1 KVADRIRANJE CIJELIH BROJEVA

Definicija 1.1 *Funkciju $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, f(x) = x^2$,koja svakom cijelom broju $x \in \mathbb{Z}$ pridruzuje cijeli broj $x^2 \in \mathbb{Z}$,nazivamo kvadriranjem u skupu $\mathbb{Z}$.*

Primjer 1.1 *Napisati kraće proizvod jednakih faktora:*

(a) $7 \cdot 7 = 7^2$

(b) $15 \cdot 15 = 15^2$

(c) $(-9) \cdot (-9) = (-9)^2$

(d) $x \cdot x = x^2$

Primjer 1.2 *Napisati kao proizvod:*

(a) $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

(b) $23^2 = 23 \cdot 23 = 529$

(c) $(-9)^2 = (-9) \cdot (-9) = 81$

Primjedba 1.1 ***Kvadrat bilo kojeg cijelog broja uvijek je pozitivan cio broj***

1. Izračunaj vrijednost izraza:

$$2^2 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 2^2 + 2 \cdot (2^2 + 3^2) =$$

$$= 4 + 2 \cdot 9 - 5 \cdot 4 + 2 \cdot (4 + 9) =$$

$$4 + 18 - 20 + 26 = 28$$

2. U funkciji $f(x) = x^2$izračunaj $f(x)$,ako je

   (a) $x = 5$

   (b) $x = -15$

   RJEŠENJE:

   (a)

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 \\ x = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(5) = 5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

(b)

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^2 \\ x=-15 \end{array}\right\}\Rightarrow \quad f(-15)=(-15)^2=(-15)\cdot(-15)=225$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati:

   (a) $(-5)^2 =$

   (b) $(-20)^2 =$

   (c) $35^2 =$

   (d) $136^2 =$

2. U funkciji $f(x)=x^2$ izračunaj $f(x)$,ako je

   (a) $x=-3$

   (b) $x=10$

   (c) $x=-34$

3. U funkciji $f(x)=x^2+2$ izračunaj $f(x)$,ako je

   (a) $x=-3$

   (b) $x=10$

   (c) $x=-34$

4. Za $x=5$ i $f(x)=x^2$ izračunaj:

   (a) $f(x+5)$

   (b) $f(1-x)$

   (c) $f(2x-1)$

5. Izračunati vrijednost izraza:

   (a) $\{2^2-[2^2+3^2(2^2-3^2)-4\cdot 2^2]-10\cdot 2^2\}=$

   (b) $12^2:3^2+10^2:[2\cdot 5^2-(10^2:2^2):5]+10=$

6. Popuniti tabelu:

x	-2	-1	0	$0,5$	$0,01$	$1,5$
x^2						

7. Popuniti tabelu:

x	-3		$0,01$			$2,5$
x^2		36		$0,04$	225	

8. Popuniti tabelu:

x	-2	-1	0	$0,5$	$0,01$	$1,5$
x^2+1						

2 KVADRIRANJE RACIONALNIH BROJEVA

Definicija 2.1 *Funkciju $f:\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{Q}, f(x)=x^2$,koja svakom racionalnom broju $x\in\mathbb{Q}$ pridruzuje racionalni broj $x^2\in\mathbb{Q}$,nazivamo kvadriranjem u skupu $\mathbb{Q}$.*

1. Izračunati:
   (a) $(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$
   (b) $(-\frac{3}{4})^2=(-\frac{3}{4})\cdot(-\frac{3}{4})=\frac{9}{16}$
   (c) $(0,2)^2=(\frac{2}{10})^2=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{25}$
2. U funkciji $f(x)=x^2$ izračunaj $f(x)$,ako je
   (a) $x=\frac{1}{2}$
   (b) $x=-\frac{2}{5}$

   RJEŠENJE:

(a)

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

(b)

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = x^2 \\ x = -\frac{2}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \ f(-\frac{2}{5}) = (-\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$$

Domaći zadatak:

1. U funkciji $f(x) = x^2$ izračunaj $f(x)$,ako je

   (a) $x = -\frac{5}{6}$

   (b) $x = 0,7$

   (c) $x = -2\frac{1}{2}$

2. U funkciji $f(x) = x^2 + 2$ izračunaj $f(x)$,ako je

   (a) $x = -0,6$

   (b) $x = -3\frac{1}{5}$

3 KVADRATNI KORIJEN

Definicija 3.1 *Kvadratnim (ili drugim) korijenom racionalnog broja a* $(a \geq 0)$ *nazivamo broj x čiji je kvadrat jednak a i pišemo:*

$$\sqrt{a} = x, \quad x^2 = a \quad (a \geq 0)$$

a-nazivamo potkorjena veličina ili radikant,a x je korijen broja a.

Primjer 3.1 *Brojevi* $+5$ *i* -5 *su kvadratni korijeni broja 25 jer je* $5^2 = 25$ *i* $(-5)^2 = 25$

1. Riješiti jednačinu:

$$x^2 = 49$$

$$x = \pm 7$$

Dakle,jednačina ima dva rješenja $x_1 = 7$ i $x_2 = -7$.Ako posmatramo samo pozitivno rješenje za takav korijn kažemo da je <u>aritmetički</u>.

1. Izračunati korijene:

   (a) $\sqrt{4} = 2$

   (b) $\sqrt{144} = 12$

   (c) $\sqrt{400} = 20$

2. Izračunati vrijednost izraza:

   (a)

$$3\sqrt{36} + 2\sqrt{16} - 5\sqrt{25} + 2\sqrt{49} = 3 \cdot 6 + 2 \cdot 4 - 5 \cdot 5 + 2 \cdot 7 =$$

$$= 18 + 8 - 25 + 14 = 15$$

   (b)

$$\sqrt{6^2 + 8^2} - \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{36 + 64} - \sqrt{144 + 25} =$$
$$= \sqrt{100} - \sqrt{169} = 10 - 13 = -3$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati vrijednost izraza:

   (a) $-15\sqrt{4} + 14\sqrt{9} + 12\sqrt{4} - 12\sqrt{36} =$

   (b) $\sqrt{45^2 - 36^2} =$

3.1 Osobine korijena

Vrijede sledeće dvije osobine:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

1. Izračunati:

   (a) $\sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$

(b) $$\sqrt{\frac{256}{400}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{400}} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

2. Izračunati:

$$\sqrt{\frac{4\cdot 81}{9\cdot 16}} = \frac{\sqrt{4\cdot 81}}{\sqrt{9\cdot 16}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4}\sqrt{81}}{\sqrt{9}\sqrt{16}} = \frac{2\cdot 9}{3\cdot 4} =$$

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$$

<u>**Domaći zadatak:**</u>

1. Izračunati:

(a) $\sqrt{0,01\cdot 1,21} =$

(b) $\sqrt{\frac{1,44}{2,25}} =$

(c) $\sqrt{0,81\cdot 2,25} =$

(d) $\sqrt{\frac{49\cdot 9\cdot 16}{25\cdot 36\cdot 64}} =$

(e) $\sqrt{7-\frac{3}{4}} - \sqrt{2+\frac{7}{9}} =$

(f) $\frac{3}{4}\cdot\sqrt{5+\frac{1}{16}} + \sqrt{2-\frac{1}{25}} =$

(g) $\sqrt{\frac{0,36}{49}} + \sqrt{9} =$

2. Izračunati:

(a) $\sqrt{4+(\frac{5}{6})^2}\cdot\sqrt{5+\frac{5}{4}} : \sqrt{1+\frac{5}{4}} =$

(b) $\sqrt{2-(\frac{1}{5})^2}\cdot\sqrt{3+(\frac{1}{4})^2}\cdot(\frac{1}{3})^2$

(c) $\sqrt{3+(\frac{1}{4})^2}\cdot\sqrt{2-(\frac{1}{5})^2} : 7^2 =$

(d) $\sqrt{5+\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{5+\frac{4}{9}} : \sqrt{2-(\frac{1}{5})^2} =$

(e) $2 \cdot \sqrt{5+\frac{5}{4}} : \sqrt{4+(\frac{5}{6})^2} \cdot \frac{1}{6} =$

(f) $\sqrt{6+\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{3-\frac{74}{81}} : \sqrt{8-\frac{8}{9}} =$

3. Obavi naznačene operacije:

(a) $(36\sqrt{3} : 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} =$

(b) $(24\sqrt{3} : 6\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}) \cdot \sqrt{5} =$

(c) $(2\sqrt{6} + 4\sqrt{54} - 2\sqrt{150} + 2\sqrt{294}) : \sqrt{6} =$

4. Obaviti naznačene operacije:

(a) $\sqrt{2x^2 - 3x + 16}$ za $x = 4$

(b) $\sqrt{3a^2 - 5a + 21}$ za $a = -5$

(c) $\sqrt{7x^2 - 9x - 23}$ za $x = -9$

(d) $\sqrt{4a^2 + 3a + 8}$ za $a = 7$

5. Izračunati vrijednost izraza:

(a) $A = 2x^2 + x\sqrt{3} + 5$ za $x = 2\sqrt{3}$

(b) $A = 3x^2 - 2\sqrt{2}x - 6$ za $x = 3\sqrt{2}$

(c) $A = 5a^2 - 2a\sqrt{5} + 8$ za $a = -\sqrt{5}$

(d) $A = -2x^2 - 5x - 2 + 5\sqrt{2}$ za $x = \sqrt{5}$

3.2 Jednačine oblika $ax^2 = b, (a \neq 0)$

1. Riješiti jednačinu:

$$x^2 = 64$$

$$x = \pm\sqrt{64}$$

$$x = \pm 8$$

$$x_1 = 8, x_2 = -8$$

2. Riješiti jednačinu:

$$x^2 - \frac{25}{49} = 0$$

$$x^2 = \frac{25}{49}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{49}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}}$$

$$x = \pm\frac{5}{7}$$

$$x_1 = \frac{5}{7}, x_2 = -\frac{5}{7}$$

3. Riješiti jednačinu:

$$25x^2 - 49 = 0$$

$$25x^2 = 49| : 25$$

$$x^2 = \frac{49}{25}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{49}{25}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{25}}$$

$$x = \pm\frac{7}{5}$$

$$x_1 = \frac{7}{5}, x_2 = -\frac{7}{5}$$

4. Riješiti jednačinu:

$$0,04 - 25x^2 = 0$$

$$-25x^2 = -0,04| \cdot (-1)$$

$$25x^2 = \frac{4}{100}| : 25$$

$$x^2 = \frac{4}{100} : 25$$

$$x^2 = \frac{4}{100} \cdot \frac{1}{25}$$

$$x^2 = \frac{4}{2500}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{4}{2500}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{2500}}$$

$$x = \pm\frac{2}{50}$$

$$x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = -\frac{1}{25}$$

5. Riješiti jednačinu:

$$\frac{1}{2}x^2 = 5\frac{5}{9}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{50}{9}$$

$$x^2 = \frac{50}{9} : \frac{1}{2}$$

$$x^2 = \frac{50}{9} \cdot \frac{2}{1}$$

$$x^2 = \frac{100}{9}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{100}{9}}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{9}}$$

$$x = \pm\frac{10}{3}$$

$$x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = -\frac{10}{3}$$

Domaći zadatak:

1. Riješit jednačinu:

   (a) $x^2 = 81$

   (b) $x^2 = 121$

   (c) $x^2 = \frac{1}{9}$

   (d) $x^2 = \frac{121}{256}$

   (e) $x^2 = 0,36$

   (f) $x^2 = 2,56$

   (g) $x^2 = 1,44$

2. Riješit jednačinu:

   (a) $3x^2 - 27 = 0$

   (b) $0,04x^2 - 36 = 0$

   (c) $-81x^2 + 36 = 0$

   (d) $0,04 - 25x^2 = 0$

3. Riješit jednačinu:

   (a) $7x^2 - 175 = 0$

   (b) $0,36x^2 - 1 = 0$

   (c) $5,29 - 0,04x^2 = 0$

   (d) $961x^2 - 1 = 0$

   (e) $-\frac{2}{7}x^2 + 6 = 0$

   (f) $4x^2 - 37 = 0$

   (g) $0,5x^2 - \frac{9}{50} = 0$

4. Riješit jednačinu:

   (a) $5x^2 - 92 = 408$

(b) $4x^2 - 25 = 375$

(c) $72 - 2x^2 = -28$

(d) $4x^2 + 92 = 492$

(e) $5x^2 - 34 = 466$

(f) $5 - 3x^2 = -70$

5. Riješit jednačinu:

(a) $\sqrt{x} = 8$

(b) $\sqrt{x-1} = 5$

(c) $\sqrt{x-2} - 5 = 1$

(d) $6 - \sqrt{x-3} = 4$

(e) $\sqrt{x+5} = 2\sqrt{3}$

(f) $\sqrt{x+1} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

(g) $3\sqrt{3} + \sqrt{2x+1} = 4\sqrt{3}$

4 SKUP IRACIONALNIH BROJEVA $\mathbb{I}$

Rješavanjem jednačine

$$x^2 = 2$$
$$x = \pm\sqrt{2}$$

postavlja se pitanje da li je $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?
Broj $\sqrt{2}$ nije racionalan broj,tj.$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
Na ovaj način smo pokazali da postoji i brojevi koji ne pripadaju skupu racionalnih brojeva i da skup racionalnih brojeva možemo proširiti novim skupom.Taj skup nazivamo **skup iracionalnih brojeva u oznaci $\mathbb{I}$**.
Brojeve oblika $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{15}, -\sqrt{7}, ...$ nazivamo iracionalni brojevi.

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135...$$
$$\sqrt{3} \approx 1,7320508...$$
$$\sqrt{5} \approx 2,2360679...$$
$$\sqrt{7} \approx 2,6457513...$$

i td.

Definicija 4.1 *Skup koji se sastoji od svih racionalnih i svih iracionalnih brojeva nazivamo skup realnih brojeva (u oznaci $\mathbb{R}$).*

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \{\}, \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}.$$

4.1 Približna vrijednost decimalnog broja

(a) Ako je cifra iza decimale na koju zaokružujemo decimalan broj **veća od 5** onda cifru koju zaokružujemo povećamo za 1.

Primjer 4.1 *Napisati približno na jednu decimalu broj* $3,27 \approx 3,3$

(b) Ako je cifra iza decimale na koju zaokružujemo decimalan broj **manja od 5** onda cifra koju zaokružujemo ostaje nepromijenjena.

Primjer 4.2 *Napisati približno na jednu decimalu broj* $5,44 \approx 5,4$

(c) Ako je cifra iza decimale na koju zaokružujemo decimalan broj **5** onda:

(i) cifra na koju zaokružujemo ostaje nepromijenjena ako je ona **paran broj**

(ii) cifra na koju zaokružujemo poveća za 1 ako je ona **neparan broj**.

Primjer 4.3 *Napisati približno na jednu decimalu broj*

$$3,2521 \approx 3,2$$

$$3,7541 \approx 3,8$$

1. Napisati približno na jednu decimalu broj:

(a) $36,134 \approx 36,1$

(b) $0,513 \approx 0,5$

(c) $0,78 \approx 0,8$

(d) $3,135 \approx 3,1$

(e) $3,351 \approx 3,4$

(f) $136,458 \approx 136,4$

2. Napisati približno na dvije decimale broj:

   (a) $0,51347 \approx 0,51$

   (b) $35,3478 \approx 35,35$

   (c) $0,70528 \approx 0,70$

Domaći zadatak:

1. Napisati približno na dvije decimale broj:

   (a) $38,75678$

   (b) $0,756723$

   (c) $0,387563$

   (d) $3,67536$

   (e) $212,524578$

2. Napisati približno na tri decimale broj:

   (a) $18,0785$

   (b) $0,10352$

   (c) $0,7583857$

   (d) $3,2142365$

   (e) $21,524578$

3. Izračunaj vrijednost izraza:

   (a) $3,712 + 0,527 + 2,306 + 4,256 =$

   (b) $-2,7345 + 3,524 - 6,7378 - 2,783 =$

   tako da prethodne sabirke napišeš na približno jednu decimalu.

5 SKUP REALNIH BROJEVA $\mathbb{R}$

Prvo smo se susreli sa skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$$

pa smo imali:$1 + 1 = 2 \in \mathbb{N}, 5 \cdot 7 = 35 \in \mathbb{N}$ (zbir dva prirodna broja je opet prirodan broj,proizvod takođe.)
Međutim,$1 - 7 =?$.
To je razlog proširenja skupa $\mathbb{N}$ novim skupom cijelih brojeva (u oznaci $\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, 4, ...\}$$

ili

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$$

Zbir,razlika i proivod dva cijela broja opet je cio broj.Međutim,
$10 : 2 = 5$,$3 : 4 =?$
Skup u kome je izvodljiva i operacija dijeljenja (osim dijeljenja nulom) zove se skup racionalnih brojeva a označavamo ga sa $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} | p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

Elemente skupa $\mathbb{Q}$ nazivamo racionalni brojevi ili razlomci i to su brojevi oblika

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{6}{11}, -\frac{2}{5}, ...$$

$$\frac{7}{1}, -\frac{11}{1}, \frac{5}{5} = 1, \frac{11}{11} = 1, ...$$

$$0,333... = \frac{1}{3}, 0,272727... = \frac{3}{11}, ...$$

Takođe smo naučili i skup iracionalnih brojeva:

$$-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, ...$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$$

6 RAČUNSKE OPERACIJE S REALNIM BROJEVIMA

Primjer 6.1 *Izračunati:*

(a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}\approx 1,73+1,41\approx 3,14$

(b) $\sqrt{5}-\sqrt{2}\approx 2,24-1,41\approx 0,83$

(c) $\sqrt{3}+7\approx 1,73+7\approx 8,73$

(d) $\sqrt{3}:\sqrt{2}\approx 1,73:1,41\approx 1,23$

1. Izračunati:

   (a)$3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}=0$

   (b)$\sqrt{7}+3\sqrt{7}+2\sqrt{7}+8\sqrt{7}=14\sqrt{7}\approx 14\cdot 2,64\approx 36,96$

   (c)
$$\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{128}=\sqrt{4\cdot 2}+\sqrt{16\cdot 2}-\sqrt{64\cdot 2}=$$
$$2\sqrt{2}+4\sqrt{2}-8\sqrt{2}=-2\sqrt{2}\approx -2\cdot 1,41\approx 2,82$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati:

   (a) $5\sqrt{3}-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}+\sqrt{3}=$

   (b) $\sqrt{75}+\sqrt{27}+2\sqrt{12}-5\sqrt{108}=$

   (c) $8\sqrt{11}-7\sqrt{11}-3\sqrt{11}+2\sqrt{11}=$

   (d) $2\sqrt{3}+6\sqrt{5}-8\sqrt{3}+6\sqrt{5}=$

2. Izračunati približnu vrijednost izraza:

   (a) $2\sqrt{2}+3\sqrt{2}=$

   (b) $7\sqrt{3}-4\sqrt{3}=$

   (c) $7\sqrt{5}-3\sqrt{3}-2\sqrt{2}=$

   (d) $8\sqrt{5}+5\sqrt{3}-8\sqrt{2}=$

   (e) $7\sqrt{3}-2\sqrt{2}+5\sqrt{3}=$

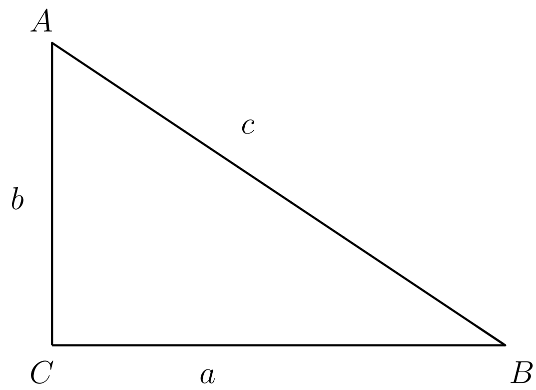
3. Izračunati vrijednost izraza:

   (a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\left[2\sqrt{3}-(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})\right]=$

   (b) $\left[5\sqrt{3}+(2\sqrt{3}-5\sqrt{2})-4\sqrt{3}\right]-4\sqrt{2}=$

7 PITAGORINA TEOREMA

Posmatrajmo pravougli trougao:



a,b-katete;c-hipotenuza

$\measuredangle ACB = 90^\circ$

Teorem 7.1 *(Pitagora) Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama,tj.vrijedi:*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

1. Izračunaj dužinu hipotenuze pravouglog trougla ako su mu poznate katete 4cm i 3 cm?

$$\left.\begin{aligned} a &= 4cm \\ b &= 3cm \\ c &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2 \\ c^2 &= 4^2+3^2 \\ c^2 &= 16+9 \\ c^2 &= 25 \\ c &= \sqrt{25} \\ c &= 5cm \end{aligned}$$

2. Ako su date hipotenuza 13cm i jedna kateta 5cm pravouglog trougla,izračunati njegovu drugu katetu?

$$\left.\begin{aligned} a &= 5cm \\ c &= 13cm \\ b &=? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ 13^2 &= 5^2 + b^2 \\ 169 &= 25 + b^2 \\ 25 + b^2 &= 169 \\ b^2 &= 169 - 25 \\ b^2 &= 144 \\ b &= \sqrt{144} \\ b &= 12cm \end{aligned}$$

3. Izravcunaj hipotenuzu jednakokrakog pravouglog trougla čija je kateta 8cm?

$$\left.\begin{aligned} a &= 8cm \\ b &= 8cm \\ c &=? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 8^2 + 8^2 \\ c^2 &= 64 + 64 \\ c^2 &= 128 \\ c &= \sqrt{128} \\ c &= \sqrt{2 \cdot 64} \\ c &= 8\sqrt{2} \\ c &\approx 8 \cdot 1,41 \\ c &\approx 11,28cm \end{aligned}$$

4. Površina pravouglog trougla je $24cm^2$,a dužina jedne katete je 5cm.Odrediti obim tog trougla?

$$\left.\begin{aligned} P &= 24cm^2 \\ a &= 8cm \\ b &=? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} P &= \frac{a \cdot b}{2} \\ 24 &= \frac{8 \cdot b}{2} \\ 48 &= 8b \\ b &= 48 : 8 \\ &\underline{b = 6cm} \\ c^2 &= a^2 + b^2 \\ c^2 &= 8^2 + 6^2 \\ c^2 &= 64 + 36 \\ c^2 &= 100 \\ c &= \sqrt{100} \\ &\underline{c = 10cm} \\ O &= a + b + c \\ O &= 8cm + 6cm + 10cm \\ &\underline{O = 24cm} \end{aligned}$$

5. Armin na kanapu dugom 20m drži zmaja.Na kojoj visini se nalazi zmaj ako je tačka na tlu koja je vertikalno ispod zmaja udaljena od Armina 12m?

$$20^2 = 12^2 + x^2$$

$$x^2 = 20^2 - 12^2$$

$$x^2 = 400 - 144$$

$$x^2 = 256$$

$$x = \sqrt{256}$$

$$\underline{x = 16m}$$

Domaći zadatak:

1. Neka su stranice a i b katete a c hipotenuza.Ako su nam date dvije stranice naći treću:

   (a) $a = 15cm, c = 25cm$

   (b) $b = 10cm, c = 12,5cm$

(c) $a = 20cm, b = 72cm$

(d) $a = \sqrt{3}cm, b = 2cm$

(e) $b = 2cm, c = \sqrt{5}cm$

(f) $a = \sqrt{2}cm, c = \sqrt{3}cm$

2. Date su katete,izračunaj hipotenuzu pravouglog trougla:

   (a) $a = 12cm, b = 5cm$

   (b) $a = 15cm, b = 8cm$

   (c) $a = 35cm, b = 12cm$

   (d) $a = 1,4cm, b = 4,8cm$

   (e) $a = \frac{3}{5}cm, b = 1\frac{3}{4}cm$

3. Data je hipotenuza i jedna kateta.Odrediti drugu katetu pravouglog trougla:

   (a) $c = 25cm, b = 24cm$

   (b) $c = 6,5cm, b = 5,6cm$

   (c) $c = 4\frac{5}{6}cm, a = \frac{10}{3}cm$

   (d) $c = 2\frac{15}{29}cm, a = 2\frac{1}{5}cm$

4. Pravougli trougao ima katete dužine a i b,a hipotenuzu c.
   Izračunaj treću,ako su date dvije stranice.

   (a) $a = 3cm, b = 4cm$

   (b) $a = 5cm, b = 12cm$

   (c) $a = 6,3cm, b = 8,4cm$

   (d) $a = 39dm, c = 8,9cm$

   (e) $a = 1,68m, c = 2,1m$

   (f) $b = 4,5cm, c = 5,3cm$

5. Površina pravouglog trougla je $24cm^2$,a dužina jedne katete je 8cm.Odrediti obim tog trougla?

6. Ljestve imaju dužinu 3,7 m i naslonjene su na zid tako da su na podu udaljene 1,2 m od zida.Do koje visine zida dopiru ove ljestve?

7. Plivač želi da prepliva rijeku široku 10 m.Valovi rijeke ga odnesu 20 m nizvodno.Kolika je udaljenost između polazne i dolazne tačke plivača?

7.1 OBRAT PITAGORINE TEOREME

Teorem 7.2 *Ako za stranice nekog trougla,čije su dužine a,b,c,vrijedi relacija*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

onda je trougao pravougli.

1. Provjeri da li je trougao pravougli ako su njegove stranice $a = 6cm, b = 8cm, c = 10cm.$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$10^2 = 6^2 + 8^2$$
$$100 = 36 + 64$$
$$100 = 100$$

što je tačno,pa je trougao pravougli.

2. Provjeri da li je trougao pravougli ako su njegove stranice $a = 6cm, b = 8cm, c = 12cm.$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$12^2 = 6^2 + 8^2$$
$$144 = 36 + 64$$
$$144 \neq 100$$

pa ne vrijedi Pitagorina teorema,tj.trougao nije pravougli.

Domaći zadatak:

1. Provjeri da li je trougao pravougli ako su njegove stranice:

   (a) $a = 40cm, b = 9cm, c = 41cm$

   (b) $a = 60cm, b = 80cm, c = 100cm$

(c) $a = 3cm, b = 5cm, c = 7cm$

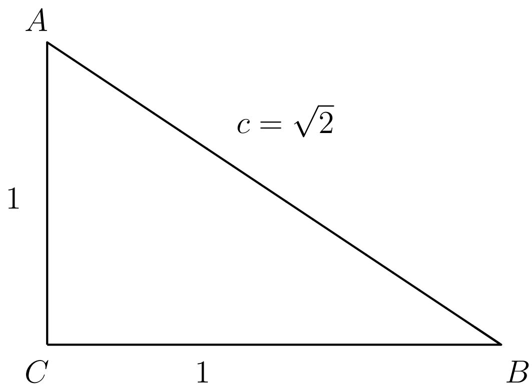
(d) $a = 1cm, b = \frac{4}{3}cm, c = \frac{5}{3}cm$

(e) $a = 5m, b = 7m, c = 11m$

(f) $a = 1,5dm, b = 2dm, c = 2,5dm$

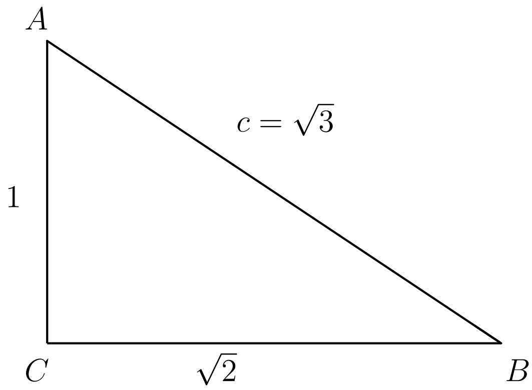
8 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA KONSTRUKCIJU DUŽI $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$

Primjer 8.1 *Konstruisati duž dužine* $\sqrt{2}$
Posmatrajmo pravougli trougao:



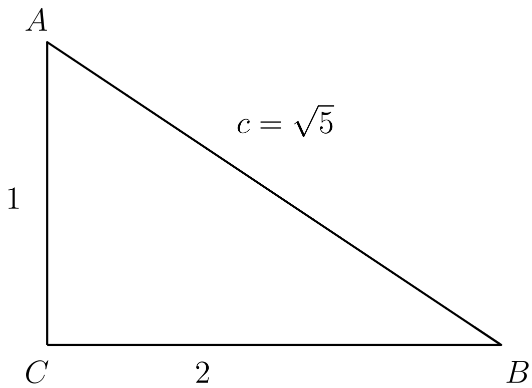
$$c = \sqrt{1^2 + 1^2}$$
$$c = \sqrt{1 + 1}$$
$$c = \sqrt{2}$$

Primjer 8.2 *Konstruisati duž dužine* $\sqrt{3}$
Posmatrajmo pravougli trougao:



$$\sqrt{3} = \sqrt{2+1} = \\ = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2}$$

Primjer 8.3 *Konstruisati duž dužine* $\sqrt{5}$
Posmatrajmo pravougli trougao:



$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} = \\ = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

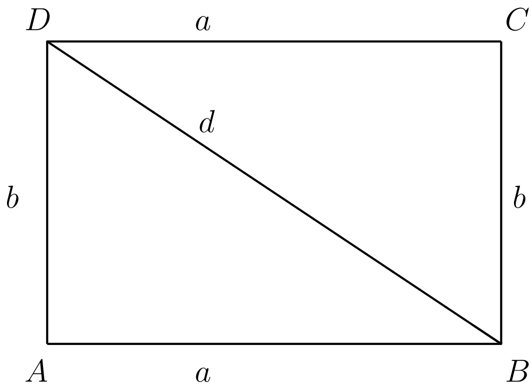
Domaći zadatak:

1. Konstruisati duž dužine:

   (a) $\sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}$

   (b) $\sqrt{11}, \sqrt{15}, \sqrt{28}, \sqrt{18}, \sqrt{27}$

9 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA PRAVOUGAONIK



$$
\begin{aligned}
&a, b - stranice \quad pravougaonika\\
&d - dijagonala \quad pravougaonika\\
&\triangle DAB - pravougli:\\
&d^2 = a^2 + b^2\\
&d = \sqrt{a^2 + b^2}
\end{aligned}
$$

1. Izračunaj dijagonalu pravougaonika ako su njegove stranice 35cm i 12cm.

$$
\left.\begin{aligned}
a &= 35cm\\
b &= 12cm\\
d &= ?
\end{aligned}\right\} \Rightarrow
\begin{aligned}
d^2 &= a^2 + b^2\\
d^2 &= 35^2 + 12^2\\
d^2 &= 1225 + 144\\
d^2 &= 1369\\
d &= \sqrt{1369}\\
&\underline{d = 37cm}
\end{aligned}
$$

2. Izračunaj jednu od stranica pravougaonika ako su date dijagonala 10cm i druga stranica 8cm.

$$\left.\begin{array}{r} d = 10cm \\ b = 8cm \\ a = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} d^2 = a^2 + b^2 \\ 10^2 = a^2 + 8^2 \\ a^2 = 100 - 64 \\ a^2 = 36 \\ a = \sqrt{36} \\ \underline{a = 6cm} \end{array}$$

3. Izračunaj površinu pravougaonika čija je stranica $a = 7cm$ a dijagonala $7\frac{2}{5}cm$.

$$\left.\begin{array}{r} a = 7cm \\ b = 7\frac{2}{5}cm \\ b = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} d^2 = a^2 + b^2 \\ (\frac{37}{5})^2 = 7^2 + b^2 \\ 49 + b^2 = \frac{1369}{25} \\ b^2 = \frac{1369}{25} - 49 \\ b^2 = \frac{1369 - 1225}{25} \\ b^2 = \frac{144}{25} \\ b = \sqrt{\frac{144}{25}} \\ \underline{b = \frac{12}{5}cm} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = 7cm \\ b = \frac{12}{5}cm \\ P = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P = a \cdot b \\ P = 7 \cdot \frac{12}{5} \\ P = \frac{84}{5} \\ \underline{P = 16\frac{4}{5}cm} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = 7cm \\ b = \dfrac{12}{5}cm \\ O = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} O = 2a + 2b \\ O = 2 \cdot 7 + 2 \cdot \dfrac{12}{5} \\ O = 14 + \dfrac{24}{5} \\ O = \dfrac{70 + 24}{5} \\ O = \dfrac{94}{5} \\ \underline{O = 18\dfrac{4}{5}cm} \end{array}$$

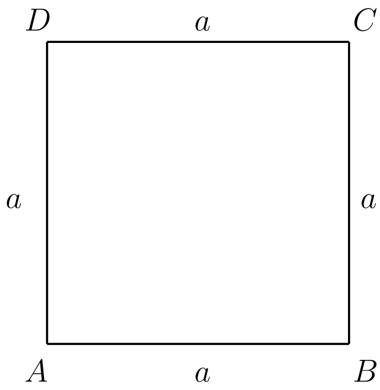
Domaći zadatak:

1. Izračunaj dijagonalu pravougaonika ako su njegove stranice:
   (a) $a = 0,9cm \quad b = 4cm$
   (b) $a = \frac{3}{5}cm \quad b = 1\frac{3}{4}cm$
   (c) $a = 12cm \quad b = 8cm$
   (d) $a = 7m \quad b = 1m$
   (e) $a = 10cm \quad b = 21cm$
   (f) $a = 1dm \quad b = 12dm$

2. Izračunaj jednu od stranica pravougaonika ako su date dijagonala i druga stranica:
   (a) $d = 25cm \quad b = 24cm$
   (b) $d = 4\frac{5}{6}cm \quad a = \frac{10}{3}cm$
   (c) $d = 6,5cm \quad b = 5,6cm$
   (d) $d = 10cm \quad b = 6cm$
   (e) $d = 13cm \quad b = 7cm$
   (f) $d = 12,2dm \quad b = 6,4dm$

3. Površina pravougaonika je $420cm^2$,jedna njegova stranica je 35cm.Kolika je dijagonala tog pravougaonika?

10 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA KVADRAT



$a - stranice \quad kvadrata$
$d - dijagonala \quad kvadrata$
$\triangle DAB - pravougli:$
$d^2 = a^2 + a^2 = 2 \cdot a^2$
$d = a \cdot \sqrt{2}$

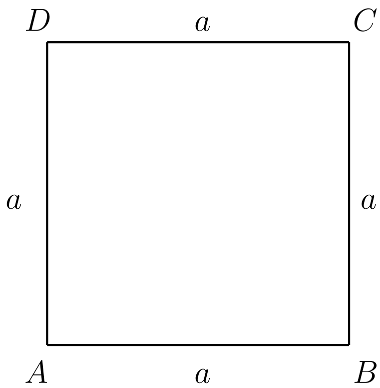
1. Izračunati dužinu dijagonale kvadrata ako je dužina njegove stranice $a = 10cm$.

$$\left.\begin{aligned} a &= 10cm \\ d &=? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} d &= a \cdot \sqrt{2} \\ d &= 10 \cdot \sqrt{2} \\ d &\approx 10 \cdot 1,41 \\ \underline{d} &\underline{\approx 14,1cm} \end{aligned}$$

2. Data je dijagonala kvadrata $d = 20cm$,izračunaj njegovu stranicu.

$$\left.\begin{aligned} d &= 20cm \\ a &=? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} d &= a \cdot \sqrt{2} \\ 20 &= a \cdot \sqrt{2} \\ a &= 20 : \sqrt{2} \\ a &\approx 20 : 1,41 \\ \underline{a} &\underline{\approx 14,18cm} \end{aligned}$$

3. U kvadrat stranice $a = 10cm$,upisan je kvadrat čija su tjemena na središtima stranica prvog kvadrata.Izračunaj stranice drugog kvadrata.

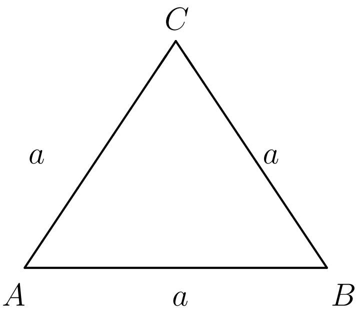


$$AB = a = 10cm$$
$$x^2 = (\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2$$
$$x^2 = (\frac{10}{2})^2 + (\frac{10}{2})^2$$
$$x^2 = 5^2 + 5^2$$
$$x^2 = 25 + 25$$
$$x^2 = 50$$
$$x = \sqrt{50}$$
$$x = \sqrt{2 \cdot 25}$$
$$x = 5\sqrt{2}$$
$$x \approx 5 \cdot 1,41$$
$$x \approx 7,05$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati dužinu dijagonale kvadrata ako je dužina njegove stranice:
   (a) $a = 12cm$
   (b) $a = 1,5cm$
   (c) $a = 4,8cm$
   (d) $a = 1\frac{1}{4}cm$
   (e) $a = 1\frac{3}{4}cm$
   (f) $a = \sqrt{2}cm$
   (g) $a = 72cm$
   (h) $a = 0,6cm$
2. Data je dijagonala kvadrata d,izračunaj njegovu stranicu:
   (a) $d = 64cm$
   (b) $d = 15cm$
   (c) $d = 4\sqrt{2}cm$
   (d) $d = 50\sqrt{2}cm$
3. U kvadrat stranice $a = 18cm$,upisan je kvadrat čija su tjemena na središtima stranica prvog kvadrata.Izračunaj stranice drugog kvadrata.
4. U kvadrat stranice $a = 12cm$,upisan je kvadrat čija su tjemena na središtima stranica prvog kvadrata.Izračunaj površinu i obim drugog kvadrata.
5. Izračunati površinu kvadrata čija je dijagonala $d = 15cm, d = 8cm, d = 4cm, d = 12cm$.

11 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA JEDNAKOSTRANIČNI TROUGAO



$a - stranica; h - visina$

$trougao \triangle ADC - pravougli$

$a^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$

$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

1. Izračunati visinu jednakostraničnog trougla ako je $a = 10cm$.

$$\begin{array}{r} a = 10cm \\ h = ? \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a^2 &= h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ 10^2 &= h^2 + (\frac{10}{2})^2 \\ 100 &= h^2 + 25 \\ h^2 &= 100 - 25 \\ h^2 &= 75 \\ h &= \sqrt{75} \\ h &= \sqrt{25 \cdot 3} \\ h &= 5\sqrt{3} \\ h &\approx 5 \cdot 1,73 \\ &\underline{h \approx 8,65cm} \end{aligned}$$

2. Izračunati stranicu jednakostraničnog trougla ako je $h = 10cm$.

$$\left.\begin{array}{r} h = 10cm \\ a = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} \\ 10 = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} | 2 \\ 20 = a \cdot \sqrt{3} \\ a = 20 : \sqrt{3} \\ h \approx 20 : 1,73 \\ \underline{h \approx 11,56cm} \end{array}$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati površinu jednakostraničnog trougla čija je visina dužine 3,46cm

2. Izračunati dužinu osnovice a ili visinu h jednakostraničnog trougla ako je:

   (a) $a = 2cm$

   (b) $a = 2\sqrt{3}cm$

   (c) $h = \sqrt{3}cm$

   (d) $h = 4\sqrt{3}$

   (e) $a = 12,8cm$

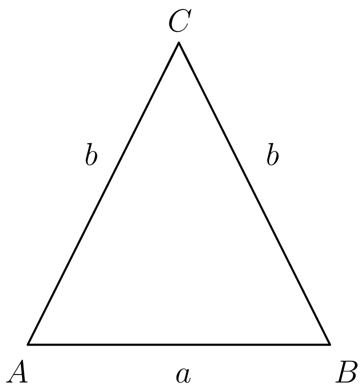
   (f) $a = 7,5cm$

   (g) $h = 10cm$

   (h) $h = 16,8cm$

12 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA JEDNAKOKRAKI TROUGAO I ROMB

1. Izračunati površinu i obim jednakokrakog trougla čija je visina $h = 12cm$ i krak $b = 13cm$.



$a - osnovica; h - visina; b - krak$
$trougao \triangle ADC - pravougli$
$b^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2$

$$\left.\begin{array}{r} b = 13cm \\ h = 12cm \\ O, P, a = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} b^2 = h^2 + (\frac{a}{2})^2 \\ 13^2 = 12^2 + (\frac{10}{2})^2 \\ (\frac{10}{2})^2 + 144 = 169 \\ (\frac{10}{2})^2 = 169 - 144 \\ (\frac{10}{2})^2 = 25 \\ \frac{a}{2} = \sqrt{25} \\ \frac{a}{2} = 5 | \cdot 2 \\ \underline{a = 10cm} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} a = 10cm \\ h = 12cm \\ P = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P = \frac{a \cdot h}{2} \\ P = \frac{10 \cdot 12}{2} \\ \underline{P = 60cm^2} \\ O = a + 2b \\ O = 10 + 2 \cdot 12 \\ O = 10 + 24 \\ \underline{O = 34cm} \end{array}$$

2. Izračunaj obim i površinu romba čije su dijagonale $d_1 = 80cm$ i $d_2 = 18cm$.
   Ovdje ćemo iskoristiti osobinu romba da mu se dijagonale sijeku pod uglom od 90° i da se polove.

$$a^2 = (\frac{d_1}{2})^2 + (\frac{d_2}{2})^2$$

$$a^2 = (\frac{80}{2})^2 + (\frac{18}{2})^2$$

$$a^2 = 40^2 + 9^2$$

$$a^2 = 1600 + 81$$

$$a^2 = 1681$$

$$a = \sqrt{1681}$$

$$\underline{a = 41}$$

$$O = 4 \cdot a$$

$$O = 4 \cdot 41$$

$$\underline{O = 164}$$

$$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$P = \frac{80 \cdot 18}{2}$$

$$\underline{P = 720cm^2}$$

Domaći zadatak:

1. U jednakokrakom trouglu dužina osnovice je a,kraka b,visine h,obima O,i opovršine P.
   Izračunaj nepoznate elemente,ako su dati:
   (a) $a = 10cm \quad b = 13cm \quad odrediti \quad h, O, P$
   (b) $a = 18cm \quad b = 41cm \quad odrediti \quad h, O, P$
   (c) $a = 66cm \quad h = 56cm \quad odrediti \quad b, O, P$
   (d) $b = 30cm \quad O = 96cm^2 \quad odrediti \quad h, a, P$

2. U rombu su označene dijagonale d_1 i d_2,osnovica a,visina h,obim O i površina P.Izračunati nepoznate elemente,ako je zadato:

   (a) $d_1 = 40cm \quad d_2 = 30cm \quad odrediti \quad a, h, O, P$

   (b) $d_2 = 24cm \quad a = 37cm \quad odrediti \quad h, d_1, O, P$

   (c) $d_1 = 12cm \quad a = 18,5cm \quad odrediti \quad d_2, h, O, P$

13 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA JEDNAKOKRAKI TRAPEZ

1. U jednakokrakom trapezu date su osnovice $a = 17cm$ i $c = 3cm$ i krak $b = 25cm$.Izračunati visinu h,dijagonalu d,i površinu trapeza.

$$x + c + x = a$$

$$2x + c = a$$
$$x = \frac{a - c}{2}$$
$$x = \frac{17 - 3}{2}$$
$$x = \frac{14}{2}$$
$$\underline{x = 7cm}$$
$$\triangle AED - pravougli$$
$$b^2 = h^2 + x^2$$
$$h^2 = b^2 - x^2$$
$$h^2 = 25^2 - 7^2$$
$$h^2 = 625 - 49$$
$$h^2 = 576$$
$$h = \sqrt{576}$$
$$\underline{h = 24cm}$$
$$\overline{AF} = a - x = 17 - 7 = 10cm$$

$$\triangle AFC - pravougli$$
$$d^2 = h^2 + \overline{AF}^2$$
$$d^2 = 24^2 + 10^2$$
$$d^2 = 576 + 100$$
$$d^2 = 676$$
$$d = \sqrt{676}$$
$$\underline{d = 26cm}$$
$$P = \frac{(a+c)\cdot h}{2}$$
$$P = \frac{(17+3)\cdot 24}{2}$$
$$\underline{\underline{P = 240cm^2}}$$

<u>Domaći zadatak:</u>

1. U jednakokrakom trapezu je označeno:osnovice a i c, krak b,visina h,dijagonala d,i povrşina P.Odrediti nepoznate elemente ako je:

   (a) $a = 17cm \quad c = 28cm \quad b = 25cm \quad odrediti \quad h, d, P$

   (b) $a = 44cm \quad c = 28cm \quad b = 17cm \quad odrediti \quad h, d, P$

   (c) $c = 63cm \quad h = 24cm \quad d = 74cm \quad odrediti \quad a, b, P$

14 PRIMJENA PITAGORINE TEOREME NA KRUG

1. U krugu poluprečnika 20cm povučena je tetiva dužine 12cm.Koliko je rastojanje tetive od centra kruga?

$$\left.\begin{aligned} \overline{AB} = t = 12cm \\ r = 20cm \\ x = ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} r^2 &= x^2 + (\frac{t}{2})^2 \\ 20^2 &= x^2 + (\frac{12}{2})^2 \\ 400 &= x^2 + 36 \\ x^2 &= 400 - 36 \\ x^2 &= 364 \\ x &= \sqrt{364} \\ &\underline{x \approx 19,08cm} \end{aligned}$$

2. Obim jednakostraničnog trougla je $72cm$.Izračunati mu visinu,površinu,poluprečnik upisane i opisane kružnice.

$$O = 3a$$

$$72 = 3a$$

$$a = 72 : 3$$

$$\underline{a = 24cm}$$

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$h = \frac{24}{2}\sqrt{3}$$

$$h =\approx 12 \cdot 1,73$$

$$\underline{h \approx 20,78}$$

$$h = 3r$$

$$r = \frac{h}{3}$$

$$r = \frac{20,78}{3}$$

$$\underline{r \approx 6,93}$$

$$R^2 = r^2 + (\frac{a}{2})^2$$

$$R^2 = 6,93^2 + (\frac{24}{2})^2$$

$$R^2 \approx 48,02 + 144$$

$$R^2 \approx 192,02$$

$$R \approx \sqrt{192,02}$$

$$\underline{R \approx 13,86cm}$$

$$P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

$$P = 144\sqrt{3}$$

$$\underline{P \approx 249,42}$$

Domaći zadatak:

1. U krugu poluprečnika 13mm povučena je tetiva dužine 24cm.Koliko je rastojanje tetive od centra kruga?
2. Izračunaj visinu,poluprečnik opisane i upisane kružnice jednakostraničnog trougla čija je stranica $a = 12$
3. Izračunaj dužinu tetive kruga čiji je poluprečnik dužine $r = 30cm$ i centralna udaljenost od tetive 18cm.

15 PROPORCIONALNOST,FUNKCIJA DIREKTNE I OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI

15.1 RAZMJERA(OMJER)

Razlikujemo dvije vrste razmjere:

(a) Aritmetička sredina (odnos koji pokazuje za koliko je jedna veličina veća,odnosno manja,od druge veličine.Oznaka:a-b)

(b) Geometrijska sredina (odnos koji pokazuje koliko puta je jedna veličina veća,odnosno manja,od druge veličine.Oznaka:a:b)

Primjer 15.1 *Date su duži $a = 8cm$ i $b = 4cm$.Odrediti aritmetičku i geometrijsku razmjeru*

$$a - b = 8 - 4 = 4$$

$$a : b = 8 : 4 = 2$$

1. Razmjera dužine prema širini jedne sobe je 4:3.Kolika je dužina te sobe

ako se zna da širina iznosi 2,7m?

$$\left.\begin{array}{r} b = 2,7 \\ a = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} a : b = 4 : 3 \\ \dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3} \\ \dfrac{a}{2,7} = \dfrac{4}{3} | \cdot 3 \\ \dfrac{3a}{2,7} = 4 | \cdot 2,7 \\ 3a = 4 \cdot 2,7 \\ 3a = 10,8 \\ a = 10,8 : 3 \\ \underline{a = 3,6m} \end{array}$$

15.2 PROPORCIJA

Proporcija je jednakost dvije razmjere,pa zato i imamo aritmetičku i geometrijsku razmjeru,gdje ćemo se više baviti geometrijskom proporcijom.

$$a : b = c : d$$

dgje su bic unutrašnji članovi proporcije,a ai d spoljašnji članovi proporcije.

$$a : b = c : d$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} | \cdot b$$

$$a = \frac{c}{d} \cdot b | \cdot d$$

$$ad = cb$$

Dakle,**proizvod spoljašnjih članova proporcije jednak je proizvodu unutršnjih članova proporcije**.
Ako su u proporciji unutrašnji članovi jednaki onda imamo **geometrijsku sredinu brojeva**.

$$X = \sqrt{ab}$$

$$Y = \frac{a+b}{2}$$

gdje je sa X data geometrijska,a sa Y aritmetička,sredina brojeva a i b.

1. Riješiti proporciju: $x : 3 = 5 : 2$

$$x \cdot 2 = 3 \cdot 5$$

$$2x = 15$$

$$x = 15 : 2$$

$$x = 7,5$$

2. Riješiti proporciju: $9 : x = 6 : 16$

$$6 \cdot x = 9 \cdot 16$$

$$6x = 144$$

$$x = 144 : 6$$

$$x = 24$$

3. Riješiti proporciju: $(2 - x) : 3 = 6 : 2$

$$2 \cdot (2 - x) = 3 \cdot 6$$

$$4 - 2x = 18$$

$$-2x = 18 - 4$$

$$-2x = 14$$

$$x = 14 : (-2)$$

$$x = -7$$

4. Riješiti proporciju:

$$2\frac{1}{3} : 1\frac{1}{6} = x : \frac{1}{9}$$

$$\frac{7}{3} : \frac{7}{6} = x : \frac{1}{9}$$

$$\frac{7}{6} \cdot x = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{9}$$

$$\frac{7}{6} \cdot x = \frac{7}{27}$$

$$x = \frac{7}{27} : \frac{7}{6}$$
$$x = \frac{7}{27} \cdot \frac{6}{7}$$
$$x = \frac{2}{9}$$

5. Odrediti aritmetičku i geometrijsku sredinu brojeva 8 i 18.

$$8 : x = x : 18$$
$$x^2 = 8 \cdot 18$$
$$x^2 = 144$$
$$x = \sqrt{144}$$
$$x = 12 \quad - geometrijska \quad sredina$$
$$x = \frac{8+18}{2} = \frac{26}{2} = 13 \quad - \quad arit. \quad sred.$$

Domaći zadatak:

1. Odrediti nepoznati član proporcije:
   - (a) $8 : 3 = 4 : x$
   - (b) $x : 2,5 = 3 : 1,5$
   - (c) $5 : 2 = x : 3$
   - (d) $9 : 6 = x : 16$
   - (e) $9 : 18 = x : 24$

2. Riješiti proporciju:
   - (a) $24 : 16 = 3 : x$
   - (b) $96 : 72 = 4x : 31$
   - (c) $144 : x = 256 : 6$
   - (d) $4 : (x-1) = 3 : 2$
   - (e) $(2-x) : 3 = 6 : 2$
   - (f) $(x-3) : 4 = 10 : 6$

(g) $(2x-1):4=5:2$

3. Odrediti nepoznati član proporcije:

(a) $\frac{3}{10}x:\frac{8}{15}=9\frac{3}{4}:17\frac{1}{3}$

(b) $6\frac{9}{16}:x=2\frac{11}{32}:6\frac{11}{14}$

(c) $\frac{9}{10}:\frac{17}{6}=x:\frac{19}{6}$

(d) $\frac{4}{3}:\frac{17}{3}=\frac{3}{5}:x$

(e) $\frac{7}{4}:\frac{13}{6}=x:\frac{5}{2}$

(f) $\frac{x}{2}:\frac{1}{3}=\frac{1}{4}:3$

4. Riješiti proporciju:

(a) $2\sqrt{3}:x=5\sqrt{3}:10$

(b) $0,4:(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2})=\frac{3}{5}:\frac{2}{3}$

(c) $(\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}):\frac{2}{3}=\frac{3}{5}:0,4$

5. Razmjera dužine prema širini jedne kuće odnosi se kao 5:3.Kolika je širina te kuće,ako je njena dužina 9,5m?

6. Odrediti geometrijsku i aritmetičku sredinu brojeva:

(a) $8 \quad i \quad 4$

(b) $72 \quad i \quad 48$

(c) $356 \quad i \quad 246$

(d) $\frac{3}{8} \quad i \quad \frac{1}{16}$

(e) $12 \quad i \quad 27$

15.3 PROCENTNI RAČUN

Procenat je razlomak čiji je nazivnik jednak 100,takav razlomak se zapisuje pomoću znaka %.

Primjer 15.2

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,50$$
$$20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0,20$$
$$1\% = \frac{1}{100} = 0,01$$

i sl.

1. Izraziti pomoću razlomka i decimalnog oblika,procente:

   (a)
   $$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$$

   (b)
   $$9\% = \frac{9}{100} = 0,09$$

   (c)
   $$0,25\% = \frac{0,25}{100} = \frac{\frac{25}{100}}{\frac{100}{1}} = \frac{1}{400} = 0,0025$$

2. Napisati razlomke u obliku procenta:

   (a)
   $$\frac{6}{100} = 6\%$$

   (b)
   $$\frac{39}{100} = 39\%$$

(c)

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 20}{5 \cdot 20} = \frac{80}{100} = 80\%$$

(d)

$$\frac{17}{20} = \frac{17 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{85}{100} = 85\%$$

(e)

$$3,5 = \frac{35}{10} = \frac{350}{100} = 350\%$$

$$\left.\begin{array}{rr} p - & procenat \\ G - & osnova \\ I - & iznos \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} G : 100 = I : p \\ G \cdot p = I \cdot 100 \end{array}$$

1. U VII razredu od 30 učenika,na kraju školske godine,prolaznu ocjenu je imalo njih 27.Koliko je to u procentima?

$$\left.\begin{array}{r} G = 30 \\ I = 27 \\ p = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} G : 100 = I : p \\ G \cdot p = I \cdot 100 \\ 30p = 27 \cdot 100 \\ p = 2700 : 30 \\ p = 90\% \end{array}$$

Domaći zadatak:

1. U jednom udruženju,30 članova čine žene.Odrediti broj članova tog udruženja ako se zna da 75% tog udruženja čine muškarci?
2. U razredu od 40 učenika,na kraju školske godine,prolaznu ocjenu je imalo njih 75%.Koliko učenika nema prolaznu ocjenu?
3. U jednom razredu,30 učenika ima prolaznu ocjenu.Odrediti broj učenika u tom razredu,ako se zna da prolaznost procentualno iznosi 75%.

15.4 PODJELA DUŽI U DATOM OMJERU

Najjednostavnija podjela duži je podjela na dva jednaka dijela i u tom slučaju duždijelimo u razmjeri 1:1.

Primjer 15.3 *Datu duž* $\overline{AB}$ *podijeliti u omjeru 2:3.*

Postupak podjele je sljedeći:

(-) Povučemo proizvoljnu polupravu Ap

(-) Na nju nanesemo 5 jednakih duži $AE_1, AE_2, AE_3, AE_4, AE_5$

(-) Tada dobijamo pet podudarnih trouglova,što znači da smo datu dužpodijelili na 5 jednakih dijelova.

(-) Tačka F_2 dijeli datu duž u datoj razmjeri.

$$AF_2 : F_2B = 2 : 3$$

<u>Domaći zadatak:</u>

1. Datu duž $\overline{MN} = 7cm$ podijeliti u omjeru:
   (i) 2 : 3
   (ii) 3 : 4
2. Datu duž $\overline{AB} = 6,8cm$ podijeliti u omjeru:
   (i) 3 : 2
   (ii) 4 : 3
3. Datu duž $\overline{CD} = 5cm$ podijeliti u omjeru:
   (i) 3 : 1
   (ii) 1 : 3
4. Proizvoljnu duž $AB = 10cm$ podijeli na:
   (i) tri jednaka dijela
   (ii) pet jednakih dijelova

15.5 TALESOVA TEOREMA

Ako krake proizvoljnog ugla aOb presiječemo sa dvije međusobno paralelne prave p i q onda je razmjera dobivenih duži na jednom kraku jednaka razmjeri odgovarajućih duži na drugom kraku.

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OC} : \overline{OD}$$

1. Konstruisati i odrediti računski četvrtu geometrijsku proporcionalu za duži $a = 4cm$,$b = 3cm$,i $c = 6cm$.

Računski:

$$a : b = c : d$$

$$4 : 3 = 6 : d$$

$$4 \cdot d = 6 \cdot 3$$

$$4 \cdot d = 18$$

$$d = 18 : 4$$

$$\underline{d = 4,5cm}$$

Konstrukcija:

2. Kraci ugla mOn presječeni su paralelnim pravim $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ pri čemu tačke A i C pripadaju Om,a tačke B i D kraku On.Odrediti duž $\overline{OB}$ ako je $\overline{OA} = 4cm$,$\overline{OC} = 6cm$ i $\overline{OD} = 8cm$.

Računski:

$$\overline{OA} : \overline{OC} = \overline{OB} : \overline{OD}$$

$$4 : 6 = \overline{OB} : 8$$

$$4 \cdot 8 = 6 \cdot \overline{OB}$$

$$6 \cdot \overline{OB} = 32$$

$$\overline{OB} = 32 : 6$$

$$\underline{\overline{OB} = 5,33cm}$$

Konstrukcija:

Domaći zadatak:

1. Konstruisati i odrediti računski četvrtu geometrijsku proporcionalu za duži

   (a) $a = 2cm \quad b = 5cm \quad i \quad c = 3,5cm$

   (b) $a = 4,5cm \quad b = 1,2cm \quad i \quad c = 12cm$

2. Konstruisati i odrediti računski četvrtu geometrijsku proporcionalu za duži

   (a) $a = 3,5cm \quad b = 2,5cm \quad i \quad c = 4,5cm$

   (b) $a = 3,7cm \quad b = 9,4cm \quad i \quad c = 5,2cm$

3. Računski i konstruktivno odredit četvrtu (nepoznatu) proporcionalu:

   (a) $x : 5 = 4 : 3$

   (b) $6 : a = 8 : 5$

   (c) $7 : 2 = 4 : b$

4. U trapezu kraci AD i BC produženi su do međusobnog presjeka u tački O.Odrediti dužinu duži DO ako je $AD = 2dm$,$BC = 1,5dm$ i $CO = 1,2dm$.

5. Konstruisati jednakokraki trougao čiji je obim 10cm, a odnos osnovice i kraka je
$$a : b = 2 : 3$$

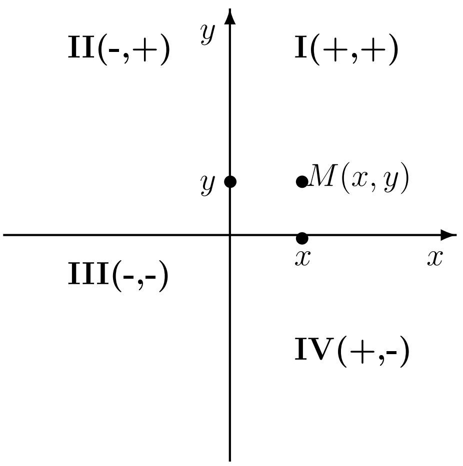
6. Odrediti dužinu srednje linije trapeza ABCD ako je $AB = 10cm$,$AD = 4cm$ i $AG = 5cm$,pri čemu je $AB \| CD$,a tačka G je presjek produžetka krakova trapeza.

7. Stranice trougla $\triangle ABC$ su:$a = 35cm$,$b = 45cm$.Kroz tačku N,koja na stranici b odsijeca duž $CN = 18cm$,povučena je paralela $MN \| AB$.Odrediti odsječke koje tačka M čini na stranici a.

8. U trapezu ABCD kraci AD i BC produženi su do međusobnog presjeka u tački O.Odrediti dužinu duži CO ako je $AD = 5cm$,$BC = 4cm$ i $DO = 3m$.Ako je kraća osnovica dužine 3cm kolika je dužina duže osnovice?

9. Kraci ugla pOq presječeni su dvjema paralelnim pravama.Presječne tačke krakova ugla prve prave su A i B a krakova ugla druge prave C i D.Ako je $OA = 2cm$,$OB = 3cm$ i $OC = 4,5m$ odrediti dužinu duži OD.

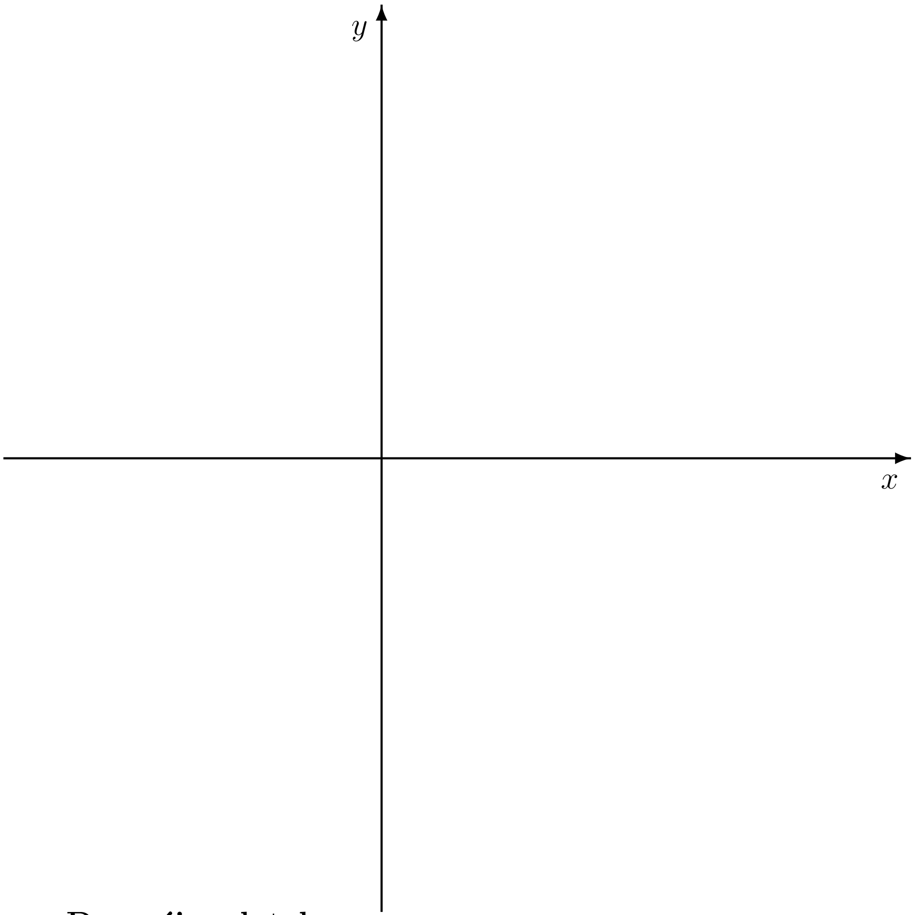
15.6 PRAVOUGLI(PRAVOKUTNI) KOORDINATNI SISTEM U RAVNI



$Ox - koordinatna \quad osa(apscisa)$
$Oy - koordinatna \quad osa(ordinata)$
$O(0,0) - koordinatni \quad pocetak$
$M(x,y) - tacka \quad u \quad koordinatnom \quad sistemu$
$x, y - koordinate \quad tacke \quad M$

1. U pravouglom koordinatnom sistemu prestaviti tačke:

$$A(-1,3), B(-4,-2), C(3,-4), D(0,5), E(6,0), F(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$$



Domaći zadatak:

1. U pravouglom koordinatnom sistemu prestaviti tačke:

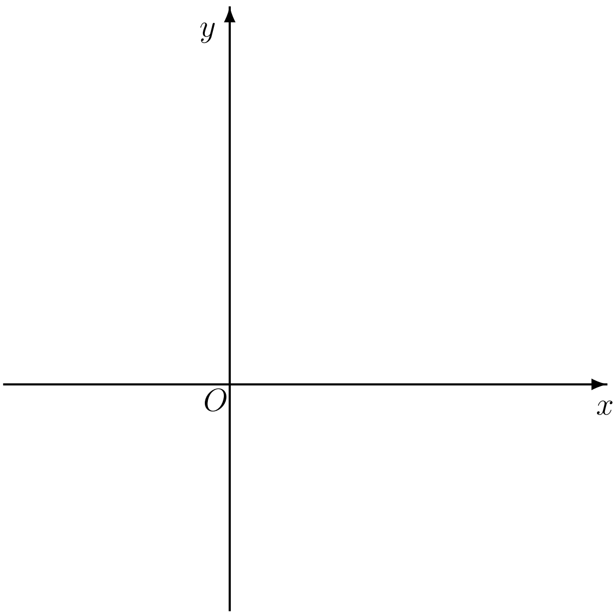
$$A(-2,1), B(2,5), C(-1,8), D(0,3), E(7,0);$$

2. U pravouglom koordinatnom sistemu prestaviti tačke:

$$A(3, 2\frac{3}{4}), B(-4, 4\frac{1}{4}), C(2,5; -3,5);$$

Rastojanje između dvije tačke

Postavlja se pitanje da li je moguće odrediti rastojanje između dvije proizvoljne tačke u pravouglom koordinatnom sistemu.
Posmatrajmo tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$.



$\triangle ACB - pravougli$
$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$
$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Dakle,rastojanje d između proizvoljne dvije tačke $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ pravouglog koordinatnog sistema računamo po formuli:

$$d = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

1. Odrediti rastojanje između tačaka $A(-1,5)$ i $B(2,1)$.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d=\sqrt{(2+1)^2+(1-5)^2}$$
$$d=\sqrt{3^2+(-4)^2}$$
$$d=\sqrt{9+16}$$
$$d=\sqrt{25}$$
$$\underline{d=5}$$

2. Izračunaj obim trougla čija su tjemena $A(-4,-2)$,$B(5,7)$ i $C(8,3)$.

$$O=|AB|+|BC|+|CA|$$
$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$|AB|=\sqrt{(5-(-4))^2+(7-(-2))^2}$$
$$|AB|=\sqrt{(5+4)^2+(7+2)^2}$$
$$|AB|=\sqrt{9^2+9^2}$$
$$|AB|=\sqrt{81+81}$$
$$|AB|=\sqrt{2\cdot 81}$$
$$|AB|=9\cdot\sqrt{2}$$
$$|AB|\approx 9\cdot 1,41$$
$$|AB|\approx 12,69$$
$$|BC|=\sqrt{(8-5)^2+(3-7)^2}$$
$$|BC|=\sqrt{3^2+(-4)^2}$$
$$|BC|=\sqrt{9+16}$$
$$|BC|=\sqrt{25}$$
$$|BC|=5$$
$$|CA|=\sqrt{(-4-8)^2+(-2-3)^2}$$
$$|CA|=\sqrt{(-12)^2+(-5)^2}$$

$$|CA| = \sqrt{144 + 25}$$
$$|CA| = \sqrt{169}$$
$$|CA| = 13$$
$$O = |AB| + |BC| + |CA|$$
$$O \approx 12,69 + 5 + 13$$
$$O \approx 30,69$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati rastojanje između tačaka:
   (a) $A(5,2) \quad i \quad B(-3,-4)$
   (b) $A(3,5) \quad i \quad B(7,-9)$
   (c) $A(-2,6) \quad i \quad B(4,-2)$
   (d)$A(-2,-9) \quad i \quad B(2,9)$
   (e)$A(5,7) \quad i \quad B(8,3)$
   (f)$A(-4,0) \quad i \quad B(4,8)$

2. Izračunati rastojanje između tačaka:
   (a) $A(3,5) \quad i \quad B(-1,-4)$
   (b) $E(0,4) \quad i \quad F(2,-3)$
   (c) $G(2,-3) \quad i \quad H(1,-4)$
   (d)$M(-1,2) \quad i \quad N(3,5)$

3. Zadane su tačke:$A(2,3)$,$B(1,-4)$,$C(-1,-7)$,$D(-4,8)$
   Izračunaj udaljenosti:AB,AC,BD i DC.

4. Izračunaj obim trougla čija su tjemena $A(3,2)$,$B(-1,-1)$ i $C(11,-6)$.

5. Izračunaj obim trougla čija su tjemena $A(2,0)$,$B(-1,4)$ i $C(-7,-4)$.

6. Izračunaj obim i dužinu dijagonale četverougla čija su tjemena $A(-2,-1)$,$B(5,0)$,$C(2,6)$ i $D(-1,3)$.

7. Dokaži da je trougao čija su tjemena $A(2,1)$,$B(5,1)$ i $C(5,5)$ pravougli trougao.

8. Dokaži da je trougao pravougli,ako su njegova tjemena:

   (a) $A(0,0), B(3,1), C(1,7)$

   (b) $A(1,1), B(2,3), C(5,-1)$

9. Izračunaj obim i površinu trougla čija su tjemena:

   (a) $A(1,1), B(2,3), C(5,-1)$

   (b) $A(5,0), B(0,1), C(0,-1)$

   (c) $A(2,3), B(-3,-1), C(0,-1)$

   (d) $A(4,2), B(9,4), C(7,6)$

10. Izračunaj obim i površinu trougla čija su tjemena $A(1,2)$,$B(2,5)$ i $C(4,2)$.Da li je to pravougli trougao?

15.7 FUNKCIJA DIREKTNE PROPORCIONALNOSTI

Funkcija oblika $y = k \cdot x \quad (k \in \mathbb{R}, k \neq 0)$ naziva se **funkcija direktne proporcionalnosti** a broj **k koeficijent proporcionalnosti**
Grafik funkcije direktne proporcionalnosti $y = k \cdot x$ je prava(ili dio prave) koja prolazi kroz koordinatni početak i:

- ako je $k > 0$ pripada I i III kvadrantu
- ako je $k < 0$ pripada II i IV kvadrantu

1. Ako je funkcija zadata formulom $f(x) = 3 \cdot x$ odrediti f(0),f(-3) i f(2).

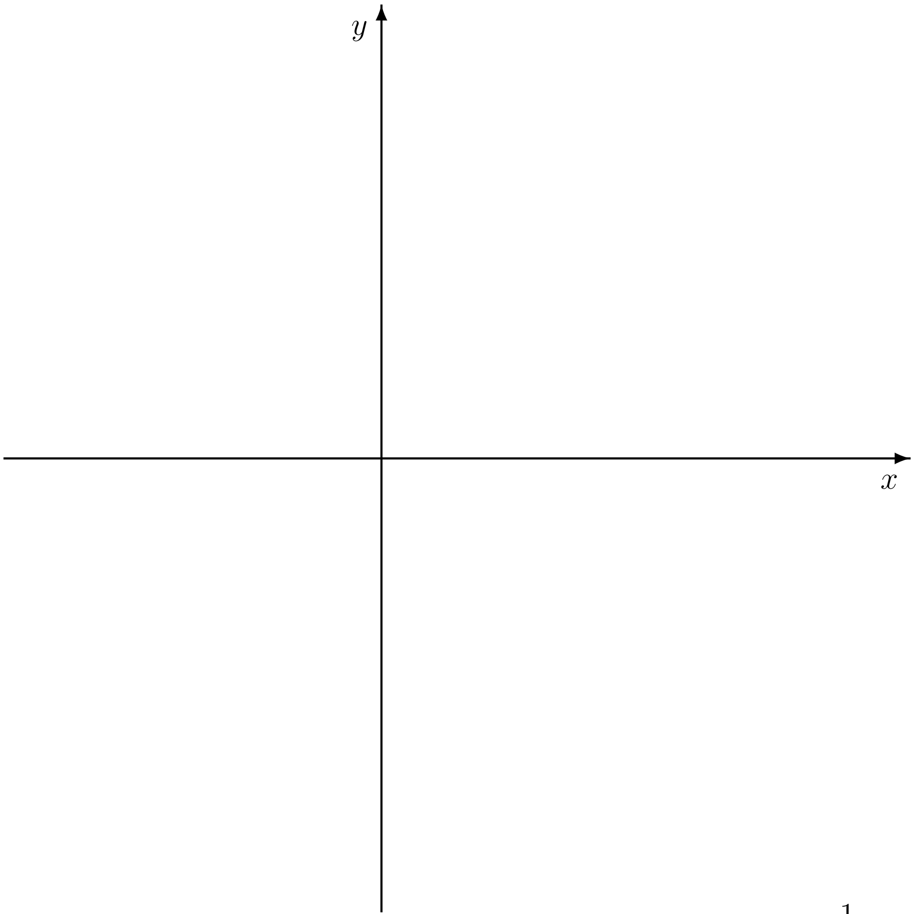
$$f(0) = 3 \cdot 0 = 0$$

$$f(-3) = 3 \cdot (-3) = -9$$

$$f(2) = 3 \cdot 2 = 6$$

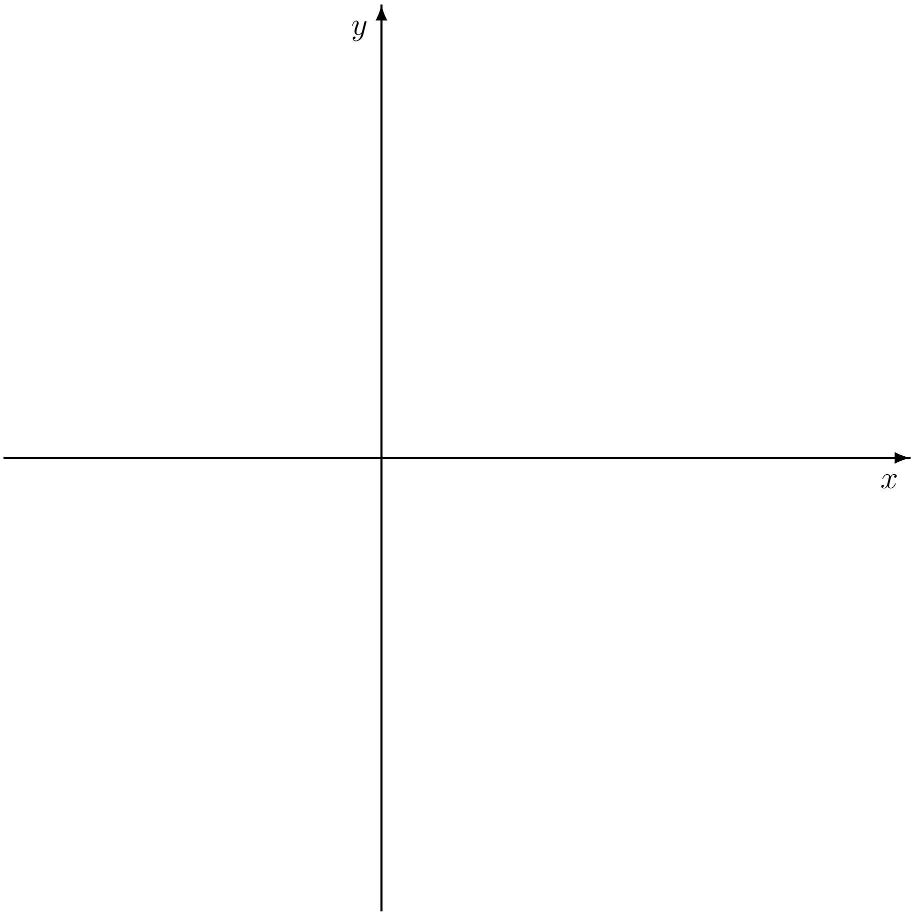
2. Prestaviti tabelarno i nacrtati grafik funkcije $y = 2x$.

x	-2	-1	0	1	2	$\dots$
$y = 2x$	-4	-2	0	2	4	$\dots$



3. Prestaviti tabelarno i nacrtati grafik funkcije $y = \frac{1}{2}x$.

x	-2	-1	0	1	2	$\dots$
$y = \frac{1}{2}x$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\dots$



Domaći zadatak:

1. Prestaviti tabelarno i nacrtati grafik funkcije:

   (a) $y = \frac{2}{3}x$

   (b) $y = -0,5x$

   (c) $y = -2x$

   (d) $y = 3x, y = -3x$

   (e) $y = 4x, y = -4x$

   (f) $y = \frac{3}{4}x$

15.8 FUNKCIJA OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI

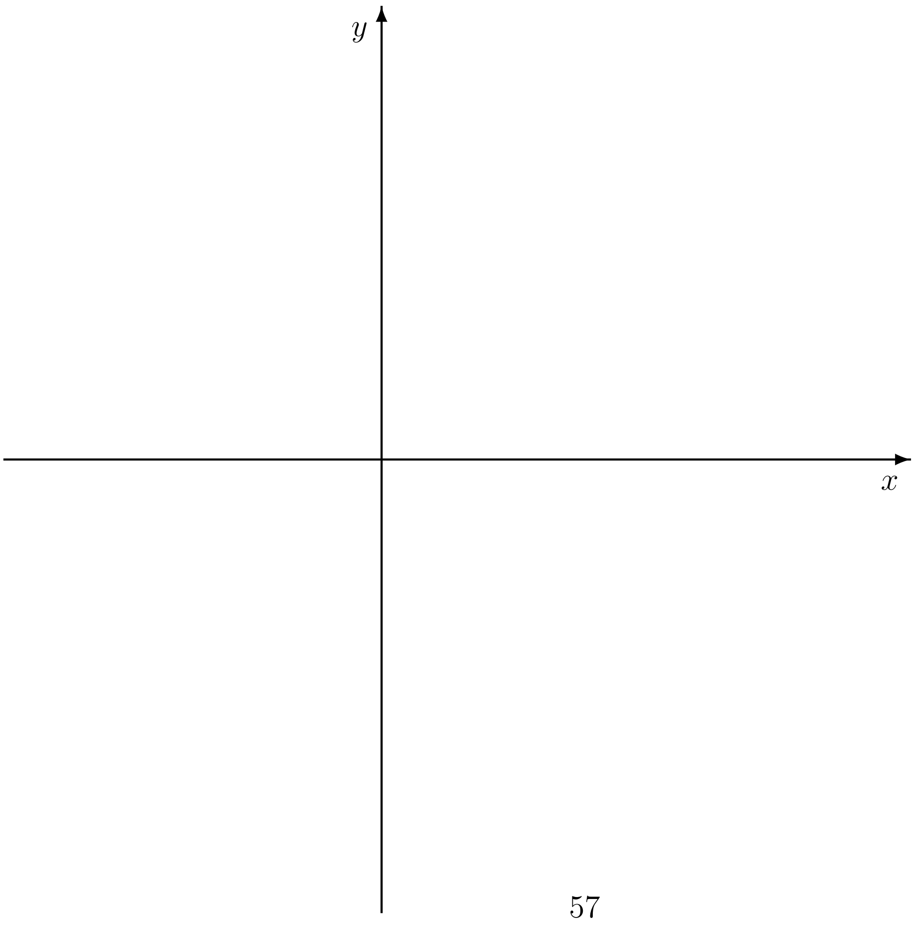
Funkcija oblika $y = \frac{k}{x}$ $\quad (k \in \mathbb{R}, k \neq 0, x \neq 0)$ naziva se **funkcija obrnute proporcionalnosti** a broj **k koeficijent proporcionalnosti**

Grafik funkcije obrnute proporcionalnosti $y = \frac{k}{x}$ je kriva koja se naziva hiperbola(u opštem slučaju sa dvije grane) koja ne prolazi kroz koordinatni početak i:

- ako je $k > 0$ onda grane pripadaju I i III kvadrantu
- ako je $k < 0$ onda grane pripadaju II i IV kvadrantu

1. Prestaviti tabelarno i nacrtati grafik funkcije $y = -\frac{3}{x}$ $\quad (x \neq 0)$

x	-3	-2	-1	1	2	3	$\dots$
$y = -\frac{3}{x}$	1	$\frac{3}{2}$	3	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$\dots$



Domaći zadatak:

1. Prestaviti tabelarno i nacrtati grafik funkcije:

   (a) $y = \frac{3}{x} \quad (x \neq 0)$

   (b) $y = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$

   (c) $y = -\frac{2}{x} \quad (x \neq 0)$

   (d) $y = \frac{1}{2x} \quad (x \neq 0)$

   (e) $y = \frac{2}{3x} \quad (x \neq 0)$

   (f) $y = -\frac{3}{4x} \quad (x \neq 0)$

15.9 PRIMJERI PRIMJENE FUNKCIJE DIREKTNE I OBRNUTE PROPORCIONALNOSTI

Ako se povećanjem jedne veličine povećava i druga veličina (ili smanjenjem jedne smanjuje i druga) onda govorimo o direktnoj proporcionalnosti.
Ako se povećanjem jedne veličine smanjuje druga veličina (ili smanjenjem jedne povećava druga) onda govorimo o obrnutoj proporcionalnosti.

1. Od 240 kg šećerne repe dobije se 36 kg šećera.Koliko se kilograma šećera dobije od 420 kg šećerne repe?(direktna)

$$240kg \quad repe \rightarrow 36 \quad secera$$

$$420kg \quad repe \rightarrow x \quad secera$$

$$240 : 420 = 36 : x$$

$$240 \cdot x = 36 \cdot 420$$

$$x = \frac{420 \cdot 36}{240}$$

$$x = 63$$

ODGOVOR: Od 420 kilograma šećerne repe dobiju se 63 kilograma šećera.

2. Ako je za put dug 480 km potrebno 36 litara benzina,koliki put može preći taj automobil sa 60 litara benzina?(direktna)

$$480 \quad km \rightarrow 36 \quad litara$$

$$x \quad km \rightarrow 60 \quad litara$$

$$480 : x = 36 : 60$$

$$36 \cdot x = 60 \cdot 480$$

$$x = \frac{60 \cdot 480}{36}$$

$$x = 800$$

ODGOVOR: Automobil će sa 60 litara preći put dugačak 800 kilometara.

3. Poljoprivredno dobro uzore zemljište za pšenicu sa 8 traktora za 12 dana.Za koliko će dana to isto zemljište biti uzorano sa 16 traktora?(obrnuta)

$$8 \quad traktora \rightarrow 12 \quad dana$$

$$16 \quad traktora \rightarrow x \quad dana$$

$$8 : 16 = x : 12$$

$$16 \cdot x = 8 \cdot 12$$

$$x = \frac{8 \cdot 12}{16}$$

$$x = 6$$

ODGOVOR: To isto zemljište 16 traktora će uzorati za 6 dana.

4. Jedna prostorija je osvijetljena sa 30 sijalica od 60 vati.Koliko treba sijalica od 100 vati da bi prostorija bila isto osvijetljena?(obrnuta)

$$30 \quad sijalica \rightarrow 60 \quad vati$$

$$x \quad sijalica \rightarrow 100 \quad vati$$

$$x : 30 = 60 : 100$$

$$100 \cdot x = 30 \cdot 60$$

$$x = \frac{30 \cdot 60}{100}$$

$$x = 18$$

ODGOVOR: Potrebno je 18 sijalica od 100 vati.

5. Četiri radnika radeći 6 sati dnevno,završe neki posao za 20 dana.

   (a) za koliko radnih dana će isti posao završiti ovi radnici ako rade 8 sati dnevno?

   (b) za koliko radnih dana će isti posao završiti 10 radnika ako rade 8 sati dnevno?

   (a)
$$6 : 8 = x : 20$$
$$8 \cdot x = 6 \cdot 20$$
$$x = 15$$

   (b)
$$4 : 10 = x : 15$$
$$10 \cdot x = 4 \cdot 15$$
$$x = 6$$

Domaći zadatak:

1. Od 0,3 tone svježih jabuka dobiva se 57 kg sušenih.Koliko se dobiva sušenih jabuka od 2,1 tone svježih jabuka?(obrnuta)
2. Na 250 km puta automobil potroši 20 litara benzina.Koliki će put preći automobil sa 35 litara benzina?
3. Od 50 kg brašna može se dobiti 75 komada hljeba.Koliko se komada hljeba dobije od 80 kg brašna?
4. Od 360 kg šećerne repe dobije se 48 kg šećera.Koliko je potrebno kilograma šećerne repe da se dobije 70 kg šećera?
5. Automobilista potroši na putu dugom 350 kilometara 28 litara benzina.Koliki će put preći taj automobilista sa 64 litre benzina?
6. Od 480 kilograma šećerne repe dobije se 72 kilograma šećera.Koliko se kilograma šećera dobije od 840 kilograma šećerne repe?
7. Ako je za put od 420 km potrebno 28 litara benzina,koliki se put može preći automobilom sa 58 litara benzina?

8. Ako se od 0,52 tone svježih šljiva dobije se 86 kg sušenih.Koliko se dobiva sušenih šljiva od 2,6 tona svježih šljiva?(obrnuta)

9. Od 60 kg brašna može se dobiti 86 komada hljeba.Koliko se komada hljeba dobije od 180 kg brašna?

10. Poljoprivredno dobro uzore zemljište za pšenicu sa 10 traktora za 15 dana.Za koliko će dana to isto zemljište biti uzorano sa 12 traktora?(obrnuta)

11. Tri cijei pune bazen sa vodom 12 sati.Za kojliko će sati isti bazen biti napunjen sa 5 cijevi istog kapaciteta?

12. Posao okopavanja na poljoprivrednom dobru 12 radnika završi za četiri dana radeći 8 sati dnevno.Koliko sati dnevno treba da radi 16 radnika da taj posao završi za 6 dana?

13. Tri radnika treba da podijele zaradu od 2700 KM u razmjeri 2:3:4.Koliko je dobio svaki radnik?

16 STEPENI(POTENCIJE)

Definicija 16.1 *Stepen je proizvod dva ili više jednakih faktora,tj.*

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ... \cdot a = a^n, a^1 = a, a^0 = 1$$

$$a^n - stepen \quad ili \quad potencija$$

$$n - eksponent, a - baza \quad ili \quad osnova$$

1. Napisati kraće izraze:
   (a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$
   (b) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6$
   (c) $(3x) \cdot (3x) \cdot (3x) \cdot (3x) = (3x)^4$
   (d) $(2x + y) \cdot (2x + y) \cdot (2x + y) \cdot (2x + y) = (2x + y)^4$

2. Obaviti operacije:
   (a) $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$
   (b) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

(c) $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

(d) $(\frac{3}{4})^4 = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$

3. Obaviti operacije:

(a) $(-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$

(b) $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

(c) $(-\frac{1}{2})^3 = (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{3}{4}) \cdot (-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{8}$

4. Obaviti naznačene operacije:

$$(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1$$

Domaći zadatak:

1. Napisati kraće izraze:

(a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

(b) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} =$

(c) $(5y) \cdot (5y) \cdot (5y) \cdot (5y) =$

(d) $(x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y) \cdot (x-y) =$

2. Obaviti naznačene operacije:

(a) $(-2) + (-2)^2 - (-2)^3 - (-2)^4 + (-2)^5 =$

(b) $(-1)^2 + (-2)^3 + (-3)^2 - (-1)^2 =$

(c) $3 \cdot 4^2 - 2 \cdot 7^3 + 5^3 =$

(d) $4 \cdot (\frac{1}{2})^2 - 5 \cdot (\frac{1}{3})^3 + 320 \cdot (\frac{1}{4})^4 =$

(e) $2 \cdot (-1)^2 + 3 \cdot (-2)^3 - 2^2 =$

3. Obaviti naznačene operacije:

(a) $(-\frac{1}{2})^2 + 5 \cdot (-\frac{2}{3})^2 - (\frac{3}{2})^2 =$

(b) $(-1\frac{1}{3})^2 + (\frac{3}{4})^2 - (-1)^3 =$

16.1 OPERACIJE SA STEPENIMA

Množenje stepena istih baza

Definicija 16.2 *Stepene jednakih baza množimo tako što zajedničku bazu prepišemo a eksponente saberemo*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

1. Izračunaj:

   (a) $3^{12} \cdot 3^{15} = 3^{12+15} = 3^{27}$

   (b) $a^7 \cdot a^{11} \cdot a^{12} = a^{7+11+12} = a^{28}$

   (c) $3^x \cdot 3^{2x} \cdot 3^{3x} = 3^{x+2x+3x} = 3^{6x}$

Dijeljenje stepena istih baza

Definicija 16.3 *Stepene jednakih baza dijelimo tako što zajedničku bazu prepišemo a eksponente oduzmemo*

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

1. Izračunaj:

   (a) $3^{32} : 3^{15} = 3^{32-15} = 3^{17}$

   (b) $a^{17} : a^{11} : a^2 = a^{17-11-2} = a^4$

   (c) $3^{5x} : 3^{2x} = 3^{5x-2x} = 3^{3x}$

2. Izračunaj:

$$\frac{2^{12}}{2^3 \cdot 2^5} = \frac{2^{12}}{2^{3+5}} =$$

$$= \frac{2^{12}}{2^8} = 2^{12} : 2^8 = 2^{12-8} = 2^4 = 16$$

Domaći zadatak:

1. Pomnoži stepene:

   (a) $x^3 \cdot x^5 \cdot x^4 =$

   (b) $3^4 \cdot (-3)^4 \cdot (-3)^3 =$

   (c) $4^5 \cdot 16 \cdot (-4)^3 =$

(d) $9 \cdot 3^4 \cdot (-3)^4 \cdot (-9) =$

2. Podijeliti stepene:

(a) $y^7 : y^4 =$

(b) $0,25^6 : 0,25^5 =$

(c) $5^8 : 5^3 =$

(d) $7^6 : 7^4 =$

(e) $a^8 : a^5 =$

(f) $a^9 : a^5 =$

(g) $x^6 : x =$

(h) $y^{3+a} : y^a =$

3. Izračunaj:

(a) $(x^4 \cdot x^2) : x^5 =$

(b) $(0,25 \cdot 0,5^2) : (0,5^3 \cdot 0,5) =$

4. Izračunaj:

(a) $\dfrac{3^6 \cdot 3^{12}}{27 \cdot 3^{14}} =$

(b) $\dfrac{8 \cdot 2^4 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (2^5 : 4)}$

(c) $\dfrac{2^{12}}{2^6 \cdot 2^3} : \dfrac{8 \cdot 2^3 \cdot 2^5}{(2^3 : 4) \cdot 16} =$

5. Izračunaj vrijednost izraza:

(a) $5^3 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4^2 - 2^3 =$

(b) $10^2 - 3 \cdot 4^2 + 5^2 \cdot 2 - 5^3 \cdot 1^3 =$

(c) $2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3^1 =$

6. Izračunaj vrijednost izraza:

(a) $15^2 + [(3^4 - 1^4) - (8^2 - 3^2)] =$

(b) $2^5 \cdot [(10^2 - 9^2) - (4^3 - 2 \cdot 5^2)] =$

7. Izračunaj:

(a) $(-a)^2 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^5 =$

(b) $-(-a)^2 \cdot (-a^2) \cdot [-(-a)^2] =$

Stepenovanje stepena

Definicija 16.4 *Stepen stepenujemo stepenom tako što bazu prepišemo a eksponente pomnožimo,tj*

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

1. Izračunati:

(a) $(5^2)^3 = 5^{2\cdot3} = 5^6$

(b) $(x^7)^3 = x^{7\cdot3} = x^{21}$

(c) $(y^{14})^4 = y^{14\cdot4} = y^{56}$

(d) $((-2)^2)^3 = (-2)^{2\cdot3} = (-2)^6 = 2^6 = 64$

(e) $((-2)^3)^3 = (-2)^{3\cdot3} = (-2)^9 = -2^9 = -512$

2. Izračunati:

(a) $[(a^2)^3]^5 = (a^6)^5 = a^{30}$

(b) $[-a^2]^4 = a^8$

(c) $[-a^2]^3 = -a^6$

3. Odrediti n tako da vrijedi $5^n \cdot 5^4 = 5^{12}$

$$5^n \cdot 5^4 = 5^{12}$$

$$5^{n+4} = 5^{12} \Rightarrow n + 4 = 12$$

$$n = 12 - 4$$

$$n = 8$$

Stepen proizvoda i količnika

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

1. Izračunati:

   (a) $(\frac{3}{4})^2 \cdot 4^2 \cdot (\frac{1}{4})^2 = \frac{3^2}{4^2} \cdot 4^2 \cdot \frac{1^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

   (b) $(\frac{3}{5})^4 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{3^4}{5^4} \cdot \frac{2^3}{3^3} = \frac{3 \cdot 2^3}{5^4} = \frac{3 \cdot 8}{625} = \frac{24}{625}$

2. Dokazati da izraz

$$\frac{27^{2n+1}}{9^{3n-1}}$$

   ne zavisi od n ($n \in \mathbb{N}$).

$$\frac{27^{2n+1}}{9^{3n-1}} = \frac{(3^3)^{2n+1}}{(3^2)^{3n-1}} =$$

$$\frac{3^{3\cdot(2n+1)}}{3^{2\cdot(3n-1)}} = \frac{3^{6n+3}}{3^{6n-2}} =$$

$$3^{(6n+3)-(6n-2)} = 3^{6n+3-6n+2} = 3^5 = 243$$

Domaći zadatak:

1. Izračunati:

   (a) $(a^2)^2 =, \quad (a^2)^3 =, \quad (a^2)^4 =$

   (b) $(x^3)^4 =, \quad (x^2)^5 =, \quad (x^{14})^2 =$

   (c) $(-a^5)^2 =, \quad (-a^2)^3 =, \quad (-a^3)^3 =$

2. Izračunati:

   (a) $[(a^4)^2]^5 =$

   (b) $[(-a^2)^3]^5 =$

   (c) $[(-a^3)^3]^3 =$

3. Izračunati:

   (a) $(a^3)^2 \cdot (a^5)^2 =, \quad (x^7)^2 \cdot (x^5)^3 =$

   (b) $(x^3)^4 =, \quad (x^2)^5 =, \quad (x^{14})^2 =$

   (c) $((-1)^5)^2 =, \quad ((-2)^2)^3 =, \quad ((-2)^3)^3 =$

4. Izračunati:

(a) $\left[(-2)^2\right]^3 - \left[(-1)^4\right]^3 - \left[2^3\right]^2 =$

(b) $\left[(-2)^3\right]^2 - \left[(-2)^2\right]^2 + \left[(-1)^3\right]^2 =$

(c) $\left[(-0,5)^2\right]^3 - \left[(0,5)^3\right]^2 + \left[(-1)^3\right]^5 =$

17 CIJELI RACIONALNI IZRAZI

1. Izračunati vrijednost racionalnog izraza

$$\left.\begin{array}{r} 2x^2+5x-10 \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 2x^2+5x-10 = 2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-10 = \\ = 2\cdot 4-10-10 = 8-10-10 = -12 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 3a^2-4a-1 \\ x=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} 3a^2-4a-1 = 3\cdot 10^2-4\cdot 10-1 = \\ = 3\cdot 100-40-1 = 300-40-1 = 259 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1} \\ x=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1} = \dfrac{3^2+2\cdot 3-1}{3^2+1} = \\ = \dfrac{9+6-1}{9+1} = \dfrac{14}{10} = \dfrac{7}{5} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1} \\ x=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \dfrac{x^2+2x-1}{x^2+1} = \dfrac{(-2)^2+2\cdot(-2)-1}{(-2)^2+1} = \\ = \dfrac{4-4-1}{4+1} = -\dfrac{1}{5} \end{array}$$

DIJELJENJE S NULOM NEMA SMISLA

2. Za koje vrijednosti promjenjive je definiran izraz:

(a) $\dfrac{x-1}{x+2}$

(b) $\dfrac{x+5}{x-1}$

(c) $\dfrac{2x^2-4x-5}{x^2+5}$

RJEŠENJE:

(a) Definisan za sve vrijednosti x osim za $x=-2$

(b) Definisan za sve vrijednosti x osim za $x = 1$

(c) Definisan za sve vrijednosti x,jer $x^2 + 5 > 0$

3. Odrediti vrijednosti promjenjive za koju izraz nije definisan:

   (a) $\dfrac{x-1}{x+5}$

   (b) $\dfrac{2x+5}{x-3}$

   (c) $\dfrac{2x^2+7x-4}{2x+7}$

   RJEŠENJE:

   (a)
   $$x + 5 = 0$$
   $$x = -5$$
   Nije definisan za $x = -5$.

   (b)
   $$x - 3 = 0$$
   $$x = 3$$
   Nije definisan za $x = 3$.

   (c)
   $$2x + 7 = 0$$
   $$2x = -7$$
   $$x = -\frac{7}{2}$$
   Nije definisan za $x = -\dfrac{7}{2}$.

Domaći zadatak:

1. Izračunaj vrijednost izraza:

   (a) $x^2 - 5x + 6$ za $x = 2$ i za $x = 5$

   (b) $2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ za $x = -1$ i za $x = 3$

(c) $x^3 - x^2 + x$ za $x = 0$ i za $x = 5$

2. Izračunaj vrijednost izraza:

   (a) $2\{2[2(x+2)+2]+2\} =$ za $x = 2$
   (b) $3\{3[3(x+3)+3]+3\} =$ za $x = 3$
   (c) $4\{4[4(x+4)+4]+4\} =$ za $x = 4$
   (d) $5\{5[5(x+5)+5]+5\} =$ za $x = 5$

3. Za koje je vrijednosti promjenjive izraz definiran?

   (a) $\dfrac{y^2 + 2y - 8}{y - 4}$
   (b) $\dfrac{a^2 - 3a + 5}{a + 2}$
   (c) $\dfrac{x^2 + 5x - 1}{x - 1}$
   (d) $\dfrac{5x - 1}{x^2 - 1}$
   (e) $\dfrac{x}{x^2 - 16}$

4. Za koje je vrijednosti promjenjive izraz nije definiran?

   (a) $\dfrac{y - 1}{y - 5}$
   (b) $\dfrac{a^2 - 3a + 1}{2a + 2}$
   (c) $\dfrac{x^2 - 8x - 1}{10x - 3}$
   (d) $\dfrac{3x^2 - 8x - 1}{4x - 3}$
   (e) $\dfrac{2x - 1}{x^2 + 1}$

17.1 MONOMI

Monomi su jednočlani algebarski izrazi.

Primjer 17.1 *Primjeri monoma su:* $2, 3a, -7ab, \frac{2}{3}x, a^2b^3$, *i td.*

Za dva monoma kažemo da su slična ako imaju jednake glavne veličine (iste promjenjive i iste eksponente).

Primjer 17.2 *Koji od nabrojanih monoma su slični monomi:*

(a) *7a i 3a (DA)*

(b) $5x^2$ *i* $5x^3$ *(NE)*

(c) *5a i 5x (NE)*

(d) $7x^3$ *i* $6x^3$ *(DA)*

17.2 SABIRANJE I ODUZIMANJE MONOMA

Možemo sabirati i oduzimati samo slične monome.

1. Sabrati monome:

   (a) $7a + 3a = 10a$

   (b) $12x - 3x = 9x$

   (c) $5a + 2a - 11a - a = -5a$

   (d) $\frac{2}{5}a + \frac{1}{5}a = \frac{3}{5}a$

   (e) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}a = (\frac{3}{5} - \frac{1}{2})x = \frac{6-5}{10}x = \frac{1}{10}x$

2. Oslobodi se zagrade pa izračunaj:

$$\left[12x^2 - (8x^2 - 13x^2) - (3x^2 + 15x^2)\right] =$$

$$= \left[12x^2 - 8x^2 + 13x^2 - 3x^2 - 15x^2\right] =$$

$$= 12x^2 - 8x^2 + 13x^2 - 3x^2 - 15x^2 = 9x^2$$

3. Oslobodi se zagrade pa izračunaj:

$$\left[(\frac{3}{4}z - \frac{1}{2}z) - (\frac{5}{8}z - \frac{1}{3}z)\right] + \left[(\frac{2}{3}z - \frac{1}{4}z) - (\frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z)\right] =$$

$$= \left[\frac{3}{4}z - \frac{1}{2}z - \frac{5}{8}z + \frac{1}{3}z\right] + \left[\frac{2}{3}z - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z\right] =$$

$$= \frac{3}{4}z - \frac{1}{2}z - \frac{5}{8}z + \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}z - \frac{1}{4}z - \frac{1}{4}z - \frac{1}{8}z =$$

$$= (\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{5}{8} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8})z =$$

$$= \frac{18 - 12 - 15 + 8 + 16 - 6 - 6 - 3}{24} =$$

$$= \frac{0}{24} = 0$$

Domaći zadatak:

1. Odredi međusobno slične(istoimene) monome:

   (a) $3x \quad , 7xy \quad , -2a \quad , 3ab \quad , -4x \quad , a \quad , -7ab$

   (b) $3a^2 \quad , 4a^3 \quad , -3a^3 \quad , 7a^2 \quad , 3a^2b \quad , 4a^2b \quad , -3ab^2$

   (c) $8abc \quad , -xyz \quad , -abc \quad , 0,2xyz \quad , -2abc \quad , 2xyz$

2. Izračunaj:

   (a) $3a + 5a =$ $\quad 7x + 5x =$ $\quad 3m + 10m =$ $\quad 6y + 5y =$ $\quad 7b + 2b =$ $\quad 5k + 11k =$

   (b) $\frac{3}{5}a + \frac{1}{5}a =$ $\quad z + \frac{3}{5}z =$

3. Izračunaj:

   (a) $13a - 5a =$ $\quad 72x - 35x =$ $\quad 23m - 10m =$ $\quad 6yx - 25yx =$ $\quad 117b - 322b =$ $\quad 5k - 11k =$

   (b) $\frac{7}{8}axy - \frac{3}{4}axy =$ $\quad z - \frac{3}{5}z =$

4. Obavi naznačene operacije:

   (a) $4x - 2x - 10x + x =, \quad 6a^2 - 2a^2 - 10a^2 + 5a^2$

   (b) $4a^2b - 5a^2b - 7a^2b - a^2b = \quad a^2b - \frac{1}{4}a^2b + 2\frac{1}{4}a^2b + a^2b =$

   (c) $\frac{1}{8}a^3 + \frac{5}{12}a^3 - \frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{3}a^3 =$

5. Oslobodi se zagrade,a zatim reduciraj izraz:

   (a) $8x - \{5x - [9x - (6x - 2x)]\} =$

   (b) $5a^2 - \{5a^2 + [4a^2 - (2a^2 - 7a^2)]\} =$

   (c) $x - \{[(3x - 8x) + (5x - 4x)] + (6x - 3x)\} =$

17.3 MNOŽENJE I DIJELJENJE MONOMA

1. Izračunati:

   (a) $2a \cdot 5x = 10ax$

   (b) $4ax \cdot 3by = 4 \cdot 3 \cdot ax \cdot by = 12abxy$

   (c) $3a^2 \cdot 2b^2 \cdot 5c^2 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot a^2b^2c^2 = 30a^2b^2c^2$

   (d) $(-3ax) \cdot (-5by) = (-3) \cdot (-5)axby = 15axby$

2. Izračunati:

   (a) $14x^4 : 7x^2 = 2x^2$

   (b) $3x^3 : 2x = \frac{3x^3}{2x} = \frac{3}{2}x^2$

Domaći zadatak:

1. Obavi naznačene operacije:

   (a) $3 \cdot 5a = \quad 4 \cdot 0,5a = \quad 0 \cdot 7y = \quad 3a \cdot 2b = \quad -4x \cdot 2y = \quad 4x \cdot 12y =$

   (b) $\frac{7}{8}ax \cdot \frac{3}{4}ax^2 = \quad -8a \cdot (-b) = \quad (-4bc) \cdot 12bca =$

2. Obavi naznačene operacije:

   (a) $3 \cdot 5a \cdot 6b =$ $\quad 4x^2 \cdot 13a \cdot 2x^3 =$ $\quad 10 \cdot 7y \cdot m =$ $\quad 3a \cdot 2b \cdot 5xy =$ $\quad -4x \cdot (-2y) =$ $\quad 4x \cdot (-2a) \cdot 12y =$

3. Obavi naznačene operacije:

   (a) $18x : 9 =$ $\quad -20xy : 4 =$ $\quad 30a^2 : 6 =$ $\quad 12ab : 2b =$ $\quad 60a^3b^2 : 15ab =$ $\quad 8x^2y : (-2y^3) =$

   (b) $\frac{2}{3}a^2 : \frac{1}{6}a =$ $\quad 1\frac{5}{8}x^2y^2 : 1\frac{1}{12}x^2 =$ $\quad 72a^3b^4c^2 : (-12ab^2c^2) =$

17.4 POLINOMI

Izrazi koji prestavljaju zbir raznoimenih monoma nazivaju se polinomi.

1. Za polinom $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2$ izračunati $P(1)$,$P(-1)$ i $P(0)$

$$\left.\begin{array}{r} P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2 \\ P(1) =? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 + 2 = \\ = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 1 + 2 = \\ = 2 - 3 + 1 + 2 = 2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2 \\ P(-1) =? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P(1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 1 + 2 = \\ = 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 - 1 + 2 = \\ = -2 - 3 - 1 + 2 = -4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 2 \\ P(0) =? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P(1) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 0 + 2 = \\ = 2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 0 + 2 = 2 \end{array}$$

Domaći zadatak:

1. Odredi vrijednost polinoma:

   (a) $-x^3 - x^2 + x + 5$ za $x = 1$

   (b) $2x^4 + 2x^3 - 2x + 11$ za $x = -3$

   (c) $5x^5 - 5x^3 + 5$ za $x = 0$

17.5 SABIRANJE I ODUZIMANJE POLINOMA

1. Saberi polinome:

$$P(x) = 4x^2 - 5x + 2$$
$$Q(x) = 2x^2 - 7x - 1$$
$$P(x) + Q(x) = 4x^2 - 5x + 2 + 2x^2 - 7x - 1$$
$$P(x) + Q(x) = 6x^2 - 12x + 1$$

2. Oduzmi polinome:

$$P(x) = 6x^2 - 12x + 1$$
$$Q(x) = 2x^2 - 7x - 1$$
$$P(x) - Q(x) = 6x^2 - 12x + 1 - (2x^2 - 7x - 1)$$
$$P(x) - Q(x) = 6x^2 - 12x + 1 - 2x^2 + 7x + 1$$
$$P(x) - Q(x) = 4x^2 - 5x + 2$$

3. Odrediti zbir i razliku polinoma:

$$P(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 5$$
$$Q(x) = x^4 + x^3 - x^2 + 2x$$
$$P(x) + Q(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 5 + x^4 + x^3 - x^2 + 2x$$
$$P(x) + Q(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 5$$
$$P(x) - Q(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 5 - (x^4 + x^3 - x^2 + 2x)$$
$$P(x) - Q(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + 5 - x^4 - x^3 + x^2 - 2x$$
$$P(x) - Q(x) = -x^3 + 3x^2 - 8x + 5$$

4. Neka su dati polinomi:

$$A(x) = 3x^2 + 6x - 1$$
$$B(x) = x^2 - 5x + 4$$
$$C(x) = 10 - x$$

Odrediti $A + (B - C)$ i $A - (C - B)$

$$A + (B - C) = 3x^2 + 6x - 1 + (x^2 - 5x + 4 - (10 - x))$$
$$A + (B - C) = 3x^2 + 6x - 1 + (x^2 - 5x + 4 - 10 + x)$$
$$A + (B - C) = 3x^2 + 6x - 1 + x^2 - 5x + 4 - 10 + x$$
$$A + (B - C) = 4x^2 + 2x - 7$$
$$A - (C - B) = 3x^2 + 6x - 1 - \big[10 - x - (x^2 - 5x + 4)\big]$$
$$A - (C - B) = 3x^2 + 6x - 1 - \big[10 - x - x^2 + 5x - 4\big]$$
$$A - (C - B) = 3x^2 + 6x - 1 - 10 + x + x^2 - 5x + 4$$
$$A - (C - B) = 4x^2 + 2x - 7$$

5. Riješiti jednačinu:

(a)
$$(1 - 8x) + (5x - 3) = 7$$
$$1 - 8x + 5x - 3 = 7$$
$$-8x + 5x = 7 - 1 + 3$$
$$-3x = 9$$
$$x = 9 : (-3)$$
$$\underline{x = -3}$$

(b)
$$(3y + 2) - (4 - y) = 3$$
$$3y + 2 - 4 + y = 3$$
$$3y + y = 3 - 2 + 4$$
$$4y = 5$$
$$y = 5 : 4$$
$$\underline{y = \frac{5}{4}}$$

Domaći zadatak:

1. Saberi polinome:

   (a)
   $$P(x) = 7a^2 - 2a + 5$$
   $$Q(x) = 3a^2 + 5a - 1$$

   (b)
   $$P(x) = 4x^2 - 3x - 2$$
   $$Q(x) = -2x^2 - x - 1$$

   (c)
   $$P(x) = 2a^3 - 3a^2 - 4a + 1$$
   $$Q(x) = 4a^3 - a^2 + 3a + 5$$

2. Oduzmi polinome:

   (a)
   $$P(x) = 10a^2 + 3a + 4$$
   $$Q(x) = 3a^2 + 5a - 1$$

   (b)
   $$P(x) = -5x^2 - 3x - 4$$
   $$Q(x) = -2x^2 - x - 3$$

   (c)
   $$P(x) = 2a^3 - 3a^2 - 4a + 1$$
   $$Q(x) = 4a^3 - a^2 + 3a + 5$$

3. Oslobodi se zagrada a zatim reduciraj polinome:

   (a)
   $$(7x^2 + 3x) + \big\{(6x^2 + 2) + \big[(2x^2 - 6x) + (3x^2 + 5)\big]\big\} =$$

   (b)
   $$3x - \{5x - (x - 2) - [(7x - 3) - (-2x - 5)]\} =$$

4. Dati su polinomi:

$$P(x) = x^2 + x + 5$$
$$Q(x) = 2x - 4x^2 + 5$$
$$R(x) = 9 - 3x - x^2$$

Odrediti:

(a) $P(x) - (Q(x) - R(x)) =$

(b) $P(x) + (R(x) - Q(x)) =$

(c) $-P(x) - R(x) - Q(x)$

5. Riješiti jednačinu:

(a) $(2x - 3) + (5x + 5) = 9$

(b) $(4x - 5) - (2x + 80) = 11$

(c) $(2x^2 - 2x - 7) - (2x^2 - 5x + 3) = 8$

6. Odredi koeficiente a,b,c,d,e na desnoj strani jednakosti ako je:

(a) $(5x^2 + 6x + 7) + (2x^2 - 3x + 11) = ax^2 + bx + c$

(b) $(4x^2 + 5x - 6) - (-7x^2 - 3x + 1) = ax^2 + bx + c$

(c) $(5x^2 + 6x + 7) + (2x^2 - 3x - 11) = ax^2 + bx + c$

(d) $(3y + 7)(y + 4) = ay^2 + by + c$

(e) $(4x^2 - 3x + 1)(x + 4) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

(f) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 + x + 1) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

(g) $(x^2 + 5x + 1)(2x^2 + 3x - 1) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

17.6 MNOŽENJE POLINOMA

1. Izračunati proizvod:

   (a) $(1+2x)\cdot x = 1\cdot x + 2\cdot x\cdot x = x + 2x^2$

   (b) $(x^2-7x-4)\cdot 3 = 3x^2 - 21x - 12$

   (c) $(5y^2-y+2)\cdot(-5y) = -25y^3 + 5y^2 - 10y$

2. Pomnožiti polinome:

   (a)
   $$(3x-2)(x+5) = 3x^2 + 15x - 2x - 10 = 3x^2 + 13x - 10$$

   (b)
   $$\begin{aligned}(a^2-2a+3)\cdot(a-3) &= a^3 - 2a^2 + 3a - 3a^2 - 6a - 9 = \\ &= a^3 - 5a^2 - 3a - 9\end{aligned}$$

   (c)
   $$\begin{aligned}(a^3-2a^2+3a+4)\cdot(2a-5) &= 2a^4-4a^3+6a^2+8a-5a^3+10a^2-15a-20 = \\ &= 2a^4 - 9a^3 + 16a^2 - 7a - 20\end{aligned}$$

3. Dati su polinomi
   $$P_1(x) = 3x^2 - 5x + 2$$
   $$P_2(x) = x^2 - 3x + 2$$
   odrediti njihov proizvod.
   $$P_1(x)\cdot P_2(x) = (3x^2-5x+2)\cdot(x^2-3x+2) =$$
   $$P_1(x)\cdot P_2(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 9x^3 + 15x^2 - 6x + 6x^2 - 10x + 4 =$$
   $$P_1(x)\cdot P_2(x) = 3x^4 - 14x^3 + 23x^2 - 16x + 4$$

4. Dati su polinomi
   $$P_1(a) = 3a^2 - 2a + 4$$
   $$P_2(a) = 2a^2 - 3a - 5$$
   odrediti njihov proizvod.
   $$P_1(a)\cdot P_2(a) = (3a^2-2a+4)\cdot(2a^2-3a-5) =$$
   $$P_1(a)\cdot P_2(a) = 6a^4 - 4a^3 + 8a^2 - 9a^3 + 6a^2 - 12a - 15a^2 + 10a - 20 =$$
   $$P_1(a)\cdot P_2(a) = 6a^4 - 13a^3 - a^2 - 2a - 20$$

5. Izračunati:

$$(a-1)\cdot(2a+5)-(2a-5)\cdot(a-3)-(a^2-3a)\cdot 2=$$
$$=(2a^2-2a+5a-5)-(2a^2-5a-6a+15)-(2a^2-6a)=$$
$$=2a^2+3a-5-2a^2+11a-15-2a^2+6a=$$
$$=-2a^2+20a-20$$

Domaći zadatak:

1. Obavi naznačeno množenje polinoma monomom:

   (a) $5x\cdot(x^2-2x+1)=$
   (b) $2a\cdot(3-5a-4a^2)=$
   (c) $(1-x+x^2)\cdot 5x=$
   (d) $(-4x^2+2x-3)\cdot 3x=$
   (e) $(x^2+3x-4)\cdot 4=$
   (f) $(2+5x-6x^2)\cdot 15x^2=$
   (g) $(a^5+4a^4+5a^3-6a^2)\cdot 2a=$

2. Obavi naznačeno množenje binoma:

   (a) $(a+3)\cdot(a-4)=$ $\qquad(x+4)\cdot(x-3)=$
   (b) $(b+2)\cdot(b-3)=$ $\qquad(y-2)\cdot(2y-1)=$
   (c) $(x+3)\cdot(x+5)=$ $\qquad(a-4)\cdot(a+4)=$
   (d) $(x+2y)\cdot(x-3y)=$ $\qquad(a+7)\cdot(a+7)=$
   (e) $(2a^2-3ab)\cdot(a+b)=$ $\qquad(4a^3-2a^2)\cdot(a+1)=$
   (f) $(x+2y)\cdot(2x-y)=$ $\qquad(3a+4b)\cdot(2ab-1)=$
   (g) $(5x^2-6xy)\cdot(3xy-4y^2)=$ $\qquad(x-bac)\cdot(x+bac)=$

3. Obavi naznačeno množenje polinoma:

   (a) $(a^2-a+2)\cdot(a-2)=$
   (b) $(x^2+x-1)\cdot(x-1)=$
   (c) $(3x^2-2x+4)\cdot(2x-3)=$

(d) $(4y^2 + 2y + 1) \cdot (2y - 1) =$

4. Obavi naznačene operacije:

   (a) $(x + 3y) \cdot (x - 2y) + (x + 2y) \cdot (x - y) - (x - y) \cdot (x + 2y) =$

   (b) $(x + 2y) \cdot (y - 2x) - (x - y) \cdot (2x + 3y) + (x - 2y) \cdot (2x - y) =$

5. Obavi naznačeno množenje:

   (a) $(x^3 - x^2 + x - 1) \cdot (x + 1) =$

   (b) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) \cdot (a - b) =$

   (c) $(4y^2 + 3y - 10) \cdot (3y - 1) =$

6. Obavi naznačeno množenje polinoma:

   (a) $(x^2 - 3a + 5) \cdot (x^2 - x + 3) =$

   (b) $(x^2 + 3x - 5) \cdot (x^2 - 2x + 3) =$

   (c) $(3a^2 - 5a - 7) \cdot (a^2 - 2a - 4) =$

   (d) $(x^2 - 3x - 5) \cdot (2x^2 - 3x - 4) =$

7. Dati su polinomi

$$P_1(x) = x^2 - 2x + 3$$
$$P_2(x) = 2x^2 + 3x + 1$$

   odrediti njihov proizvod.

8. Dati su polinomi

$$P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$$
$$Q(x) = 2x^2 - x + 3$$
$$R(x) = x^2 - 3x - 2.$$

   Odrediti:

   (a) $P(x) \cdot Q(x) =$

   (b) $P(x) \cdot R(x) =$

   (c) $Q(x) \cdot R(x) =$

9. Riješiti jednačinu:

   (a) $6x^2 - (2x-3)\cdot(3x+2) = 2$

   (b) $(4x-7)\cdot(3x-5) = (12x-11)\cdot(x-1) - 30$

10. Dokazati da vrijednost izraza:

    (a) $x\cdot(1+2x) - x^2(2+x) + (3-x+x^2)$

    (b) $x^4 - (x^2+1)\cdot(x^2-1)$

    ne zavisi od x.

17.7 KVADRAT BINOMA

Kvadrat zbira:

$$(I+II)^2 = I^2 + 2\cdot I\cdot II + II^2$$

Kvadrat razlike:

$$(I-II)^2 = I^2 - 2\cdot I\cdot II + II^2$$

1. Kvadriraj binome:

   (a) $(x+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

   (b) $(a-4)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot 4 + 4^2 = a^2 - 8a + 16$

   (c) $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$

   (d) $(3a-5)^2 = (3a)^2 - 2\cdot 3a\cdot 5 + 5^2 = 9a^2 - 30a + 25$

   (e) $(\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}y)^2 = (\frac{3}{2}x)^2 - 2\cdot\frac{3}{2}x\cdot\frac{2}{3}y + (\frac{2}{3}y)^2 = \frac{9}{4}x^2 - 2xy + \frac{4}{9}y^2$

2. Napiši kao kvadrat binoma slijedeće trinome:

   (a) $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

   (b) $a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2$

   (c) $100x^2 - 140x + 49 = (10x - 7)^2$

   (d) $\frac{9}{16}x^2 - \frac{1}{2}xy + \frac{1}{9}y^2 = (\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}y)^2$

3. Dopuni trinom do potpunog kvadrata:

   (a) $x^2 + 4x + ... = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

   (b) $x^2 - 6x + ... = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

4. Obavi naznačene operacije:

   (a)

$$(x + 3)^2 + (x - 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2 =$$

$$= x^2 + 6x + 9 + x^2 - 8x + 16 = 2x^2 - 2x + 25$$

   (b)

$$(3x-1)^2-(1+2x)^2 = (3x)^2-2\cdot3x\cdot1+1^2-(1^2+2\cdot2x\cdot1+(2x)^2) =$$

$$= 9x^2 - 6x + 1 - (1 + 4x + 4x^2) =$$

$$= 9x^2 - 6x + 1 - 1 - 4x - 4x^2 =$$

$$= 5x^2 - 10x$$

Domaći zadatak:

1. Kvadriraj binome:

   (a) $(x+y)^2 =$

   (b) $(x-y)^2 =$

   (c) $(x+4)^2 =$

   (d) $(t+7)^2 =$

   (e) $(x-5)^2 =$

   (f) $(2a-1)^2 =$

   (g) $(3a-2)^2 =$

   (h) $(4a-5)^2 =$

   (i) $(3x+8y)^2 =$

   (j) $(4a+9b)^2 =$

   (k) $(x-2y)^2 =$

   (l) $(3a-3b)^2 =$

   (m) $(a-3x)^2 =$

   (n) $(1-2a)^2 =$

   (o) $(2-5x)^2 =$

   (p) $(1-3y)^2 =$

   (r) $(5-2u)^2 =$

   (s) $(2m-5)^2 =$

   (t) $(b-8)^2 =$

   (u) $(2ab-1)^2 =$

   (v) $(9-10xy)^2 =$

   (z) $(-2ab-1)^2 =$

2. Kvadriraj binome:

   (a) $(\frac{2}{3}x + 3)^2 =$

   (b) $(\frac{5}{3}x - \frac{3}{4}y)^2 =$

   (c) $(\frac{3}{2}a + \frac{2}{3}b)^2 =$

   (d) $(\frac{7}{3}x\frac{3}{8}y)^2 =$

   (e) $(1\frac{1}{4}a - 1\frac{1}{3}b)^2 =$

   (f) $(\frac{1}{2}a - 1)^2 =$

3. Dopuni trinom do potpunog kvadrata:

   (a) $a^2 + 4a + ... =$

   (b) $4x^2 + 12x + ... =$

   (c) $16a^2 + 56a + ... =$

   (d) $81y^2 - 180y + ... =$

   (e) $0,04x^2 + 2,8a + ... =$

   (f) $25a^2 - ... + 1 =$

   (g) $16a^2 + ... + 4ab^2 =$

4. Napiši kao kvadrat binoma slijedeće trinome:

   (a) $x^2 - 18x + 81 =$

   (b) $x^2 + 24x + 144 =$

   (c) $49a^2 - 56ab + 16b^2 =$

   (d) $4x^2 + 20xy + 25y^2 =$

   (e) $64 + 16ab + a^2b^2 =$

   (f) $\frac{9}{16}x^2 + \frac{1}{2}xy + \frac{1}{9}y^2 =$

5. Obavi naznačene operacije:

   (a) $(x-3)^2+(x+4)^2=$
   (b) $(5x+6)^2-(6-5x)^2=$
   (c) $(3x-1)^2+(1+3x)^2=$
   (d) $(a+5)^2+(a-4)^2+4(a+2)^2=$
   (e) $3(x-1)^2+4(2x+1)^2-(x+2)^2=$

6. Dati su polinomi

$$P(x)=2x+3$$
$$Q(x)=2-3x$$
$$R(x)=2x+1$$

   Odrediti:

   (a) $Q^2-4PR=$
   (b) $R^2-2PQ=$
   (c) $P^2-3QR=$

7. Dati su polinomi

$$P(m)=m+5$$
$$Q(m)=2m-1$$
$$R(m)=m^2-1$$

   Odrediti:

   (a) $2PQ-R^2=$
   (b) $3PR-Q^2=$
   (c) $P^2-3QR=$

8. Dati su polinomi

$$M(m)=m-1$$
$$N(m)=m+1$$
$$S(m)=2m-1$$

   Odrediti:

(a) $S^2 + MN =$

(b) $M^2 + NS =$

(c) $N^2 + MS =$

9. Rješenje jednačine $(a+3)^2 - a^2 = 27$ je dužina stranice jednakostraničnog trougla izražena u cm.Odrediti površinu,obim i visinu tog trougla.

10. Rješenje jednačine $(a+1)^2 - a^2 = 25$ je dužina stranice jednakokrakog trougla izražena u cm.Odrediti površinu i obim tog trougla,ako je krak $b = 10cm$.

17.8 RASTAVLJANJE NA PROSTE FAKTORE IZVLAČENJEM ISPRED ZAGRADE ZAJEDNIČKOG FAKTORA

1. Rastaviti na proste faktore:

   (a) $5x + 5y = 5(x+y)$

   (b) $3x + 7xy = x(3+7y)$

   (c) $8x^2 + 16x + 8 = 8(x^2 + 2x + 1) = 8(x+1)^2$

   (d) $5a^3b^2 + 10a^2b + 5a = 5a(a^2b^2 + 2ab + 1) = 5a(ab+1)^2$

2. Rastaviti na proste faktore:

   (a)
   $$ac + bc + a + b = c(a+b) + (a+b) = (a+b)(c+1)$$

   (b)
   $$2ax + 2ay + 3x + 3y = 2a(x+y) + 3(x+y) = (x+y)(2a+3)$$

Domaći zadatak:

1. Rastaviti na faktore:

   (a) $2a^3 - 6a^2 + 4a =$

   (b) $4x^3 + 4x^2 + x =$

   (c) $8b^2 - 10b + 2 =$

(d) $5a + 10b =$

(e) $12a - 12x =$

(f) $4ax - 10ay =$

(g) $8x^2 - 24xy =$

(h) $3ab - 6a^2b^2 + 12a^3b^3 =$

(i) $6x^3y^3 + 12x^2y^2 - 24xy =$

(j) $24a^3b^3c^3 - 12a^2b^2c^2 - 6abc =$

(k) $14x - 21xy + 28xy =$

2. Rastaviti na faktore:

(a) $x(a+b) - y(a+b) =$

(b) $(a-b)^2 + (a-b) =$

(c) $(x-y)^2 + c(x-y) =$

(d) $x^2y + 3xy + x + 3 =$

(e) $2a(x+1) + 12x(x+1) =$

(f) $2a^3 + 8a^2 + 3a + 12 =$

(g) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 =$

(h) $x(a-b) - y(b-a) =$

17.9 RASTAVLJANJE KVADRATNOG TRINOMA NA FAKTORE

1. Kvadratne trinome rastaviti na faktore:

(a)

$$x^2+6x+8 = x^2+4x+2x+8 = x(x+4)+2(x+4) = (x+4)(x+2)$$

(b)

$$x^2-11x+18 = x^2-9x-2x+18 = x(x-9)-2(x-9) = (x-9)(x-2)$$

(c)

$$x^2-9x-36 = x^2-12x+3x-36 = x(x-12)+3(x-12) = (x-12)(x+3)$$

Domaći zadatak:

1. Kvadratne trinome rastavi na faktore:

   (a) $x^2 - 5x + 6 =$

   (b) $x^2 + 3x - 10 =$

   (c) $y^2 - 9y + 20 =$

   (d) $a^2 + 18a + 65 =$

   (e) $a^2 + 11a + 28 =$

   (f) $x^2 + 5x + 6 =$

   (g) $b^2 + 13b + 30 =$

   (h) $a^2 + 15a + 50 =$

   (i) $a^2 - a - 12 =$

   (j) $a^2 + a - 2 =$

   (k) $x^2 + 8x + 15 =$

   (l) $t^2 - 8t + 15 =$

   (m) $u^2 - 13u + 30 =$

   (n) $x^2 - 15x + 50 =$

   (o) $a^2 + a - 6 =$

   (p) $y^2 + 2y - 15 =$

17.10 RAZLIKA KVADRATA

$$I^2 - II^2 = (I - II)(I + II)$$

1. Koristeći razliku kvadrata rastaviti na faktore:

   (a) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x - 5)(x + 5)$

   (b) $100 - a^2 = 10^2 - a^2 = (10 - a)(10 + a)$

   (c) $16x^2 - 49 = (4x)^2 - 7^2 = (4x - 7)(4x + 7)$

   (d) $4a^2 - 81b^2 = (2a)^2 - (9b)^2 = (2a - 9b)(2a + 9b)$

   (e) $x^2 - \frac{16}{25} = x^2 - (\frac{4}{5})^2 = (x - \frac{4}{5})(x + \frac{4}{5})$

   (f) $5a^2 - 80b^2 = 5(a^2 - 16b^2) = 5(a^2 - (4b)^2) = 5(a - 4b)(a + 4b)$

Domaći zadatak:

1. Koristeći razliku kvadrata rastaviti na faktore:

   (a) $a^2 - 1 =$

   (b) $x^2 - 9 =$

   (c) $y^2 - 36 =$

   (d) $a^2 - 196 =$

   (e) $a^2 - 169 =$

   (f) $16x^2 - 25y^2 =$

   (g) $81b^2 - 49 =$

   (h) $9 - 4a^2 =$

   (i) $x^2 - \frac{1}{4} =$

   (j) $a^2 - \frac{169}{81} =$

   (k) $\frac{1}{256}x^2 - \frac{1}{289}y^2 =$

   (l) $x^4 - y^4 =$

2. Koristeći razliku kvadrata rastaviti na faktore:

   (a) $(a+5)^2 - 1 =$

   (b) $(3x-1)^2 - 9 =$

   (c) $(2y+1)^2 - 4 =$

   (d) $(a+1)^2 - 1 =$

   (e) $a^2 - (a-2)^2 =$

   (f) $9 - (x+3)^2 =$

   (g) $81b^2 - 49 =$

   (h) $18a^2 - 50y^2 =$

   (i) $20x^2 - 5x =$

   (j) $0,09a^2 - 0,25y^2 =$

   (k) $\frac{9}{4}a^2 - \frac{1}{25}b^2 =$

   (l) $\frac{1}{49}a^2 - \frac{36}{81} =$

17.11 KUB ZBIRA I RAZLIKE

Kub zbira:

$$(I+II)^3 = I^3 + 3\cdot I^2\cdot II + 3\cdot I\cdot II^2 + II^3$$

Kub razlike:

$$(I-II)^3 = I^3 - 3\cdot I^2\cdot II + 3\cdot I\cdot II^2 - II^3$$

1. Kubirati monome:

   (a)
   $$\begin{aligned}(x+3)^3 &= x^3 + 3\cdot x^2\cdot 3 + 3\cdot x\cdot 3^2 + 3^3 = \\ &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27\end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned}(5-y)^3 &= 5^3 - 3\cdot 5^2\cdot y + 3\cdot 5\cdot y^2 - y^3 = \\ &= 125 - 75y + 15y^2 - y^3\end{aligned}$$

2. Kubirati monome:

   (a)
   $$\begin{aligned}(2x+1)^3 &= (2x)^3 + 3\cdot (2x)^2\cdot 1 + 3\cdot 2x\cdot 1^2 + 1^3 = \\ &= 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1\end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned}(3x-\frac{1}{2})^3 &= (3x)^3 - 3\cdot (3x)^2\cdot \frac{1}{2} + 3\cdot 3x\cdot (\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^3 = \\ &= 27x^3 - \frac{27}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - \frac{1}{8}\end{aligned}$$

   (b)
   $$\begin{aligned}(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}y)^3 &= (\frac{2}{3}x)^3 + 3\cdot (\frac{2}{3}x)^2\cdot \frac{1}{4}y + 3\cdot \frac{2}{3}x\cdot (\frac{1}{4}y)^2 + (\frac{1}{4}y)^3 = \\ &= \frac{8}{27}x^3 + \frac{3}{9}x^2y + \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{16}y^3\end{aligned}$$

Domaći zadatak:

1. Kubirati monome:

   (a) $(a+b)^3 =$
   (b) $(x-y)^3 =$
   (c) $(x+4)^3 =$
   (d) $(2a+b)^3 =$
   (e) $(2x-5)^3 =$
   (f) $(2a-1)^3 =$
   (g) $(3a-2)^3 =$

17.12 ZBIR I RAZLIKA KUBOVA

Razlika kubova:

$$I^3 - II^3 = (I - II)(I^2 + I \cdot II + II^2)$$

Zbir kubova:

$$I^3 + II^3 = (I + II)(I^2 - I \cdot II + II^2)$$

1. Koristeći razliku i zbir kubova rastaviti na faktore:

   (a) $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2+2x+4)$
   (b) $y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y+3)(y^2-3y+9)$
   (c) $64x^3 - 125 = (4x)^3 - 5^3 = (4x-5)(16x^2+20x+25)$
   (d) $128x^3 - 2 = 2(64x^3-1) = 2(4x-1)(16x^2+4x+1)$

Domaći zadatak:

1. Koristeći razliku i zbir kubova rastaviti na faktore:

   (a) $64 - x^3 =$
   (b) $y^3 - 8 =$
   (c) $27x^3 - 1 =$
   (d) $a^3 + 8 =$
   (e) $x^3 + 27a^3 =$
   (f) $8 - (x+1)^3 =$

18 MNOGOUGAO(MNOGOKUT)

Definicija 18.1 *Mnogougao je dio ravni ograničen dužima.Dužima nazivamo stranice mnogougla i one obrazuju zatvorenu izlomljenu liniju.Ta se linija naziva poligonalna linija.*

18.1 BROJ DIJAGONALA MNOGOUGLA

Broj dijagonala mnogougla računamo po formuli:

$$D(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

$D(n)$-broj dijagonala mnogougla $n \in \{3, 4, 5, ...\}$.

1. Odrediti broj dijagonala šestougla,a zatim isti nacrtati i povlačenjem dijagonala provjeriti njihov broj.

$$\left.\begin{array}{r} n = 6 \\ D(n) = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} D(6) = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \\ D(6) = \frac{6 \cdot (6-3)}{2} \\ D(6) = \frac{6 \cdot 3}{2} \\ D(6) = 9 \end{array}$$

   Dakle,šestougao ima 9 dijagonala.

2. Koji mnogoigao ima 35 dijagonala?

$$\left.\begin{array}{r} D(n) = 35 \\ n = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} D(n) = \frac{n \cdot (n-3)}{2} \\ 35 = \frac{n \cdot (n-3)}{2} | \cdot 2 \\ 70 = n \cdot (n-3) \\ 70 = n^2 - 3n \\ n^2 - 3n - 70 = 0 \\ n^2 - 10n + 7n - 70 = 0 \\ n(n-10) + 7(n-10) = 0 \\ (n-10)(n+7) = 0 \\ n - 10 = 0 \vee n + 7 = 0 \\ n = 10 \vee n = -7 \\ n = 10 \end{array}$$

   Rješenje $n = -7$ odbacimo jer broj dijagonala nemože biti negativan,pa desetougao ima 35 dijagonala.

3. Koji mnogougao ima tri puta više dijagonala nego tjemena?

$$D(n) = 3n$$

$$\frac{n\cdot(n-3)}{2}=3n|\cdot 2$$

$$n(n-3)=6n|n$$

$$n-3=6$$

$$n=6+3$$

$$n=9$$

Dakle,u pitanju je devetougao.

Domaći zadatak:

1. Odrediti broj dijagonala sedmougla,a zatim isti nacrtati i povlačenjem dijagonala provjeriti njihov broj.
2. Koji mnogokut ima 14 a koji 405 dijagonala?
3. Iz jednog tjemena mnogougla može se povući 7 dijagonala.Koliko on ima ukupno dijagonala?
4. Broj dijagonala mnogougla je četiri puta veći od broja tjemena.Koliko mnogougao ima dijagonala a koliko stranica?

18.2 ZBIR UGLOVA MNOGOUGLA

Zbir unutršnjih uglova mnogougla računamo po formuli:

$$S(n)=(n-2)\cdot 180^\circ$$

Zbir vanjskih uglova mnogougla je 360°.

1. Odrediti zbir unutrašnjih uglova sedmougla i četverougla?

$$\left.\begin{array}{r} n = 7 \\ S(7) = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} S(n) = (n-2) \cdot 180^\circ \\ S(7) = (7-2) \cdot 180^\circ \\ S(7) = 5 \cdot 180^\circ \\ S(7) = 900^\circ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} n = 4 \\ S(4) = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} S(n) = (n-2) \cdot 180^\circ \\ S(4) = (4-2) \cdot 180^\circ \\ S(4) = 4 \cdot 180^\circ \\ S(4) = 360^\circ \end{array}$$

2. Četverougao ima dva prava ugla i jedan od 60°.Koliki mu je četvrti ugao?
   Neka je α-traženi ugao

$$S(4) = 360^\circ$$

$$\alpha + 90^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha + 240^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 240^\circ$$

$$\alpha = 120^\circ$$

<u>Domaći zadatak:</u>

1. Izračunaj zbir unutrašnjih uglova mnogougla sa $6, 7, 8, 9, 10$ strana.
2. Ako mnogougao ima zbir unutrašnjih uglova 1260°,koliko ima stranica?
3. Petougao ima dva prava ugla i dva ugla od 120°.Koliki mu je peti ugao?
4. Koliko dijagonala ima mnogougao čiji je zbir unutrašnjih uglova:
   (a) 1260°
   (b) 1980°
   (c) 2520°

18.3 PRAVILNI MNOGOUGAO

Definicija 18.2 *Mnogougao čije su dužine svih stranica međusobno jednake i svi unutra vsnji uglovi međusonbo jednaki zove se pravilni mnogougao.*

Simetrale unutrašnjih uglova mnogougla sijeku se u jednoj tački.Ta tačka je središte upisane i opisane kružnice pravilnog mnogougla.
Unutrašnji ugao α pravilnog mnogougla sa n stranica ima vrijednost:

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$

1. Provjeriti vrijednost unutrašnjih uglova pravilnog trougla,četverougla i petougla?
   trougao:
   $$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$
   $$\alpha = \frac{(3-2)\cdot 180^\circ}{3}$$
   $$\alpha = 60^\circ$$
   četverougao:
   $$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$
   $$\alpha = \frac{(4-2)\cdot 180^\circ}{4}$$
   $$\alpha = 90^\circ$$
   petougao:
   $$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$
   $$\alpha = \frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5}$$
   $$\alpha = 108^\circ$$
2. Kolika je vrijednost unutrašnjeg ugla pravilnog mnogougla sa 6 strana?
   $$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$$
   $$\alpha = \frac{(6-2)\cdot 180^\circ}{6}$$
   $$\alpha = 120^\circ$$

3. Koliko stranica ima pravilan mnogougao čiji unutrašnji ugao ima vrijednost $150°$?

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$
$$150° = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$
$$n\cdot 150° = n\cdot 180° - 2\cdot 180°$$
$$360° = n\cdot 30°$$
$$n = 12.$$

Domaći zadatak:

1. Kolika je vrijednost unutrašnjeg ugla pravilnog mnogougla sa 5,8,10,12 strana?

2. Koliko stranica ima pravilan mnogougao čiji unutrašnji ugao ima vrijednost $156°$?

18.4 OBIM I POVRŠINA MNOGOUGLA

Obim mnogougla je zbir žina svih njegovih stranica.
Kako ove stranice kod pravilnog mnogougla imaju jednake dužine to je obim O dat sa:

$$O = n \cdot a$$

1. Koliki je obim pravilnog sedmougla stranica $a = 3,25cm$?

$$\left.\begin{aligned} n &= 7 \\ a &= 3,25cm \\ O &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} O &= n \cdot a \\ O &= 7 \cdot 3,25 \\ \underline{O} &\underline{= 22,75cm} \end{aligned}$$

2. Kolika je stranica pravilnog osmougla ako je obim $O = 32cm$?

$$\left.\begin{aligned} n &= 8 \\ O &= 32cm \\ a &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} O &= n \cdot a \\ 32 &= 8 \cdot a \\ a &= 32 : 8 \\ \underline{a} &\underline{= 4cm} \end{aligned}$$

Površina mnogougla

$$P_{ABCDE} = P_{ABC} + P_{ACD} + P_{ADE}$$

Broj ovako dobijenih trouglova je za dva manji od broja strana mnogougla. Posmatrajmo sada pravilni šestougao:

$$P_{\triangle} = \frac{a \cdot \rho}{2}$$

Prema tome,tražena površina našeg šestougla je:

$$P = 6 \cdot \frac{a\rho}{2}$$

$$P = 3a\rho$$

Dakle,vidimo da općenito formulu za površinu pravilnog mnogougla sa n strana glasi:

$$P = n \cdot \frac{a\rho}{2}, n \in \{3, 4, 5, ...\}$$

Domaći zadatak:

1. Koliki je obim pravilnog devetougla čija je stranica $a = 3,75cm$?
2. Obim pravilnog šestougla je 42 cm.Kolika mu je stranica?
3. Koliki je obim pravilnog šestougla ako mu je poluprečnik opisane kružnice 4cm?
4. Oko kružnice poluprečnika 3 cm opisan je kvadrat.Koliki mu je obim?Nacrtati sliku!
5. Odrediti površinu pravilnog trougla ako mu je:
   (a) stranica 5 cm
   (b) poluprečnik upisane kružnice 5 cm.Nacrtaj te trouglove!
6. Kolika je stranica pravilnog šestougla ako mu je površina $36cm^2$?

18.5 OBIM KRUGA

$$O = 2 \cdot r \cdot \pi, \pi \approx 3,14; r - polupre cnik \quad kruga$$

1. Izračunati obim kruga ako mu je poluprečnik $r = 4cm$.

$$\left.\begin{array}{r} r = 4cm \\ O = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ O = 2 \cdot 4\pi \\ O \approx 8 \cdot 3,14 \\ \underline{O \approx 25,12cm} \end{array}$$

2. Ako je obim kruga 20 cm,koliki mu je poluprečnik?

$$\left.\begin{array}{r} O = 20cm \\ r = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ 20 = 2 \cdot r\pi | : 2 \\ r\pi = 10 \\ r = 10 : \pi \\ r \approx 10 : 3,14 \\ \underline{r \approx 3,18cm} \end{array}$$

3. Točak bicikla se obrne 10 puta na putu dugom 18m.Koliki je poluprečnik točka?
   Za jedan okret točak pređe:

$$\frac{18}{10} = 1,8m$$

   što ujedno prestavlja i obim kruga.

$$\left.\begin{array}{r} O = 1,8m \\ r = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} O = 2 \cdot r \cdot \pi \\ 1,8 = 2 \cdot r\pi | : 2 \\ r\pi = 0,9 \\ r = 0,9 : \pi \\ r \approx 0,9 : 3,14 \\ r \approx 0,29m \\ \underline{r \approx 29cm} \end{array}$$

Domaći zadatak:

1. Izračunaj obim kruga ako mu je poluprečnik:
   (a) 4cm
   (b) 10m
   (c) 4m 1cm
   (d) 3,7cm
2. Izračunaj obim kruga ako mu je poluprečnik:
   (a) $\frac{7}{3}cm$
   (b) $1\frac{1}{4}$
   (c) 0,27dm
3. Koliki je poluprečnik kruga ako je obim:
   (a) $1\frac{3}{2}km$
   (b) 1cm 3mm
   (c) 3,14cm
   (d) 3m
4. Poluprečnik točka bicikla je 32 cm.
   (a) Koliko se puta okrene na putu dužine 1000m?
   (b) Koliki put pređe bicikl ako se točak okrene 3000 puta?
5. Mala kazaljka sata je duga 2 cm,a velika 3cm.
   (a) Koliki put pređe vrh velike kazaljke za 1 sat
   (b) Koliki put pređe vrh male kazaljke za 1 dan
   (c) Koliki put pređe vrh velike kazaljke za 1 dan
6. Tri kruga imaju poluprečnike $r_1 = 5cm$,$r_2 = 6cm$ i $r_3 = 7cm$.Odrediti poluprečnik kruga čiji je obim isti kao zajednički obim sva tri kruga.
7. Obimi dva koncentrična kruga su 20cm i 40cm.Kolika je širina kružnog prstena koji oni grade?

18.6 DUŽINA KRUŽNOG LUKA

Centralnom uglu od 1° odgovara 360-ti dio kružnice,tj.luk:

$$l = \frac{2r\pi}{360}$$

Centralnom uglu od 2° odgovara dvostruko veći dio kružnice,tj.luk:

$$l = \frac{2r\pi}{360} \cdot 2$$

pa je
Uglu α čija je vrijednost izražena u stepenima odgovara kružni luk čija je dužina:

$$l = \frac{2r\pi}{360} \cdot \alpha$$
$$l = \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha$$

1. Nacrtaj kružnicu poluprečnika 3cm i kružni luk koji odgovara uglu od 60°.Kolika je dužina kružnog luka?

$$\left.\begin{aligned} r &= 3cm \\ \alpha &= 60^\circ \\ l &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} l &= \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha \\ l &= \frac{3 \cdot \pi}{180} \cdot 60 \\ l &= \pi \\ &\underline{l \approx 3,14cm} \end{aligned}$$

2. Izračunaj dužinu kružnog luka čiji je poluprečnik $r = 20cm$ i $\alpha = 15^\circ 20'$.

$$\alpha = 15^\circ 20' = 15 \cdot 60' + 20' = 920'$$

$$\left.\begin{aligned} r &= 20cm \\ \alpha &= 920' \\ l &= ? \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} l &= \frac{r\pi}{180} \cdot \alpha \\ l &= \frac{20 \cdot \pi}{180 \cdot 60'} \cdot 920' \\ l &= \frac{\pi \cdot 46}{27} \\ &\underline{l \approx 5,35cm} \end{aligned}$$

3. Koliki je centralni ugao kruga poluprečnika $r = 6cm$,kome odgovara luk dužine $l = 9,42cm$.

$$\left.\begin{array}{r} r = 6cm \\ l = 9,42cm \\ \alpha = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} l = \dfrac{r\pi}{180} \cdot \alpha \\ 9,42 = \dfrac{6 \cdot \pi}{180^\circ} \cdot \alpha \\ \alpha = 9,42 : \dfrac{6\pi}{180} \\ \alpha = 9,42 \cdot \dfrac{180}{6\pi} \\ \underline{\alpha = 90^\circ} \end{array}$$

<u>Domaći zadatak:</u>

1. Dat je krug poluprečnika $r = 50mm$.Odrediti dužinu kružnog luka koji odgovara uglovima:
   (a) 15°
   (b) 45°
   (c) 60°
   (d) 120°
   (e) $27^\circ 30'$
   (f) $45'$
   (g) $1''$
   (h) $13^\circ 1520''$
   (i) $27^\circ 27' 33''$
2. Krugu čiji je centralni ugao 120° odgovara luk dužine 62,8 cm.Koliki je poluprečnik kruga?
3. Ako je poluprečnik $r = 20cm$ i dužina luka $l = 47,1cm$,nađi vrijednost centralnog ugla

18.7 POVRŠINA KRUGA

$$P = r^2\pi$$

1. Izračunati površinu kruga ako je poluprečnik $r = 3cm$.

$$\left.\begin{array}{r} r = 3cm \\ P = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P = r^2\pi \\ P = 3^2\pi \\ P = 9 \cdot \pi \\ P \approx 9 \cdot 3,14 \\ \underline{P \approx 28,26cm^2} \end{array}$$

2. Koliki je poluprečnik kruga ako mu je površina $314cm^2$?

$$\left.\begin{array}{r} P = 314cm^2 \\ r = ? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P = r^2\pi \\ 314 = r^2\pi \\ r^2 = \dfrac{314}{\pi} \\ r^2 = \dfrac{314}{3,14} \\ r^2 = \dfrac{31400}{314} \\ r^2 = 100 \\ r = \sqrt{100} \\ \underline{r = 10cm} \end{array}$$

<u>Domaći zadatak:</u>

1. Izračunati površinu kruga čiji je poluprečnik:
   (a) 20 cm
   (b) 1m 20 cm
   (c) 3,6 cm
   (d) 0,2 m
2. Koliki je poluprečnik kruga ako mu je površina:
   (a) $12,56cm^2$
   (b) $3,14m^2$
   (c) $50,24dm^2$
   (d) $0,0314cm^2$
3. Kolika je površina kruga ako mu je obim:
   (a) 18,84 cm
   (b) 0,628 m
   (c) 31,4dm
   (d) 43,96 cm
4. U kvadrat površine $16cm^2$ upisan je krug.Kolika mu je površina i obim?Nacrtaj sliku!
5. Kvadrat stranice 4 cm i krug imaju isti obim.Ko ima veću površinu?

18.8 POVRŠINA KRUŽNOG ISJEČKA I KRUŽNOG PRSTENA

Površina kružnog isječka (slika1)

$$P = \frac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha$$

Površina kružnog prstena(slika2)

$$P = r_2^2\pi - r_1^2\pi$$

$$P = (r_2^2 - r_1^2)\pi$$

1. Dat je poluprečnik $r = 3cm$ i $\alpha = 120^\circ$ kružnog isječka.Nacrtaj ga i nađi mu površinu.Kolika je dužina odgovarajućeg kružnog luka?

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = 120^\circ \\ r = 3cm \\ P =? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P = \dfrac{r^2\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \\ P = \dfrac{3^2\pi}{360^\circ} \cdot 120^\circ \\ P \approx \dfrac{9 \cdot 3,14}{3} \\ \underline{P \approx 9,42cm^2} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} \alpha = 120^\circ \\ r = 3cm \\ l =? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} l = \dfrac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha \\ l = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot \pi}{360^\circ} \cdot 120^\circ \\ l = 2\pi \\ \underline{l \approx 6,28cm} \end{array}$$

2. Dat je kružni prsten sa $r_1 = 3,5cm$ i $r_2 = 4,5cm$.Odrediti mu površinu i nacrtaj sliku.

$$\left.\begin{array}{r} r_2 = 4,5 \\ r_1 = 3,5cm \\ P =? \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} P = (r_2^2 - r_1^2)\pi \\ P = (4,5^2 - 3,5^2)\pi \\ P = (20,25 - 12,25)\pi \\ P \approx 8 \cdot 3,14 \\ \underline{P \approx 25,12cm^2} \end{array}$$

<u>Domaći zadatak:</u>

1. Kolika je površina kružnog isječka ako je dat poluprečnik kruga r i centralni ugao α:

   (a) $r = 5cm, \alpha = 60°$

   (b) $r = 12cm, \alpha = 75°$

   (c) $r = 3,6cm, \alpha = 7,5°$

   (d) $r = 14cm, \alpha = 22°40'$

2. Koliki je poluprečnik kružnog isječka ako mu je površina $18,84cm^2$ i centralni ugao $\alpha = 60°$?

3. Koliki je centralni ugao kružnog isječka ako je poluprečnik $r = 10cm$ i površina $P = 62,8cm^2$?

4. Kolika je površina kružnog isječka koji odgovara luku dužine 47,1 cm u krugu poluprečnika 50 cm?

5. Poluprečnici dvaju koncentričnih krugova su $r_1 = 5cm$ i $r_2 = 7cm$.Kolika je površina kružnog prstena?

6. Širina kružnog prstena je $d = 5cm$.Ako je obim većeg kruga 43,96 cm,kolika je površina prstena?

7. Obimi dva koncentrična kruga su 31,4 cm i 62,8 cm.Kolika je površina kružnog prstena?Kolika je širina kružnog prstena?

19 ZADACI ZA NADARENE UČENIKE

1. Riješiti kvadratnu jednačinu:

   (a) $(x-1)^2 = 4$

   (b) $(x-25)^2 = 9$

   (c) $x^2 - 6x + 9 = 0$

   (d) $x^2 - 8x + 16 = 0$

   (e) $x^2 - 5x + 6 = 0$

   (f) $x^2 - 8x + 15 = 0$

   (g) $y^2 - 15y + 50 = 0$

   (h) $x^2 + x - 30 = 0$

   (i) $x^2 - x - 6 = 0$

   (j) $y^2 - 13y + 30 = 0$

   (k) $z^2 + z - 6 = 0$

   (l) $x^2 + 2x - 15 = 0$

2. Ako brojevi a i b zadovoljavaju relaciju $a + b = 1$,onda izraz:

   $$2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$$

   ne zavisi od a i b.Dokazati!

3. Dokazati da je :

   (a) $\frac{(a+b)^2}{2} - \frac{(a-b)^2}{2} = 2ab$

   (b) $(\frac{1+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2 = ab$

4. Obavi naznačene operacije:

   (a)

$$(-1)^{1992} + (-1)^{1993} - (-1)^{1994} + (-1)^{1995} - (-1)^{1996} + (-1)^{1997} =$$

   (b)

$$2(-1)^{1992} - 2^2(-1)^{1993} - 2^3(-1)^{1994} + 2^4(-1)^{1995} - 2^5(-1)^{1996} + 2^6(-1)^{1997} =$$

5. Dokazati da je $888889^2 = 111112^2 = 777777777$

6. Ako su m i n zadani prirodni brojevi,onda za brojeve $a = m \cdot n$,$b = \frac{m^2 - n^2}{2}$ i $c = \frac{m^2 + n^2}{2}$ vrijedi relacija $a^2 + b^2 = c^2$.Dokazati!

7. Odredi sve cijele brojeve x za koje je izraz

$$\frac{x+9}{x+6}$$

   takođe,cio broj.

8. Odredi cio broj m tako da jednačina

$$3x - mx - 6 = 0$$

   ima rješenje u skupu $\mathbb{N}$.