Теорија графова

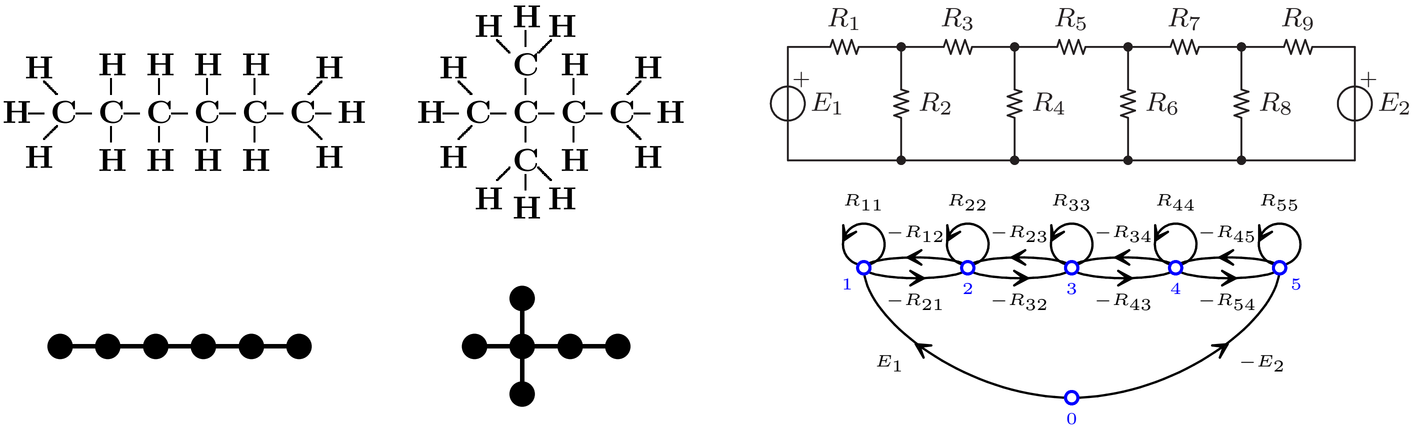
Владимир Балтић, ФОН, Математичка гимназија, Београд

baltic@matf.bg.ac.rs

Комбинаторика (са Теоријом графова) је једна од најстаријих области математике, али је и данас актуелна. Неки њени проблеми су заокупљали математичаре вековима, (попут Проблема четири боје), док су неке области добиле на значају вртоглавим развојем рачунара и њиховом све већом применом при решавању математичких проблема.

Мало историје и неки проблеми рекреативне математике

Графови су математички објекти које веома често срећемо у свакодневном животу. Ако посматрамо неку географску мапу са мноштвом градова који су повезани путевима – добијамо један граф. У скупу људи на овом предавању неки се међусобно познају, а неки не. Ако све људе представимо тачкама, а само оне који се познају спојимо линијама добићемо један граф, који нам даје геометријску представу познанстава међу људима на овом предавању. Структурна формула неког хемијског једињења, или шема неког електричног кола такође представља један граф. На наредној слици су приказана 2 алкана који имају формулу C_6H_{14} (како имају исту формулу – они су изомери) и испод њих одговарајућа стабла (код којих су чворови угљеникови атоми, а гране везе међу њима), као и једна електрична шема испод које је придружени Коутсов диграф.



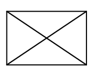
Графови налазе примену и у решавању тзв. проблема за разбибригу. Сада ћемо навести неке од њих:

- На слици су дате 3 куће и 3 бунара. Повезати путем сваку кућу (К) са сваким бунаром (Б), тако да се ови путеви међусобно не секу.

К К К

Б Б Б

- Одредити највећи број дама које се могу ставити на шаховску таблу $n \times n$ тако да се оне међусобно не нападају.
- Одредити најмањи број дама које је потребно поставити на шаховску таблу $n \times n$ тако да оне нападају сва поља те табле.
- Колико има различитих постављања тих дама? (два су постављања иста ако се могу добити окретањем табле – ротацијом или симетријом у односу на неку осу табле)
- Обићи скакачем шаховску таблу $m \times n$, тако да скакач обиђе сва поља и да ни на једном не буде више од један пут.
- Може ли се једним потезом (без дизања оловке са папира) нацртати фигура са наредне слике десно?



Из ове групације је настао и један од најпознатијих графовских проблема, а то је проблем 4 боје. Сада ћемо прво описати како можемо повезати шаховску таблу и проблеме на њој са Теоријом графова, а затим ћемо и дати решења неких од ових проблема, као и поставити још понеки проблем из рекреативне математике, директно повезан са претходним.

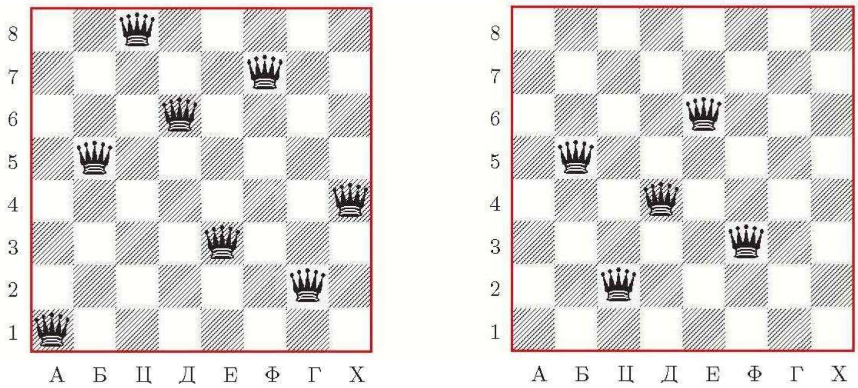
Свакој шаховској фигури може се придружити један граф на следећи начин. Нека поља шаховске табле представљају чворове графа. Из чвора x иде грана ка чвору j ако са поља x дата фигура (у нашем случају дама) може да пређе на поље y. Ово је једна веза теорије графова и шаха. Друга њихова веза долази из Теорије игара. Према Теорији игара, шаховска игра се представља графом чији су чворови поједине шаховске позиције. Овај приступ је веома битан јер се користи у писање рачунарских програма за играња шаха. На основу појединих подграфова овог графа рачунар процењује позицију и бира који је најбољи потез који може да одигра у каснијим деловима партије (за отварање користи огромне базе потеза који су развијани за отварање шаховске партије — још пре рачунара постојала је Шаховска енциклопедија отварања, која је имала 5 томова!).

У графовској линтератури (нпр. [5]) можете наћи терминологију везану за проблематике положаја шаховских фигура на табли (унутрашња и спољашња стабилност графа) и тада Проблем 8 дама преведен на „графовски језик“ гласи:

> Колико има највећих унутрашње стабилних скупова у графу придруженом шаховској фигури дами?

Сада ћемо навести решења овог проблема. Наук је добио сва 92 решења, која се могу добити од наредних 12 основних решења ротирањем (ротацијом) и огледањем (симетријом) шаховске табле (на слици поред тих решења је приказано прво од тих решења):

1°	А1, Б5, Ц8, Д6, Е3, Ф7, Г2, Х4	7°	А2, Б6, Ц8, Д3, Е1, Ф4, Г7, Х5
2°	А1, Б6, Ц8, Д3, Е7, Ф4, Г2, Х5	8°	А2, Б7, Ц3, Д6, Е8, Ф5, Г1, Х4
3°	А2, Б4, Ц6, Д8, Е3, Ф1, Г7, Х5	9°	А2, Б7, Ц5, Д8, Е1, Ф4, Г6, Х3
4°	А2, Б5, Ц7, Д1, Е3, Ф8, Г6, Х4	10°	А3, Б5, Ц2, Д8, Е1, Ф7, Г4, Х6
5°	А2, Б5, Ц7, Д4, Е1, Ф8, Г6, Х3	11°	А3, Б5, Ц8, Д4, Е1, Ф7, Г2, Х6
6°	А2, Б6, Ц1, Д7, Е4, Ф8, Г3, Х5	12°	А3, Б6, Ц2, Д5, Е8, Ф1, Г7, Х4



Сада ћемо дати још неколико занимљивих шаховских проблема.

Шаховска фигура махарџа (понегде се назива и „супердама“) је фигура која се истовремено креће као дама и скакач. Занимљива игра (тзв. махараџа) је везана за ову фигуру.

> Бели има само једног махараџу, а црни све фигуре, које се крећу и налазе на почетку према правилима шаховске игре. Бели је победник ако матира црног, а црни ако поједе махарџу.

Проблем сличан претходном је:

> На колико начина је могуће поставити 10 махараџа на шаховску таблу 10×10?

М. Ристић је показао помоћу рачунара да је то могуће на тачно 4 начина.

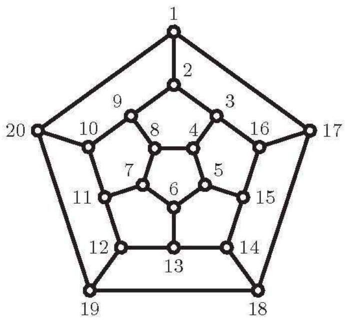
У шаховској литератури познат је и Проблем 5 дама. Он гласи:

> Колико је најмање дама потребно поставити на шаховску таблу (8×8) да би сва поља била нападнута? (Подразумева се да дама напада и поље не којем се налази!)

Потребно је поставити најмање 5 дама! Поставља се питање на колико начина је могуће поставити тих 5 дама. Укупно постоји 4860 решења, која је мукотрпним пребројавањем нашао Сили (мађ. *K. Szily*) 1902.

године. Једно решење је дато на претходној слици десно. Решења проблема 5 дама представљају минималне доминирајуће скупове у графу придруженом шаховској фигури дами.

Енглески математичар сер Вилијам Хамилтон је 1859. године саставио занимљиву слагалицу, која је користила ивице регуларног додекаедра (тачније грана раванског графа који репрезентује додекаедар). На наредној слици (лево) је приказан граф додекаедра са одговарајућом Хамилтоновом контуром (пут у графу који пролази кроз чворове $1-2-3-\ldots-19-20-1$).



30	21	50	9	32	19	52	7
49	10	31	20	51	8	33	18
22	29	48	61	42	27	6	53
11	60	41	28	45	62	17	34
40	23	64	47	26	43	54	5
59	12	25	44	63	46	35	16
24	39	2	57	14	37	4	55
1	58	13	38	3	56	15	36

И пре Хамилтона су се сличним проблемима, који су дошли из рекреативне математике, бавили многи математичари. Најпознатији такав проблем је Проблем коњичког скока којим су се бавили и Ојлер, Моавр, Вандермонд (фра. *Moivre, Vandermonde*) и Киршак (нем. *Kürschak*). На горњој слици десно је приказано једно решење на класичној шаховској табли 8×8. Формулишимо тај проблем.

> Да ли је могуће скакачем обићи сва поља шаховске табле, тако да се свако поље обиђе тачно једанпут?

Даћемо и графовску формулацију Проблема коњичког скока.

> Да ли граф придружен скакачу има Хамилтонов пут?

О Проблему коњичког скока постоји обимна литература. Испитивана је не само егзистенција решења на шаховским таблама различитих димензија (доказано је да има решења на свим правоугаоним таблама димензија $m \times n$ за $m, n \geqslant 3$, изузев табли 3×3, 3×5, 3×6 и 4×4), већ и начин конструкције и број решења.

Иако решење Хамилтонове слагалице није много тешко пронаћи, математичари су и данас заокупљени проблемима везаним за Хамилтонове контуре, као што је Проблем трговачког путника.

> Трговачки путник треба да обиђе n градова (сваки једанпут), тако да трошкови пута буду минимални.

Наведимо и графовску формулацију Проблема трговачког путника.

> У датом тежинском графу одредити Хамилтонову контуру најмање тежине.

Овај класичан проблем Теорије графова има значајно место и у Операционим истраживањима, као и компјутерству (енг. *computer science*). Проблем тражења минималне Хамилтонове контуре изискује много времена (чак и рачунарског!), те је пронађено мноштво хеуристика које дају приближно оптимално решење Проблема трговачког путника. За решавање Проблема трговачког путника користи се метода гранања и одлучивања, која се назива и имплицитна енумерација. За разлику од експлицитне енумерације (код којих пробамо све могуће пермутације скупа чворова), овде простор могућих решења делимо на мање делове (гранање) и то више пута при чему се поједини делови простора решења одбацују на основу процене вредности функције која се минимизира (ограничавање).

Доказано је да је Проблем трговачког путника NP-потпун проблем. Сви познати алгоритми за NP-потпуне проблеме имају експоненцијалну сложеност. То је у вези са хипотезом $P \neq NP$. Ако би за један NP-потпун проблем постојао полиномијални алгоритам, тада би постојао полиномијални алгоритам за сваки NP-проблем.

Генерализације проблема трговачког путника нашле су примене у раду роботских машина који обрађују матичне плоче рачунара, али и у свемирским истраживањима: сателит Росат (заједнички пројекат САД, Енглеске и Немачке) у периоду од 1990. до 1998. године обилазио је око планете Земље и носио је телескоп који је мерио количину X-зрачења које долази са звезда. За уштеду времена и енергије коју троши телескоп, прибегнуто је комбинаторној оптимизацији за тражење Хамилтонове контуре кроз неколико милиона звезда. Тим поступком је посао обављен за дупло краће време.

Наведимо још један проблем који је везан за тражење Хамилтоновог пута у оријентисаном графу.

Грађевинска фирма која треба да заврши $n = 5$ станова располаже 1 екипом водинсталатера и 1 екипом молера. Молери не могу почети са радом у стану у којем водоинсталатери нису завршили свој посао. У k-том стану ($k = 1, 2, \ldots, n$) водоинсталатери треба да раде v_k часова, а молери m_k часова:

$$v_1 = 8, v_2 = 20, v_3 = 7, v_4 = 18, v_5 = 9;$$

$$m_1 = 12, m_2 = 12, m_3 = 15, m_4 = 10, m_5 = 15.$$

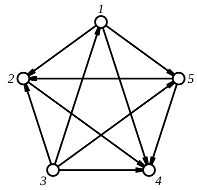
Којим редоследом треба да раде водоинсталатери да би целокупан посао био завршен што је могуће раније?

Решење. Може се показати да водоинсталатери треба да раде у стану i пре него у стану j само ако је

$$\min(v_i, m_j) \leqslant \min(v_j, m_i).$$

У противном би екипа молера губила више времена него што је потребно.

Формирајно оријентисан граф са чворовима $1, 2, 3, 4, 5$ (то су станови) у коме од чвора i иде грана ка чвору j ако је $\min(v_i, m_j) \leqslant \min(v_j, m_i)$. Одредјивање редоследа станова се своди на тражење Хамилтоновог пута у овом оријентисаном графу (који је представљен на следећој слици).

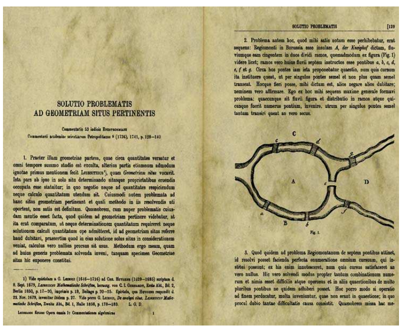


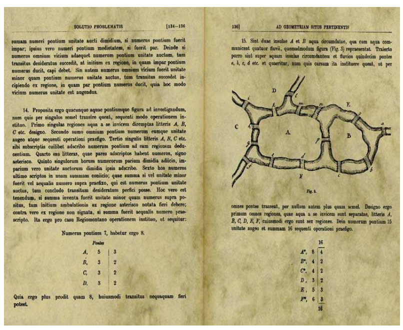
Једини Хамилтонов пут је $3, 1, 5, 2, 4$. Тим редоследом треба и мајстори да раде станове. ■

Осврнимо се још на резултате Леонарда Ојлера, који је директно повезан са почецима Теорије графова као математичке области.

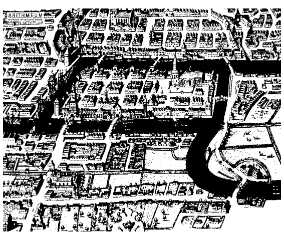
Швајцарском математичару Леонарду Ојлеру су током боравка у Кенигсбергу (нем. *Königsberg*; данашњи Калињинград) мештани поставили проблем да пређе преко свих 7 мостова (који спајају 2 обале реке Прегел међусобно и са 2 острва) тако да преко сваког пређе тачно једанпут. Ојлер је дао одречан одговор.

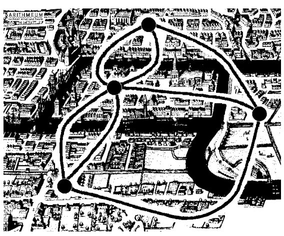
26. августа 1735. године, Ојлер је презентовао свој рад на овом проблему Сант Петерсбургшкој академији наука доказујући да је такав обилазак мостова немогућ уз напомену да се његов метод може проширити на произвољан распоред острва и мостова. Тачније, Ојлер је само формулисао потребне и довољне услове да такав обилазак постоји, али није сматрао да је потребно да покаже довољне услове у општем случају. Први потпуно коректан доказ овог тврђења је дао Хирхолцер (нем. *Hierholzer*). На наредној слици су приказани делови тог рада.

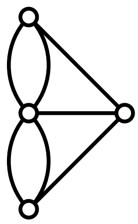

SOLUTIO PROBLEMATIS
AD GEOMETRIAM SITUS PERTINENTIS



На наредној слици лево је представљена мапа Кенигсберга (из времена Ојлера) са његовим мостовима. Ојлер је свакој обали и острву придружио чворове графа, а гране између њих су били мостови. Тако је он добио један мултиграф, који је представљен на слици десно.







Ојлер је чланак о Проблему Кенигсбергшких мостова написао 1736. године (и стога се та година узима за оснивање теорије графова) и он је први пут објављен 1741. године, али је тада пробудио мало интереса међу осталим математичарима. Неке странице овог рада су приказане на наредној слици. Овај проблем и резултат су остали мало познати до краја 19. века када су га енглески математичари Џорџ Лукас (енг. *George Lucas*, 1882.) и Раус Бол (енг. *Rouse Ball*, 1892.) укључили у своје књиге о рекреативној математици. Појам Ојлеровог графа за граф који се може нацртати не подижући оловку са папира се одомаћио захваљујући Кенигу, који га је искористио у својој пионирској књизи о Теорији графова из 1936. године.

Тражење Ојлеровог пута налази примену у још неким проблемима Комбинаторне оптимизације, попут Проблема кинеског поштара, али и у раду са ласерима, где нам је циљ да оптимално користимо ласер и самим тим појефтинимо цену финалног производа (методама Комбинаторне оптимизације постигнута је уштеда времена рада и до 90%).

Због великог спектра примена, као и изузетно једноставне везе дефиниције и основних својстава, графови су они нашли и велику примену не само у другим математичким областима (неколико илустрација смо видели у претходном тексту) попут комбинаторике, комбинаторне оптимизације, операционих истраживања, линеарне алгебре, комплексне анализе, него и у другим (нематематичким) наукама као што су електротехника, рачунарство, хемија, физика, биологија, социологија, војне науке...

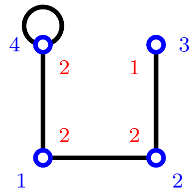
Основни појмови

Дефиниција 1. Граф G је уређени пар (V, E). Елементи скупа V се зову *чворови*, а елементи скупа E *гране* графа G.

Дефиниција 2. Број грана које се стичу у чвору v зове се *степен чвора* v и означава се са $d(v)$.

Граф Γ је *регуларан* ако су степени свих његових чворова једнаки.

Пример 1. Одредити степене свих чворова графа Γ. Да ли је граф Γ регуларан?



Степени чворова су $d(1) = 2$, $d(2) = 2$, $d(3) = 1$ и $d(4) = 2$. Стога граф Γ НИЈЕ регуларан.

Теорема 1. *У графу G постоје бар 2 чвора истог степена.*

Доказ. Претпоставимо супротно да не постоје 2 чвора истог степена.

Неоријентисан граф Γ има n чворова те како сваки његов чвор v може бити суседан са неким од преосталих $n-1$ чворова (из $V \setminus \{v\}$) добијамо да за степен сваког његовог чвора v важи да је $d(v) \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Како не постоје 2 чвора истог степена и како укупно има n чворова то ће они за степене имати све бројеве из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Али тада имамо чвор чији је степен 0 (то је чвор који није суседан ни са једним од преосталих), као и чвор чији је степен $n-1$ (то је чвор који је суседан са свим осталим чворовима), што је немогуће.

Како смо добили котрадикцију, полазна претпоставка да не постоје бар 2 чвора истог степена није тачна, чиме је тврђење теореме показано. $\square$

Теорема 2. *У графу G важи $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_n) = 2m$.*

Доказ. Степен чвора представља број грана које су инцидентне са датим чвором. Стога, ако саберемо све степене чворова, ми ћемо пребројати све гране и то сваку 2 пута (по једном код сваког њеног краја). Тиме је тврђење показано. $\square$

Теорема 3. *У графу G број чворова непарног степена је паран.*

Доказ. Ово тврђење је директна последица претходне теореме, јер је број на десној страни једнакости паран, па и збир на левој страни мора бити паран, што је могуће само уколико је број чворова непарног степена паран. $\square$

Сада ћемо навести неколико дефиниција и тврђења везаних за оријантисане графове (графове код којих је битна оријентација грана – пример таквог графа је план града са једносмерним улицама).

Дефиниција 3. За грану $e = (u, v)$ ориј. графа (V, ϱ) кажемо да *води* из чвора u у чвор v (e *излази* из чвора u, а *улази* у чвор v).

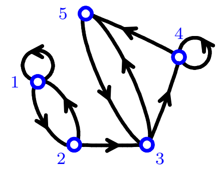
Улазни степен $d^-(v)$ *чвора* v је број грана које улазе у v.

Излазни степен $d^+(v)$ *чвора* v је број грана које излазе из v.

Улазни скуп $I(v)$ *чвора* v је скуп чворова из којих води грана у v, тј. $I(v) = \{x \mid (x, v) \in \varrho\}$.

Излазни скуп $O(v)$ *чвора* v је скуп чворова у које води грана из v, тј. $O(v) = \{x \mid (v, x) \in E\}$.

Пример 2. Одредити $d^-(v)$ и $d^+(v)$, као и $I(v)$ и $O(v)$ за сваки чвор v графа:



$I(1) = \{1, 2\}$	$\Rightarrow$	$d^-(1) = 2,$	$O(1) = \{1, 2\}$	$\Rightarrow$	$d^+(1) = 2.$
$I(2) = \{1\}$	$\Rightarrow$	$d^-(2) = 1,$	$O(2) = \{1, 3\}$	$\Rightarrow$	$d^+(2) = 2.$
$I(3) = \{2, 5\}$	$\Rightarrow$	$d^-(3) = 2,$	$O(3) = \{4, 5\}$	$\Rightarrow$	$d^+(3) = 2.$
$I(4) = \{3, 4\}$	$\Rightarrow$	$d^-(4) = 2,$	$O(4) = \{4, 5\}$	$\Rightarrow$	$d^+(4) = 2.$
$I(5) = \{3, 4\}$	$\Rightarrow$	$d^-(5) = 2,$	$O(5) = \{3\}$	$\Rightarrow$	$d^+(5) = 1.$

Теорема 4. У оријентисаном графу Γ важи

$$d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots + d^-(v_n) = m = d^+(v_1) + d^+(v_2) + \ldots + d^+(v_n).$$

Доказ. Доказ је аналоган доказу Теореме 2, само што сада кад бројимо улазне степене, бројимо гране које улазе у чвор и то нам даје прву једнакост $d^-(v_1) + d^-(v_2) + \ldots + d^-(v_n) = m$, док кад бројимо излазне степене, бројимо гране које излазе из чворова, што је други део једнакости, $d^+(v_1) + d^+(v_2) + \ldots + d^+(v_n) = m$. □

Дефиниција 4. Чворови u и v графа G су *повезани* ако у G постоји пут чији су крајњи чворови u и v. Граф G је *повезан* ако су свака два његова чвора повезана.

Дефиниција 5. Пут који пролази кроз све гране графа G тачно једном назива се *Ојлеров пут*, а затворен пут који пролази кроз све гране графа G тачно једном назива се *Ојлерова контура*.

Теорема 5. Граф G садржи Ојлерову контуру ако и само ако је повезан и сваки чвор има паран степен.

Теорема 6. Граф G садржи Ојлеров пут ако и само ако је повезан и има највише 2 чвора непарног степена.

На основу овог тврђења следи да граф који одговара Кенигсбершким мостовима (који има 4 чвора непарног степена) нема Ојлерову контуру.

Задаци

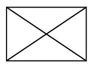
1. (6. разред, Савезно 1997)
На једном острву постоји укупно 9 држава. Доказати да на овом острву постоји држава која међу њима има паран број пријатељских држава. Ако је држава A пријатељска са државом B, онда је и држава B пријатељска са државом A.

2. (7. разред, Савезно 1998)
Може ли на Математичкој олимпијади присуствовати 1999 учесника (рачунајући и госте), ако сваки од њих има тачно 3 пријатеља међу учесницима?

3. (*1. разред, Савезно 1990*)
Цар жели да сагради дворац у којем ће бити 1990 соба у једном нивоу, тако да важе следећи услови:
1. Број врата на свакој соби је 0, 1 или 2.
2. Између сваке две собе су највише једна врата, а из сваке собе на улицу воде највише једна врата.
3. Број врата према улици једнак је 19, а број соба са једним вратима је 90.
Да ли је могуће саградити такав дворац?

4. (*1. разред, А и Б категорија, Републичко 2003*)
Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

5. (*1. разред, Покрајинско 1990, Косово*)
Може ли се једним потезом нацртати фигура са слике?



Решења

1. $d(v_1)+d(v_2)+\ldots+d(v_9) = 2m \Rightarrow$ неки од степена $d(v_1), d(v_2), \ldots, d(v_9)$ мора бити паран број, тј. постоји држава која међу њима има паран број пријатељских држава.

2. $d(v_1) + d(v_2) + \ldots + d(v_{1999}) = 3 + 3 + \ldots + 3 = 3 \cdot 1999 = 2m$ $\lightning$

3. Овде смо спољашњост дворца заменили једним чвором и гране представљају врата.
Дакле, имамо 1991 чвор, од чега је:

- 1 степена 19,
- 90 је степена 1,
- преосталих 1990 су степена 0 или 2.

$\sum d_i = 19 + 90 \cdot 1 + k \cdot 0 + (1900 - k) \cdot 2$ $\lightning$

4. У датом скупу постоји особа која је примила макар 10 писама (иначе би број примљених писама био мањи од $9 \cdot 20 = 180$, а тај број мора бити једнак броју послатих писама, који је $10 \cdot 20 = 200$). Та особа је послала 10 писама неким од преосталих 19 особа, а примила макар 10 писама од истих 19 особа. Ако не би дошло до преклапања, поред уочене особе било би још $10 + 10 = 20 > 19$ особа. Следи да је та особа примила писмо од особе која јој је и послала писмо, што је и требало доказати.

5. Како су степени чворова 3,3,3,3,4 не постоји Ојлеров пут, па се ова слика не може нацртати једним потезом.

1 Литература

[1] James A. Anderson, *Diskretna matematika sa kombinatorikom*, Računarski fakultet, Beograd, 2005.

[2] Владимир Балтић, *Дискретне математичке структуре – збирка испитних и домаћих задатака из 2008. и 2009.*, ФОН, Београд, 2010.

[3] Владимир Балтић, Душан Ђукић, Ђорђе Кртинић, Иван Матић, *Припремни задаци за такмичења из математике ученика средњих школа*, ДМС, Београд, 2008.

[4] Ken Bogart, Cliff Stein, *Discrete Math in Computer Science*, web draft, 2002.

[5] Dragoš Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.

[6] Dragoš Cvetković, Slobodan Simić *Diskretna matematika, Matematika za kompjuterske nauke*, Libra, Beograd, 2000.

[7] Dragoš Cvetković, Slobodan Simić *Odabrana poglavlja iz diskretne matematike*, Akademska misao, Beograd, 2002.

[8] Мирјана Чангаловић, Весна Којић, Владимир Балтић, *Дискретне математичке структуре*, Факултет организационих наука, Београд, 2009.

[9] John A. Dossey, Albert D. Otto, Lawrence E. Spence, Charles Vanden Eynden, *Discrete Mathematics*, Pearson, Addison Wesley, Boston, 2006.

[10] Ronald L. Graham, Martin Grötschel, László Lovász (editors), *Handbook of Combinatorics*, Volume 1 & 2, North-Holland, 1995.

[11] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and combinatorial mathematics: an applied introduction 3rd ed*, Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

[12] Frank Harary, *Graph Theory*, Narosa Publishing House, 1995.

[13] László Lovász, József Pelikán, Katalin Vesztergombi, *Discrete Mathematics, Elementary and Beyond*, Springer, 2003.

[14] Vojislav Petrović, *Teorija grafova*, Novi Sad, 1998.

[15] Kenet H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, McGraw Hill, Boston, 1999.

[16] Kenet H. Rosen, *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*, CRC Press, Boston, 2000.

[17] Neil J.A. Sloane, *Online Encyclopedia of Integer Sequences*, `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[18] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[19] Драган Стевановић, Владимир Балтић, Слободан Симић, Мирослав Ћирић, *Дискретна математика – основе комбинаторике и теорије графова*, ДМС, Београд, 2008.

[20] Dragan Stevanović, Marko Milošević, Vladimir Baltić, *Diskretna matematika, Zbirka rešenih zadataka*, DMS, Beograd, 2004.

[21] George J. Summers, *The great book of mind teasers and mind puzzlers*, Sterling Publishing Co., New York, 1986.

[22] Darko Veljan, *Kombinatorika sa teorijom grafova*, Školska knjiga, Zagreb, 1989.