **Д)** 120 cm

Тачан одговор: В

Решење. Нека је висина Адама $a \in \mathbb{R}^+$, висина Марка $m \in \mathbb{R}^+$, а висина стола $s \in \mathbb{R}^+$. Тада важи : $a + s - m = 80cm$ и $m + s - a = 100cm$. Решавајући овај систем једначина добија се да је дужина стола $s = 90cm$.

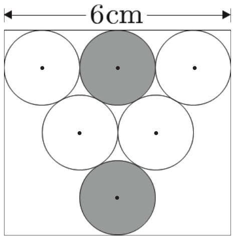
Задатак 12. Драган и Мара су бацали новчић. Ако новчић падне на главу, победник је Мара и Драган мора да јој да 2 бомбоне. Ако новчић падне на писмо, победник је Драган и Мара мора да му да 3 бомбоне. Након 30 бацања новчића обоје су имали онолико бомбона колико су имали на почетку игре. Колико пута је Драган победио?

А) 6 **Б)** 12 **В)** 18 **Г)** 24 **Д)** 30

Тачан одговор: Б

Решење. Нека је почетан број новчића које су имали Драган и Мара x и y, редом. Када новчић падне на главу, Драган има $x{-}2$, а Мара $x{+}2$ новчића, а када падне на писмо, Драган ће имати $x{+}3$, а Мара $y{-}3$ новчића. Означимо број бацања када је новчић пао на главу g, а када је пао на писмо p. Пошто је укупан број бацања 30, имамо систем једначина:
$p + g = 30$
$x - 2g + 3p = x$
$y + 2g - 3p = y$. Решавајући овај систем добијамо да је $p = 12$. Дакле, Драган је победио 12 пута.

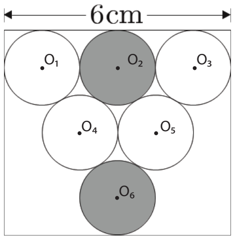
Задатак 13. Правоугаоник ширине $6cm$ ограђује "једнакокраки троугао" од кругова који се додирују, као што је приказано на слици. Наћи најмање растојање између два сива круга?



А) 1 cm **Б)** $\sqrt{2}$ cm **В)** $(2\sqrt{3}-2)$ cm **Г)** $\frac{\pi}{2}$ cm **Д)** 2 cm

Тачан одговор: В

Решење.



Обележићемо центре тих кругова са $O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6$, као на слици. Приметимо да је $O_2O_4O_5O_6$ делтоид састављен од два једнакостранична троугла ($\Delta O_2O_4O_5$ и $\Delta O_4O_5O_6$). Растојање између O_2 и O_6 једнако је збиру висина та два троугла. Странице тих троуглова једнаке су двоструком полупречнику сваког од кругова. Пошто из услова задатка имамо да је $6r = 6cm$, добијамо $r = 1cm$. Дакле, $|O_2O_6| = 2 \cdot \frac{2r\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$, али пошто се тражи најмање растојање између кругова (а не између њихових центара), од добијеног растојања центара одузимамо још $2r$, па је крајње решење $(2\sqrt{3}-2)cm$

Задатак 14. У Банетовој соби се налазе четири сата. Сваки од сатова или касни или жури. На првом сату време се разликује од тачног за 2 минута, на другом за 3 минута, на трећем за 4 минута и на четвртом за 5 минута. Једног дана Бане је желео да зна тачно време. Сатови су тада показивали 6 минута до 3, 3 минута до 3, 3 и 2 минута и 3 и 3 минута. Које је тачно време било тада?

А) 3.00 **Б)** 2.57 **В)** 2.58 **Г)** 2.59 **Д)** 3.01

Тачан одговор: Г

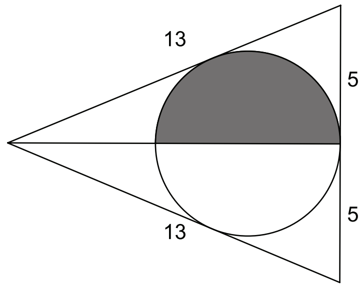
Решење. Имамо неку од следећих могућности: прва два сата оба журе, а друга два касне или обрнуто, прва два касне, а друга два журе. Разлика међу временима које показују прва два је 3 мин. Једина таква разлика јавља се код кашњења од 2 мин и 5 мин, тако да можемо закључити да је сат који касни 5 минута управо онај који показује време 2.54, стога је јасно да је тачно време 2.59.

Задатак 15. На слици је приказан правоугли троугао са страницама дужина 5, 12 и 13. Колики је полупречник уписаног полукруга?

А) 7/3 **Б)** 10/3 **В)** 12/3 **Г)** 13/3 **Д)** 17/3

Тачан одговор: Б

Решење. Ако пресликамо овај троугао у односу на дужу катету, добићемо једнакокраки троугао чији краци су дужине 13, а основица дужина 10. Полупречник круга уписаног у тај троугао је $r = \frac{P}{s} = \frac{\frac{10\cdot 12}{2}}{\frac{10+13+13}{2}} = \frac{10\cdot 12}{36} = \frac{10}{3}$, што је једнако полупречнику траженог полукруга.



Задатак 16. Колико има четвороцифрених бројева код којих је цифра стотина 3 и збир осталих цифара такође једнак 3 ?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5 **Д)** 6

Тачан одговор: Д

Решење. Дати четвороцифрени број је облика $\overline{x_1x_2x_3x_4}$,где је $x_i \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ за $i = \{3, 4\}$, и $x_1 \in \{1, 2, \cdots, 9\}$ и $x_2 = 3$. Даље како по услову задатка мора да буде $x_1 + x_4 + x_3 = 3$ закључујемо да ови бројеви морају бити мањи или једнаки од 3 и већи или једнаки од 0. Разликујемо следеће случајеве.

- Први случај кад је $x_1 = 3$ онда је $x_3 = x_4 = 0$.
- Други случај кад је $x_1 = 1$ онда може да буде $x_3 = x_4 = 1$.
- Трећи случај кад је $x_1 = 1$ онда може да је један од бројева x_3 или x_4 да буде 2 ,а други 0.
- Четврти случај кад је $x_1 = 2$ онда може један од бројева x_3 или x_4 да буде 1,а други 0.

Сада на основу ових случајева простим збрајањем добијамо да укупно има $1 + 1 + 2 + 2 = 6$ четвороцифрених бројева.

Задатак 17. Кенгур у пољаа мреже 4 3 уписује 12 бројева од 1 до 9, тако да збир бројева у свим врстама буде исти и да збир бројева у свим колонама буде исти. Неки бројеви су већ уписани, као на слици. Који број ће бити уписан у сиво поље?

2	4		2
	3	3	
6		1	

А) 1 **Б)** 4 **В)** 6 **Г)** 8 **Д)** 9

Тачан одговор: Б

Решење. Обележимо поља: (1, 3) са a, (2, 1) са b, (2, 4) са c, (3, 2) са d и (3, 4) са x. Нека је збир по колонама K, а збир по врстама V. Пошто је укупан збир у таблици увек исти, важи да је: $3V = 4K$. Можемо написати следеће једнакости за врсте:

$$8 + a = V \text{ , па је } a = V - 8$$

$$b + c + 6 = V \text{ , па је } b + c = V - 6$$

$$d + x + 7 = V \text{ , па је } d + x = V - 7$$

Сличне једнакости важе и за колоне:

$$b + 8 = K, \text{ , па је } b = K - 8$$

$$d + 7 = K \text{ , па је } d = K - 7$$

$$a + 4 = K \text{ , па је } a = K - 4$$

$$c + x + 2 = K \text{ , па је } c + x = K - 2$$

.

Ако изједначимо вредности променљиве a, онда је: $V - 8 = K - 4$, сада је: $V - K = 8 - 4$. Ако помножимо обе стране са 3, добићемо: $3V - 3K = 12$, па је $4K - 3K = 12$, односно $K = 12$. Из тога се може израчунати $V = 16$. Број d је, из друге једнакости за колоне, једнак $d = 12 - 7 = 5$. Ако се то замени у последњу једнакост за врсте, можемо израчунати да је $x = 4$.

Задатак 18. Три атлетичара Коста, Горан и Рале су учествовали у маратонској трци. Пре трке су четворица гледалаца коментарисала њихове шансе. Први је рекао: Победиће или Коста или Горан. Други је рекао: Ако Горан буде други, онда ће Рале да победи. Трећи је рекао: Ако Горан буде трећи, онда Коста неће да победи. Четврти је рекао: Други ће бити или Горан или Рале. После трке се испоставило да су све четири изјаве биле тачне. Коста, Горан и Рале су била тројица најбољих у трци. У ком поретку су они завршили трку?

А) Коста, Горан, Рале **Б)** Коста, Рале, Горан **В)** Рале, Горан, Коста
Г) Горан, Рале, Коста **Д)** Горан, Коста, Рале

Тачан одговор: Г

Решење. Из прве изјаве имамо две могућности. Прва могућност је да је трку први заврсио Коста, а друга могућност је да је трку први завршио Горан. Из друге изјаве можемо закључити да Горан не може да буде други. Одатле следе три могућности.

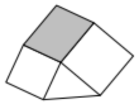
Прва: Коста први, Рале други, Горан трећи.

Друга: Горан први, Рале други, Коста трећи.

Трећа: Горан први, Рале други, Коста трећи.

Трећа изјава искључује прву могућност, а четврта изјава искључује трећу могућност. Дакле, друга могућност је тачна.

Задатак 19. На слици је приказана фигура која се састоји од два квадрата чије странице имају дужине $4cm$ и $5cm$, троугла површине $8cm^2$ и осенченог паралелограма. Колика је површина паралелограма?



А) 15 cm^2 **Б)** 16 cm^2 **В)** 18 cm^2 **Г)** 20 cm^2 **Д)** 21 cm^2

Тачан одговор: Б

Решење. Пошто угао при врху троугла у збиру са два угла од по 90 степени и са тупим углом паралелограма даје угао од 360 степени следи да је збир тупог угла паралелограма и угла при врху троугла једнак 180 степени па је угао при врху троугла једнак оштром углу паралелограма чије су странице $4cm$ и 5 цм. Такође су странице које граде угао при врху једнаке $4cm$ и $5cm$. Па се паралелограм може поделити дијагоналом тупог угла на два троугла која су једнака познатом троуглу. Површина траженог паралелограма је $2 \cdot 8cm^2 = 16cm^2$

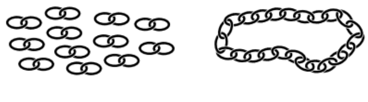
Задатак 20. Ања је написала $2012 = m^m \cdot (m^k - k)$ за неке природне бројеве m и k. Колико је k?

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 9 **Д)** 11

Тачан одговор: Г

Решење. Разбијмо 2012 на чиниоце, $2012 = 2 \cdot 2 \cdot 503$. Тада m никако не сме бити 1 јер једначина не би имала смисла. Самим тим, једина опција која нам преостаје је $m = 2$, тада је $2^k - k = 503$. Како важи да је $2^9 = 512$, решење је $k = 9$.

Задатак 21. Златар има 12 делова ланца, сваки од по две алке. Он жели да направи једну велику затворену огрлицу (види слику). Да би то урадио он мора да отвори неке алке (и да их касније затвори). Који је најмањи број алки које златар мора да отвори?

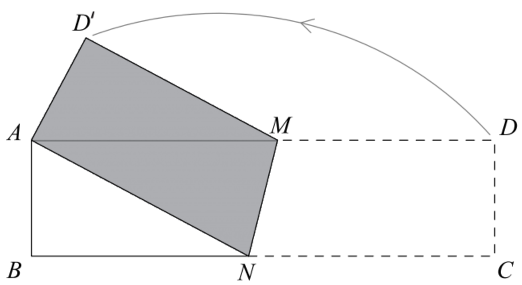


А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 11 **Д)** 12

Тачан одговор: А

Решење. Уколико отворим једну алку и њом спојимо 2 пара алки, добићемо једну слободну алку и 5 међусобно спојених алки. То можемо урадити још 3 пута, тако добијајући укупно 4 слободне алке и 4 ланца од по 5 алки, искористивши 4 потеза. Затим са 4 преостале слободне алке можемо спојити 4 ланца, добијајући тражен и облик карика, искористивши још 4 потеза, што укупно подразумева 8 потеза.

Задатак 5. Парче папира правоугаоног облика $ABCD$, димензија 4 16 пресавијено је по дуж MN тако да се теме C поклапа са тачком A (види слику). Колика је површина четвороугла $ANMD$?



А) 17 **Б)** 27 **В)** 37 **Г)** 47 **Д)** 57

Тачан одговор: В

Решење. Из питагорине теореме примењене на правоугли троугао AND добијамо да је $BN^2 + AB^2 = NA^2 = NC^2 = (BC - BN)^2$ решавањем ове једначине добијамо да је $NB = \frac{16^2-4^2}{32} = \frac{15}{2}$. Аналогно се из троугла MDA добија да је $MD = 152 = NA$ па је поврсина четвороугла: $AB \cdot \frac{MD+NC}{2} = AB \cdot \frac{BC-NA+MD}{/}2 = AB \cdot \frac{AD}{2} = 32$.

Задатак 23. Воз G је пролазио поред бандере 8 секунди. Након тога се мимоишао са возом H и они су пролазили један поред другог 9 секунди. Затим је воз H пролазио поред бандере 12 секунди. Које је од следећих тврђења о дужинама возова тачно?

А) G је два пута дужи од H
Б) G и H су исте дужине
В) H је 50% дужи од G
Г) H је два пута дужи од G
Д) Ништа се не може закључити о дужинама.

Тачан одговор: А

Решење. Из пролажења возова поред бандере добијамо њихове брзине. Брзина првог воза је $V = \frac{G}{8}$, а другог $U = \frac{H}{12}$. Једначина мимоилажења возова је: $V + U = \frac{G+H}{9}$, одакле се коришћењем прве две једначине добија $G = 2H$.

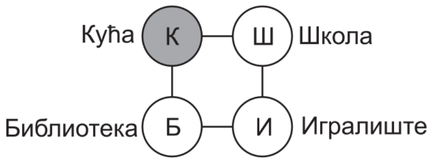
Задатак 24. Последња цифра различита од нуле броја К$= 2^{59} \cdot 3^4 \cdot 5^{53}$

А) 1 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 6 **Д)** 9

Тачан одговор: В

Решење. Број К се може записати у облику К$= 2^{53} \cdot 5^{53} \cdot 3^4 \cdot 2^6$, тј. К$= 10^{53} \cdot 3^4 \cdot 2^6$. Одатле следи да је последња цифра броја К која није 0, последња цифра број $3^4 \cdot 2^6 = 5184$. Онда је тражена цифра 4.

Задатак 25. Петар је направио игру Кенгур. На слици је дата табла за ту игру. На почетку је кенгур у школи Ш. Према правилима игре, из било које позиције осим куће К, кенгур може да скочи на било коју од две суседне позиције. Када кенгур дође у позицију К игра је готова. На колико начина кенгур може доћи од Ш до К са тачно 13 скокова?



А) 12 **Б)** 32 **В)** 64 **Г)** 144 **Д)** 1024

Тачан одговор: В

Решење. Како кенгур креће из позиције Ш, а не сме да скочи у позицију К (све до тринаестог потеза), значи да кенгур из те позиције може скочити само у школу И. Аналогно је и када се кенгур налази у школи Б. Ако се пак кенгур налази у школи И, тада он има 2 могућности за скакање: у школу Б или Ш. У 13 потеза кенгур ће се у школи И наћи 6 пута, те он то може учинити на $2^6 \cdot 1^7 = 64$ начина.

Задатак 26. Дато је 5 лампи, свака од њих се може притиском на тастер укључити или искључити. Сваки пут када се притисне тастер на лампи промени се њен статус, али промени се и статус тачно још једне, случајно изабране, лампе. (За исту лампу избор друге лампе може сваки пут бити различит.) На по четку су све лампе искључене. Тастери су притиснути 10 пута. Које је од следећих тврђења сада тачно?

А) Немогуће је да су све лампе искључене. **Б)** Све лампе су сигурно укључене.
В) Немогуће је да све лампе буду укључене. **Г)** Све лампе су сигурно искључене.
Д) Ниједно од тврђења А)-Г) није тачно.

Тачан одговор: Д

Решење.

Редом ћемо размотрити понуђене одговоре:

А) није тачно , јер ако свих 10 пута притискамо тастер код лампе 1, и сваки пут се промени статус лампе 2, тада ће после 10 притисака све лампе бити искључене

Б) није тачно , у истом случају као и А)

В) је тачно , јер је извршен паран број промена стања лампи, а да би на крају све лампе биле упаљене, свакој лампи је потребно променити стање непаран број пута. Дакле, немогуће је да све лампе буду укључене.

Г) очигледно није тачно , јер је В) тачно

Задатак 27. Дато је шест различитих природних бројева. Нека је n највећи од њих. Постоји тачно један пар ових бројева таквих да мањи број не дели већи. Која је најмања вредност броја n?

А) 18 **Б)** 20 **В)** 24 **Г)** 36 **Д)** 45

Тачан одговор: В

Решење. Поређајмо дате бројеве у растући поредак. За свака два броја (сем једног пара) из низа важи да је један од њих дељив другим. Пошто последњи број у низу - n треба да буде најмањи могући, следи да и остали бројеви треба да буду што мањи, тј. да се пар бројева који нису дељиви један другим налази што ближе почетку низа, те можемо кренути од $1, 2, 3\ldots$ Следећи бројеви су дељиви са 3, па ћемо имати: $1, 2, 3, 6, 12, 24$, те добијамо да је најмањи такав број $n = 24$.

Задатак 28. Никола је исписао све троцифрене бројеве и за сваки од бројева је написао производ његових цифара. Након тога, Никола је одредио збир свих тих производа. Који број је тако добио?

А) 45 **Б)** 45^2 **В)** 45^3 **Г)** 2^{45} **Д)** 3^{45}

Тачан одговор: В

Решење. За почетак приметимо да можемо игнорисати оне бројеве који садрже цифру 0 јер је производ њихових цифара једнак 0. Према томе посматрамо само бројеве облика $\overline{xyz}$, где је $1 \leq x, y, z \leq 9$. Међутим, потребно је израчунати све производе а потом их све сабрати.

Идеја је поједноставити проблем. Заправо, пробајмо да решимо исти проблем али са једноцифреним бројевима. Ово је лако, решење је $1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{9\cdot10}{2} = 45$ јер је производ цифара сваког једноцифреног броја - сам тај број. Означимо ову вредност са X_1. Шта је са двоцифреним бројевима? И ово можемо елегантно решити свођењем на једноцифрене. Одредимо суму производа цифара бројева који почињу цифром 1 - та сума је једнака $1\cdot1+1\cdot2+\ldots+1\cdot9 = 1\cdot(1+2+\ldots+9) = 45 = X_1$. Слично добијамо и за суму производа цифара бројева који почињу цифром 2: $2(1+2+\ldots+9) = 2X_1$ и аналогно за остале цифре. Како све двоцифрене бројеве (који не садрже цифру 0) можемо поделити на оне који почињу цифром 1, цифром 2, итд., цифром 9, коначан резултат је $1\cdot X_1+2\cdot X_1+\ldots+9\cdot X_1 = (1+2+\ldots+9)X_1 = 45X_1 = 45^2$. Означимо овај број са X_2.

Сада већ наслућујемо куда ово води. Сума производа цифара свих троцифрених бројева који не садрже цифру 0 а почињу цифром један једнака је 1 · сума производа цифара свих двоцифрених бројева који не садрже нулу, тј. $1 \cdot X_2 = X_2$. Аналогно, када посматрамо троцифрене бројеве који почињу цифром i $(1 \leq i \leq 9)$, добијамо да је одговарајућа сума једнака iX_2 па је тражена сума једнака $X_3 = 1X_2 + 2X_2 + \ldots 9X_2 = 45X_2 = 45^3$. Приметимо да ово можемо наставити и за произвољне i-тоцифрене бројеве - тада је тражена сума $X_i = 45^i$.

Друго решење: Посматрајмо израз

$$(1+2+\ldots+9)\cdot(1+2+\ldots+9)\cdot(1+2+\ldots+9).$$

Бирањем по једног броја (цифре) из сваке од заграда можемо добити сваки троцифрен број који не садржи нулу, а како те бројеве множимо, добијамо производ његових цифара. Развијањем горњег израза добијамо збир производа по 3 броја (цифре) а то је управо оно што је потребно израчунати. Према томе, решење задатка је управо вредност горњег израза а то је 45^3.

Задатак 29. Бројеви од 1 до 120 су уписани у 15 врста на начин који је приказан на слици. У којој колони (бројећи слева) је збир бројева највећи?

1							⋯	
2	3						⋯	
4	5	6					⋯	
7	8	9	10				⋯	
11	12	13	14	15			⋯	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
106	107	108	109	110	111	112	⋯	120

А) 1. **Б)** 5. **В)** 7. **Г)** 10. **Д)** 13.

Тачан одговор: Б

Решење. Приметимо да прва колона има 15 бројева ,друга колона има 14, трећа колона има 13 бројева итд. на крају петнаеста колона има 1 елемент и такође да прва од петнаест врста има 1 број,друга врста има 2 броја ,трећа врста има 3 броја,итд. на крају петнаеста врста има 15 бројева.Даље приметимо да почев од друге врсте у свакој од врста је први елемент те врсте мањи за један од следећег,на пример у трећој врсти је оцигледно $4 < 5 < 6$. Даље обележимо суму бројева прве колоне са S,тада је сума бројева друге колоне $S+14-1$ јер је свих четрнаест бројева из друге колоне веће за један од одговарајућих бројева из прве колоне и морамо још одузети број 1 јер се тај број у првој колони појављује,а у другој се не појављује.Даље истим принципом се добија да је збир елемената треће колоне једнак $S+14-1+13-3 = S+23$,затим збир елемената четврте колоне је $S+23+12-6 = S+29$,онда збир бројева у петој колони је $S+29+11-10 = 30$ и конацно збир елемената шесте колоне је једнак $S+30+10-15 = S+25 < S+30$ према томе највећи збир је $S+30$,а он се појављује у петој колони,дакле збир бројева је највећи у колони под редним бројем пет.

Задатак 30. Нека су A, B, C, D, E, F, G, H осам темена конвексног осмоугла, редом. Случајним избором бирамо једно од темена C, D, E, F, G, H и цртамо дуж која га повезује са теменом A. Још једном случајним избором бирамо једно теме од истих тих шест и цртамо дуж која га повезује са теменом B. Која је вероватноћа да је осмоугао са ове две дужи подељен на тачно три области?

А) $\frac{1}{6}$ **Б)** $\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{4}{9}$ **Г)** $\frac{5}{18}$ **Д)** $\frac{1}{3}$

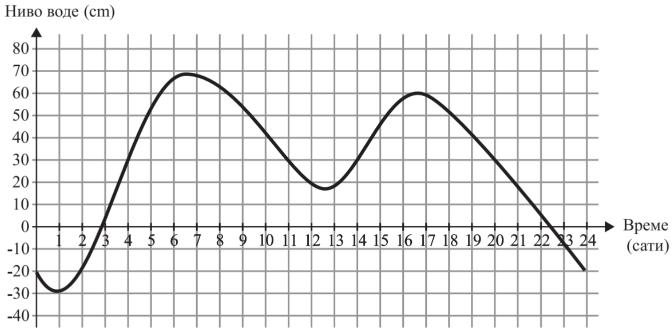
Тачан одговор: Г

Решење. Из тачке A је могуће конструисати тачно 6 дужи које повезују тачку A са осталим теменима осмоугла (свим, осим са B). Такође, из B је могуће контруисати исто 6 дужи. То чини укупно 36 различитих дељења осмоугла. Колико дељења дели ову фигуру на тачно три дела? Следеће дужи деле фигуру на три дела: AE и BD, AF и BD, AF и BE, AG и AD, AG и AD, AG и AE, AG и AE, AD и BD, AE и BE, AF и BF, AG и BG.

То чини укупно 10 различитих дељења која осмоугао деле на тачно три дела. Тако да је вероватноћа да се фигура подели на три дела: $\frac{10}{36}$, односно $\frac{5}{18}$.

6 Категорија - 11. и 12. разред

Задатак 1.Ниво воде у луци је извесног дана растао и падао као што је приказано на слици. Колико сати је тог дана ниво воде био изнад 30 cm?



А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 9 **Д)** 13

Тачан одговор: Д

Решење. Јасно се види са слике да је ниво воде био изнад $30cm$ од $4h$ до $11h$, и од $14h$ до $20h$. Укупан број сати је $7+6=13$.

Задатак 2. $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2}}$

А) 1 **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** $\sqrt[6]{4}$ **Г)** $\sqrt[3]{4}$ **Д)** 2

Тачан одговор: Б

Решење. $\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2^3}}=\sqrt{2}$

Задатак 3. У низу од пет бројева број 2 је први, а број 12 последњи. Производ прва три броја је 30, производ средња три броја је 90, а производ последња три броја је 360. Који је број у средини тог низа?

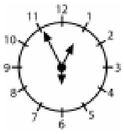
2				12

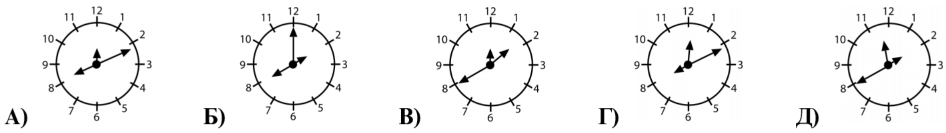
А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 6 **Д)** 10

Тачан одговор: В

Решење. Нека су бројеви у средини a, b, c. Тада је $2\cdot a\cdot b=30$, $a\cdot b\cdot c=90$, $b\cdot c\cdot 12=360$. Одавде добијамо да је $a\cdot b=15$. Такође је и $b\cdot c=30$. Лако можемо израчунати да је $a=\frac{90}{30}=3$, исто као и $c=\frac{90}{15}=4$. Како знамо вредности за a и c, можемо израчунати и средњи члан низа који је једнак $\frac{90}{3\cdot 4}=5$.

Задатак 4. Специјални сат има три казаљке различитих дужина (за сате, минуте и секунде). Не знамо која је која казаљка, али знамо да је сат исправан. У 12 : 55 : 30 казаљке су биле у позицији као на слици. Како ће изгледати сат у 8 : 11 : 00?

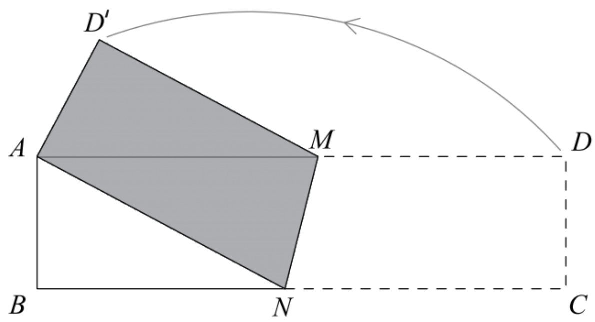




Тачан одговор: А

Решење. Како је време приказано сатом на слици 12 : 55 : 30, то се сатна казаљка мора наћи између бројева 12 и 1, па је сатна казаљка она средње дужине. Такође, минутна казаљка се мора бити између бројева 11 и 12, па је минутна казаљка најдужа. То значи да је казаљка за секунде најкраћа. Након овога се лако може закључити да је распоред А једини могућ.

Задатак 5. Парче папира правоугаоног облика $ABCD$, димензија 4 16 пресавијено је по дуж MN тако да се теме C поклапа са тачком A (види слику). Колика је површина четвороугла $ANMD$?



А) 28 **Б)** 30 **В)** 32 **Г)** 48 **Д)** 56

Тачан одговор: В

Решење. Из питагорине теореме примењене на правоугли троугао AND добијамо да је $BN^2 + AB^2 = NA^2 = NC^2 = (BC - BN)^2$ решавањем ове једначине добијамо да је $NB = \frac{16^2-4^2}{32} = \frac{15}{2}$. Аналогно се из троугла MDA добија да је $MD = 152 = NA$ па је површина четвороугла: $AB \cdot \frac{MD+NC}{2} = AB \cdot \frac{BC-NA+MD}{/}2 = AB \cdot \frac{AD}{2} = 32$.

Задатак 6. Збир цифара деветоцифреног броја је 8. Колики је производ његових цифара?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 8 **Г)** 9 **Д)** 9!

Тачан одговор: А

Решење. Тражени број може имати највише осам цифара које нису једнаке нули, јер је $1 \cdot 8 = 8$. Дакле, бар једна цифра ће бити једнака нули, па самим тим и цео производ цифара.

Задатак 7. Максимална вредност природног броја n за који је $n^{200} < 5^{300}$ је

А) 5 **Б)** 6 **В)** 8 **Г)** 11 **Д)** 12

Тачан одговор: Г

Решење. Дати израз је еквивалентан изразу $(\frac{n^2}{25})^{100} < 5^{100}$, тј. $\frac{n^2}{25} < 5$, тј. максимално могуће n је 11.

Задатак 8. Која од следећих функција задовољава једначину

$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{f(x)}$?

А) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ **Б)** $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ **В)** $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

Г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **Д)** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Тачан одговор: Г

Решење.
Нека је $f(x) = \frac{2}{x}$. Тада је $f(\frac{1}{x}) = 2 \cdot x \neq \frac{1}{f(x)}$.
Нека је $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Тада је $f(\frac{1}{x}) = \frac{x}{1+x} \neq \frac{1}{f(x)}$.
Нека је $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Тада је $f(\frac{1}{x}) = 1 + x \neq \frac{1}{f(x)}$.
Нека је $f(x) = \frac{1}{x}$. Тада је $f(\frac{1}{x}) = x = \frac{1}{f(x)}$. Дакле, то је тражено решење датог задатка.

Задатак 9. Реални број ш задовољава $x^3 < 64 < x^2$. Које тврђење је тачно?

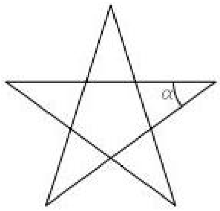
А) $0 < x < 64$ **Б)** $-8 < x < 4$ **В)** $x > 8$ **Г)** $-4 < x < 8$ **Д)** $x < -8$

Тачан одговор: Д

Решење.

Из $64 < x^2$ добијамо да је $|x| > 8$, а пошто је $x^3 < x^2$, добијамо да је $x < 0$. Комбинујући ове две чињенице, добијамо да је $x < -8$

Задатак 10. Која је величина угла α у правилној петокракој звезди?



А) 24° **Б)** 30° **В)** 36° **Г)** 45° **Д)** 72°

Тачан одговор: В

Решење. Унутрашњи угао правилног петоугла са слике је $\frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Такође, он представља спољашњи угао троуглова дигнутих над страницама петоугла, те је он суплемент углова на основицама тих троуглова. Одатле добијамо да је $\alpha = 180^\circ - 2\cdot(180^\circ - 108^\circ) = 36^\circ$.

Задатак 11. Број мојих година је двоцифрен природан број, који је степен броја 5, а број година мог рођака је двоцифрен број који је степен броја 2. Збир цифара бројева наших година је непаран број. Колики је производ цифара бројева наших година?

А) 240 **Б)** 2010 **В)** 60 **Г)** 50 **Д)** 300

Тачан одговор: А

Решење. Пошто је 25 једини двоцифрени степен броја 5, ти имаш 25 година. Твој рођак може имати 16, 32 или 64 године. Пошто је збир цифара ваших година непаран, твој рођак мора имати 64 године. Дакле, производ цифара ваших година је $2\cdot 5\cdot 6\cdot 4 = 240$.

Задатак 12. Туристичка агенција је за групу туриста на Сицилији организовала четири факултативна излета. На сваки излет је ишло 80% туриста из групе. Који је најмањи могуци проценат туриста из групе који су ишли на сва четири излета?

А) 80% **Б)** 60% **В)** 40% **Г)** 20% **Д)** 16%

Тачан одговор: Г

Решење. Како по услову задатка на сваком од излета мора бити по 80% туриста од укупног броја и како се тражи најмањи број туриста коју су се нашли на сва четири излета, закључујемо да на два излета мора постојати 60% туриста од укупног броја који морају бити на оба излета,даље у трећем излету најмањи проценат туриста који су се нашли на сва три излета јесте $100\% - 60\% = 40\%$, затим на четвртом излету проценат оних туриста који су били на сва четири излета може да буде $80\% - 40\%$ или $100\% - 80\%$ очигледно је мањи број 20% па је решење 20% .

Задатак 13. Скуп решења неједначине $|x| + |x-3| > 3$ је:

А) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ **Б)** $(-3,3)$
В) $(-\infty,-3)$ **Г)** $(-3,\infty)$ **Д)** сви реални бројеви

Тачан одговор: А

Решење. Разматрајмо три могућа случаја за вредности x :

- $x \in (-\infty, 0)$
$$(-x) + (-(x-3)) > 3$$
$$-x - x + 3 > 3$$
$$-2x > 0$$
$$x < 0$$
Дакле, сви бројеви који задовољавају почетни услов и овај услов су решења, односно: $x \in (-\infty, 0)$.

- $x \in (0, 3)$
$$x + (-(x-3)) > 3$$
$$x - x + 3 > 3$$
$$3 > 3$$
Ова једнакост није задовољена, тако да овај случај нема решења.

- $x \in (3, +\infty)$
$$x + x - 3 > 3$$
$$2x > 6$$
$$x > 3$$
Решења овог случаја су сви бројеви који задовољавају овај услов и почетни услов, односно: $x \in (3, +\infty)$.

На крају решење задатка је унија решења добијених решавањем сваког случаја, односно: $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

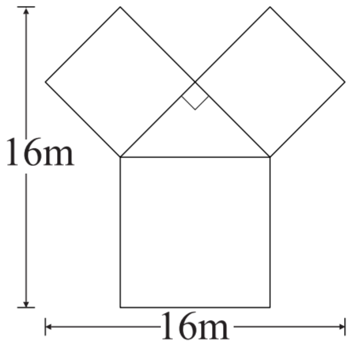
Задатак 14.Школске оцене у Словачкој су од 1 (најбоља) до 5 (најлошија). У једној словачкој школи тест није баш добро урађен у четвртом разреду. Просечна оцена је била 4. Дечаци су урадили тест мало боље и њихова просечна оцена је била 3,6, док је просечна оцена девојчица била 4,2. Која је од следећих реченица о том разреду тачна?

А) Има дупло више дечака него девојчица. **Б)** Има 4 пута више дечака него девојчица.
В) Има дупло више девојчица него дечака. **Г)** Има 4 пута више девојчица него дечака.
Д) Има исти број дечака и девојчица.

Тачан одговор: В

Решење. Нека је n број дечака, m број девојчица, $x1, x2, ..., xn$ оцене дечака и $y1, y2, ..., ym$ оцене девојчица. Тада важи $\frac{x1+x2+...+xn+y1+y2+...+ym}{n+m} = 4$. Како је $x1 + x2 + ... + xn = 3,6n$ и $y1 + y2 + ... + ym = 4,2m$, одатле следи $\frac{3,6n+4,2m}{n+m} = 4$. Сређивањем израза добија се $\frac{m}{n} = 2$.

Задатак 15. На слици је приказан план цвећњака. Беле руже расту унутар два подударна квадрата, а црвене руже у трећем квадрату. Жуте руже расту у правоуглом троуглу. Дужина и ширина цвећњака су по $16m$. Колика је површина дела цвећњака под ружама?



А) $114\,\mathrm{m}^2$ **Б)** $130\,\mathrm{m}^2$ **В)** $144\,\mathrm{m}^2$
Г) $160\,\mathrm{m}^2$ **Д)** $186\,\mathrm{m}^2$

Тачан одговор: В

Решење. Збир дијагонала квадрата на коме се налазе беле руже је $16m$, што значи да је дијагонала d дужине $8m$, па је $2 \cdot a^2 = d^2$. Одавде је $a = 4\sqrt{2}$, па је површина правоуглог троугла једнака $\frac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16m^2$ и површина ова два квадрата под белим ружама је $2\cdot a^2 = 64m^2$ и дужина квадрата под црвеним ружама је $16m - 8m = 8m$, па је површина једнака $8 \cdot 8 = 64m^2$. Укупна површина под ружама је $64m^2 + 16m^2 + 64m^2 = 144m^2$

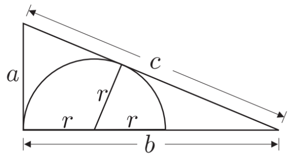
Задатак 16. Продате су све улазнице за први ред у биоскопу. Седишта су нумерисана редом бројевима почев од 1. Грешком је продата једна улазница више. Збир свих бројева седишта на свим продатим улазницама је 857. Који је број седишта за које су продате две улазнице?

А) 4 **Б)** 16 **В)** 25 **Г)** 37 **Д)** 42

Тачан одговор: Г

Решење. Нека је карта која је продата два пута има додељену вредност a. Тада је збир који је добијен једнак $1 + 2 + \ldots + a + a + \ldots + n = 857$. Како знамо да је $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$, тада само треба пронаћи n за које ће важити да је $\frac{(n-1)\cdot n}{2} \leq 857 \leq \frac{n\cdot(n+1)}{2}$. Вредност за n треба тражити у бројевима $[\sqrt{857\cdot 2}]$ и $[\sqrt{857\cdot 2}] - 1$. Провером добијамо да је $n = 40$, па је $857 - \frac{40\cdot(40+1)}{2} = 857 - 820 = 37$

Задатак 17. Дат је правоугли троугао са страницама дужина a, b и c. Колика је дужина уписаног полукруга на слици?



А) $\frac{a(c-a)}{2b}$ **Б)** $\frac{ab}{a+b+c}$ **В)** $\frac{ab}{b+c}$

Г) $\frac{2ab}{a+b+c}$ **Д)** $\frac{ab}{a+c}$

Тачан одговор: Д

Решење. Посматрајмо и троугао и његову слику осном симетријом у односу на страницу b. Површину тог новог, једнакокраког троугла можемо израчунати на 2 начина. Први је уз помоћ формуле $P = \frac{x \cdot h}{2}$, где је x страница троугла и h висина која одговара страници x.Та формула у овом случају изгледа овако: $P = \frac{2a \cdot b}{2} = ab$. Други начин је из формуле:$P = r \cdot s$, где је r полупречник уписаног круга и s полуобим троугла. Комбиновањем ове две формуле добијамо:

$$ab = rs$$
$$ab = r \cdot \frac{2a+c+c}{2}$$
$$r = \frac{ab}{a+c}$$

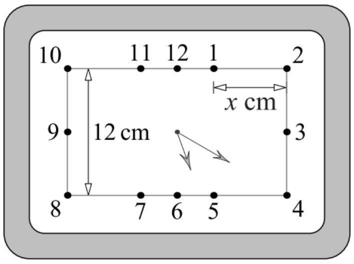
Задатак 18. Дужина странице квадрата $ABCD$ је 2. Тачке E и F су средишта страница AB и AD, респективно, а G је тачка на дужи CF таква да је $3CG = 2GF$. Површина троугла BEG је?

А) $\frac{7}{10}$ **Б)** $\frac{4}{5}$ **В)** $\frac{8}{5}$ **Г)** $\frac{3}{5}$ **Д)** $\frac{6}{5}$

Тачан одговор: Б

Решење. Како је троугао CDF правоугли вази да је $CF^2 = DC^2 + FD^2$ (питагорина теорема), па је $CF = \sqrt{5}$. Како је $\frac{CG}{GF} = \frac{2}{3}$ следи да је $CG = \frac{2 \cdot \sqrt{5}}{5}$.Угао $\angle BCG = 90^o - \angle DCG = \angle DFC$, $\frac{BC}{CG} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{5}/5} = \sqrt{5} = \frac{FC}{FD}$ па закључујемо да су троуглови CDF и BGC слични, те је и троугао BGC правоугли. Нека је H подножије нормале из тачке G на праву AD. $\angle HBG = 90^o - \angle CBG = \angle BCG$ следи да су троуглови BCG и BHG слични па је $GH = \frac{BG^2}{BC} = \frac{8}{5}$. $P(BEG) = \frac{AB}{2} \cdot \frac{GH}{2} = \frac{4}{5}$.

Задатак 19. Сат на слици је правоугаоног облика, али се свака казаљка креће константном брзином као код нормалног сата. Растојање између бројева 8 и 10 је 12 cm и растојање између 1 и 2 је x cm. Колико је x?

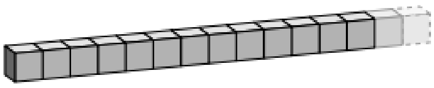


А) $3\sqrt{3}$ **Б)** $2\sqrt{3}$ **В)** $4\sqrt{3}$
Г) $2+\sqrt{3}$ **Д)** $12-3\sqrt{3}$

Тачан одговор: В

Решење. Сат за једнако време треба да опише углове између 12 и 1, 1 и 2, и 2 и 3. Збир тих углова је 90° (видети слику). Та три угла су једнака, пошто је по услову задатка брзина казаљки константна, па су они једнаки 30°. Обележимо са O тачку спајања казаљки. Дужина између O и 12 је 6 cm(половина растојања између 8 и 10). Из троугла са теменима у O, 12 и 1, добијамо да растојање између O и 1 износи $4\sqrt{3}$. Троугао са теменима у O, 1, и 2 је једнакокраки, па је x једнако растојању између O и 1, тј. $4\sqrt{3}$.

Задатак 20. Кенгур ређа стандардне коцкице у низ (код стандардне коцкице на наспрамним странама има укупно 7 тачкица). Он може да залепи две стране коцкица само ако је на њима исти број тачкица. Желео је да укупан број тачкица на спољним странама коцкица из низа буде 2012. Колико коцкица му је потребно?



А) 70 **Б)** 71 **В)** 142 **Г)** 143 **Д)** Немогуће је.

Тачан одговор: Д

Решење. Нека је укупан збир тачкица $s \in \mathbb{N}$, а нека је број коцкица $n \in \mathbb{N}$. За сваку коцкицу која није на крају низа важи да има 4 спољне стране, самим тим 14 тачкица. За преостале две коцкице које се налазе на крају низа важи да имају по 5 спољних страна. Тј. $s = 14 \cdot n + a + b$, где $a, b \in \mathbb{N}$ представљају број тачкица на бочној страни прве коцкице и на бочној страни последње коцкице. Приметимо, пошто се бочне стране спајају само са бочним странама које међусобно имају једнак број тачкица да ако је n непаран број, важи да је $a + b = 7$, а ако је n паран број да је $a + b \leq 14$. Пошто број 2012 није дељив са 7, онда је n паран број. Пошто је $a+b \leq 14$, важи да је n највећи могући број такав да када се помножи са 14 њихов производ није већи од 2012. Тј, $n = 143$, али пошто је n паран број следи да је $n = 142$, али пошто важи $a + b \leq 14$, тј. $s \leq 14 + 142 \cdot 14$, тј. $s \leq 2002$, па одатле следи да овај задатак нема решења.

Задатак 21. Која је најмања могућа величина једног угла у једнакокраком троуглу ABC, таквом да тежишна дуж дели троугао на два једнакокрака троугла?

А) 15° **Б)** $22,5^\circ$ **В)** 30° **Г)** 36° **Д)** 45°

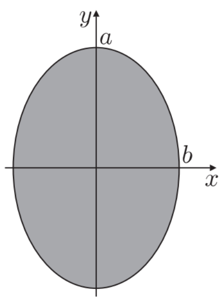
Тачан одговор: Д

Решење. Нека су темена на основици троугла A и B, а теме при врху C. Посматрајмо два случаја:
1. повлачимо тежишну дуж из темена основице
2. повлачимо тежишну дуж из врха

1. Означимо подножје тежишне дужи на наспрамну страницу са D.
Нека је BD=DA. Тада је у троуглу ABD $\angle ABD = \angle DAB$, јер је $\triangle ABD$ једнакокраки, по услову задатка. Како је $\triangle ABC$ такође једнакокрак, значи да је $\angle ABC = \angle ABD = \angle CAB$, имамо да је $\angle CAB = \angle DAB$, што је немогуће.
Нека је BD=AB. Тај случај је такође немогућ, јер би било AB=BD= $AC/2$. Како је и $\triangle ADC$ једнакокрак, значи да је AC=AD. Следи да су странице $\triangle ABD$ једнаке AC, $AC/2$ и $AC/2$, шо је немогуће због неједнакости троугла (морало би бити AC>$AC/2$+$AC/2$).

2. Повуцимо тежишну дуж из темена C и означимо подножје са D. Тада је AD=CD=DB, и троуглови $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ су једнакокрако правоугли, па је угао на основици једнак 45^o, те је то вредност траженог угла.

Задатак 22. Нека је $a > b$. Ако елипса приказана на слици ротира око x осе добија се елипсоид E_x запремине V_x. Ако елипса ротира око y осе добија се елипсоид E_y запремине V_y. Које је од следећих тврђења тачно?



А) $E_x = E_y$ и $V_x = V_y$ **Б)** $E_x = E_y$, али $V_x \neq V_y$
В) $E_x \neq E_y$ и $V_x > V_y$ **Г)** $E_x \neq E_y$ и $V_x < V_y$
Д) $E_x \neq E_y$, али $V_x = V_y$

Тачан одговор: В

Решење.

Формула за запремину елипсоида је $V = \frac{4}{3}\pi abc$, при чему је у првом случају $c = a$, а у другом, $c = b$. Дакле, $V_x = \frac{4}{3}\pi a^2 b$, а $V_y = \frac{4}{3}\pi ab^2$, пошто је $a > b$, ови елипсоиди су различити, а $V_x > V_y$.

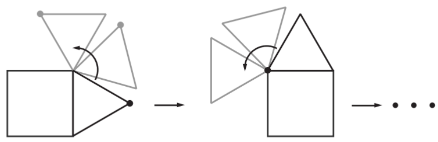
Задатак 23. Размотримо две операције које се могу применити на разломак: 1) повећање бројиоца за 8 ; 2) повећање имениоца за 7. Примењујући укупно n таквих операција у неком поретку, полазећи од разломка $\frac{7}{8}$ добили смо разломак исте вредности. Која је најмања могућа вредност броја n?

А) 56 **Б)** 81 **В)** 109 **Г)** 113 **Д)** То је немогуће.

Тачан одговор: Г

Решење. По услову задатка имамо да је $\frac{7+8\cdot s}{8+7\cdot t} = \frac{7}{8}$, где s и t представљају број извршених операција 1) и 2), редом и важи да је $s+t=n$. После сређивања једнакости добијамо да је $64 \cdot s = 49 \cdot t$. Пошто је десна страна једнакости дељива са 49, следи да и лева мора бити дељива са 49. Одатле је $s=49$ и $t=64$, те је тражени број n једнак 113.

Задатак 24. Једнакостранични троугао се котрља око квадрата странице јединичне дужине (види слику). Колика је дужина путање коју прође означена тачка док троугао и тачка не дођу следећи пут у почетну позицију?



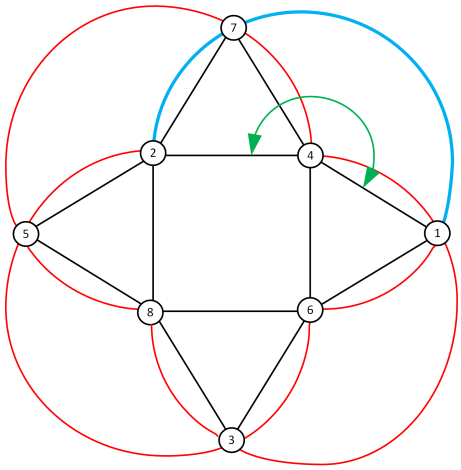
А) 4π **Б)** $\frac{28}{3}\pi$ **В)** 8π **Г)** $\frac{14}{3}\pi$ **Д)** $\frac{21}{2}\pi$

Тачан одговор: Б

Решење. Иако на прву лопту проблем делује доста наивно, потребно је обратити пажњу на неке ствари. Пре свега, тражи се пређен пут тако да не само тачка заврши на истој позицији, већ и сам троугао. Посматрајмо за почетак само прву ротацију, која је и приказа на слици задатка. На том путу означена тачка се кретала по кругу са центром у горњем десном темену квадрата и полупречником једнаким један. Угао овог исечка је означен зеленом бојом на слици испод. Није тешко закључити да је овај угао једнак $\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$. Како је нама потребна дужина пута, потребно је израчунати дужину овог исечка. Описана дужина се добија једноставном пропорцијом са обим круга:

$$L = \frac{\frac{7\pi}{6}}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot = \frac{7\pi}{6}$$

При преласку троугла са горње ивице на леву, посматрана тача се не помера - он је у том случају заправо центар ротације па је самим тим пређени пут једнак нули. Сада смо добили нову позицију троугла, међутим ова позицији није аналогна почетној. Проблем је у положају посматране тачке - у почетку је онда била на "врху" троугла а сада је у његовој основи.



Међутим, можемо слично резоновати кретање тачке и у овом положају. Начин кретања тачке је приказан на слици. Другим речима, потревно је 8 ротација и сваки пут се добија лук исте дужине односно добија се исти угао у јединичном кругу. Овим се добија да је крање решење једнако: $8 \cdot L = \frac{28\pi}{3}$.

Задатак 25. Колико пермутација (x_1, x_2, x_3, x_4) скупа бројева $\{1, 2, 3, 4\}$ испуњава услов да је збир $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ дељив са 3?

А) 8 **Б)** 12 **В)** 14 **Г)** 16 **Д)** 24

Тачан одговор: Г

Решење. Приметимо прво да у збиру $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ засигурно постоје тачно два сабирка дељива са 3 ,јер ком год од бројева у датом пермутацији долелимо 3 он се у збиру појављује два пута.Даље уочимо да су преостала два сабирка облика $x_k(x_i + x_j), k \neq i \neq j$ дакле бројеви x_i и x_j морају давати остатке из скупа $\{1, 2\}$ по модулу 3.Било који од бројева $x_l, l = 1, ..., 4$ мозе добити вредности 3 , затим бројевима x_i и x_j можемо редом доделити бројеве 1 и 2 или 2 и 4 и обрнуто тј. 2 и 1 или 4 и 2,па је према томе укупан број решења $4 \cdot 4 = 16$.

Задатак 26. После часа алгебре на табли су остали нацртани график функције $y = x^2$ и 2012 правих паралелних правој $y = x$, таквих да свака од њих сече параболу у две тачке. Збир x координата тачака пресека правих и параболе је

А) 0 **Б)** 1 **В)** 1006 **Г)** 2012 **Д)** Немогуће је одредити.

Тачан одговор: Г

Решење. Једначина праве која је паралелна са правом $y = x$ је $y = x + c$, где је c нека константа. Једначина квадратне функције је $y = x^2$. Оне се секу у тачкама x_1 и x_2 које се добијају као решења квадратне једначине $x^2 = x + c$, односно $x^2 - x - c = 0$. Знамо да из Вијетових формула важи да је збир решења квадратне једначине једнак: $x_1 + x_2 = -\frac{-1}{1} = 1$.

Пошто има 2012 паралелних правих и за сваку од њих ово разматрање важи, укупни збир је $2012 \cdot (x_1 + x_2) = 2012$.

Задатак 27.Три темена коцке (не припадају сва истој страни) су $P(3{,}4{,}1)$,$Q(5{,}2{,}9)$ и $R(1{,}6{,}5)$. Која тачка је центар те коцке?

А) $A(4,3,5)$ **Б)** $B(2,5,3)$ **В)** $C(3,4,7)$ **Г)** $D(3,4,5)$ **Д)** $E(2,3,5)$

Тачан одговор: А

Решење. Можемо израчунати растојања између тачака:
$PQ = \sqrt{(5-3)^2 + (2-4)^2 + (9-1)^2} = \sqrt{72}$
$QR = \sqrt{(5-1)^2 + (2-6)^2 + (9-5)^2} = \sqrt{48}$
$RP = \sqrt{(3-1)^2 + (4-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{24}$
Одавде следи да је PQ главна дијагонала коцке. Лако можемо израчунати координате тачке која је средиште дијагонале PQ.
$S(\frac{3+5}{2}, \frac{4+2}{2}, \frac{1+9}{2}) = (4,3,5)$

Задатак 28. У низу $1,1,0,1,-1,...$ прва два члана a_1 и a_2 су једнака 1. Трећи члан је једнак разлици претходна два члана, тј. $a_3 = a_1 - a_2$. Четврти члан је једнак збиру претходна два члана, тј. $a_4 = a_2 + a_3$. Затим, $a_5 = a_3 - a_4$, $a_6 = a_4 + a_5$, итд. Колики је збир првих 100 чланова овог низа?

А) 0 **Б)** 3 **В)** -21 **Г)** 100 **Д)** -1

Тачан одговор: Б

Решење. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$,$a_3 = 0$ $a_4 = 0$ $a_5 = -1$ $a_6 = 0$ $a_7 = -1$ $a_8 = 1$ $a_9 = 0$ где видимо да се од 3. до 8. члана је период који се састоји од шест различитих бројева. Збир ових шест бројева је $0+1-1+0+1-1 = 0$, па је збир чланова у периоду једнак нули. Укупан збир периода је $\frac{(100-2)}{3} = 16$ и остатак 2 што значи да се у укупан збир додају и прва два члана периода, па је укупан збир првих 100 чланова $1+1+16\cdot 0+0+1 = 3$

Задатак 29. Ивана је изабрала два броја a и b из скупа $\{1,2,3,\ldots,26\}$. Производ ab је једнак збиру преостала 24 броја. Одредити $|a-b|$.

А) 10 **Б)** 9 **В)** 7 **Г)** 2 **Д)** 6

Тачан одговор: Д

Решење. Дати проблем се може лепо математички записати. Наиме $a \cdot b = 1+2+3+\ldots+26-a-b$. Знамо да је $1+2+3+\ldots+26 = \frac{26\cdot 27}{2} = 13\cdot 27 = 351$. Уколико мало преформулишемо ову једначину добијамо да је $(a+1)\cdot(b+1) = 352$. Све што је потребно јесте наћи решења која одговарају интервалу $[1,\ldots,26]$. Једно решење јесте $a+1 = 16$, док је $b+1 = 22$, па је њихова апсолутна разлика једнака 6.

Задатак 30. Свака мачка у Земљи чуда је или мудра или луда. Ако се деси да се мудра мачка нађе у соби заједно са 3 луде мачке, она полуди. Ако се луда мачка нађе у соби са 3 мудре мачке, онда она бива обележена као луда. Три мачке су ушле у празну собу. Убрзо након што је ушла 4. мачка прва је изашла. После уласка 5. мачке, 2. је изашла, итд. Након што је ушла 2012. мачка први пут се десило да је једна мачка била означена као луда. Које од ових мачака могу обе бити луде након уласка у собу?

А) 1. и 2011. **Б)** 2. и 2010. **В)** 3. и 2009. **Г)** 4. и последња **Д)** 2. и 2011.

Тачан одговор: Б

Решење. Низ од 2012 мачака можемо једнозначо представити низом S који се састоји од знакова M и L (нпр. $S = MLLMMLMLM...$) где је i-ти знак M ако је i-та мачка пре уласка у собу мудра, односно L ако је i-та мачка пре уласка у собу луда. Анализирајмо како све може изгледати низ S.

Приметимо да у низу S не смемо имати ситуацију да се међу 4 узастопна знака бар три пута јави знак L. Заиста тада ће и преостала мачка међу те четири постати луда (ако већ није била) и имаћемо 4 узастопне луде мачке. Али то значи да ће надаље свака мачка која буде ушла постати луда (ако то већ није) јер ће бити у соби са 3 луде мачке, па никад нећемо доћи у ситуацију да 2012. мачка буде проглашена лудом јер нам за то требају 3 мудре мачке. Дакле, у низу S међу 4 произвољна узастопна знака има не више од 2 знака L па самим тим у целом процесу уласка/изласка из собе неће се десити да нека мачка полуди.

Претпоставимо да се међу нека 4 узастопна знака низа S (који нису на позицијама $2009, 2010, 2011, 2012$) налазе бар три знака M. Тада и преостали знак мора бити M јер би у противном преостала мачка била означена као луда што је немогуће јер се то десило први пут тек када је 2012. мачка ушла. Међутим, тада и знак непосредно пре ова 4 мора бити M јер би у супротном одговарајућа мачка била означена као луда када се нађе у соби са наредне три. Понављајући ово, закључујемо да све мачке испред ових морају бити мудре па наш низ мора изгледати као $S = \underbrace{MMM\ldots MM}_{2011}L$. Иако овај низ задовољава услове задатка, он не задовољава ниједан од понуђених одговора.

Према томе, занимају нас само они низови S са особином да се међу никоја четири узастопна знака не налазе нити три знака L нити три знака M. Сваки такав низ је јединствено одређен преко своја прва 3 знака (који наравно нису LLL нити MMM). Заиста, уколико је нпр. $S = MML...$, ми знамо да 4. знак мора бити L јер би у противном имали 3 знака M међу првих 4 знакова. Аналогно, 5. знак мора бити M да не бисмо имали 3 знака L међу позицијама $2, 3, 4, 5$ итд. Није тешко запазити да су овакви низови чисто-периодични са периодом дужине 4. Међутим, имамо и додатни услов: међу последња 4 елемента морају бити 3 знака M и један знак L. Ово је могуће ако се у оригиналном низу на 2012. позицији налази знак L - довољно је само променити га у знак M (размислити!). Како за почетне 3 мачке имамо 6 могућности - MLL, LML, LLM, MML, MLM и LMM, можемо лако генерисати све низове и проверити које одговоре задовољавају.

Директном провером можемо установити да једино почетак MLM даје низ који је сагласан са неким од понуђених одговора (у нашем случају одговор Б) - то је низ

$$\underbrace{MLML|MLML|MLML\ldots|MLML}_{2008}|MLMM$$

где су знакови "|" дати само због уочавања периоде.

Напомена: За решавање овог задатка није била потребна оволико детаљна анализа. Довољно је било потражити пример низа S који је у сагласности са неким од понуђених одговора (наравно, само један одговор ће бити могућ). Наизменично ређање мудрих и лудих мачака ($MLML\ldots$) је природно пробати.