

PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

7. RAZRED

TEMA 1. – PITAGORINA TEOREMA

1. Dokazati direktnu Pitagorinu teoremu (ako je trougao sa stranicama $a \leq b < c$ pravougli, onda je $a^2 + b^2 = c^2$) koristeći kao model površinu pravougaonika čija je stranica jednaka $a + b$.
2. Neka su a, b i c ($a \leq b < c$)merni brojevi stranica trougla. Ako je trougao oštrogli, onda je $a^2 + b^2 > c^2$; ako je trougao tupougli, onda je $a^2 + b^2 < c^2$. Važe li obrnuta tvrđenja?
3. Dokazati obrnutu Pitagorinu teoremu: Ako su a, b i c stranice trougla i ako je $a^2 + b^2 = c^2$, onda je trougao pravougli.
4. Proverite da li je trougao sa stranicama 29k, 20k i 21k pravougli.
5. Kakav je trougao (oštrougli, pravougli, tupougli) čije su stranice: a) 5, 6 i 7 cm; b) 10, 11 i 15 cm?
6. Neka je c merni broj hipotenuze i d merni broj zbira kateta a i b pravouglog trougla. Izraziti površinu ovog trougla u funkciji od c i d .
7. U kvadratu ABCD tačka M je središte stranice AB, a N je tačka stranice AD, takve da je $AN = 2 \times ND$. Odrediti površinu i obim kvadrata ABCD ako je $MN = 1$ cm.
8. Stranica AB pravougaonika ABCD je 20 cm, a normalno rastojanje temena B od dijagonale AC je 12 cm. Naći obim i površinu pravougaonika.
9. Dat je pravougli trougao čije katete su 16 cm i 30 cm. Nad hipotenuzom tog trougla kao stranicom konstruisan je kvadrat. Izračunati odstojanje centra tog kvadrata od temena pravog ugla u pravougлом trouglu.
10. Neka je M proizvoljna tačka na hipotenuzi pravouglog trougla, a M' i M'' njene projekcije na katete trougla. Odrediti položaj tačke M za koji duž M'M'' ima najmanju moguću vrednost.
11. Izračunaj površinu pravouglog trougla čija je hipotenuza 12 cm, a jedan oštar ugao je: a) 15° ; b) $22^\circ 30'$.
12. Ako je u pravougлом trouglu jedan ugao 15° onda je hipotenuzina visina četiri puta manja od hipotenuze. Dokazati.
13. Tačka u kojoj kružnica upisana u pravougli trougao dodiruje hipotenuzu, deli hipotenuzu na dve duži čije su dužine 4 cm i 7 cm. Izračunati površinu tog pravouglog trougla.
14. Nad stranicama jednakokrakog pravouglog trougla katete a sa spoljnje strane su konstruisani kvadrati. Izračunati površinu trougla koga čine centri konstruisanih kvadrata.
15. Snažna oluja polomi stablo visoko 16 m i pri tom vrh drveta padne 8 m daleko od podnožja stabla. Na kojoj visini se polomilo stablo.
16. Posmatrač vidi objekat (duž) AB iz dve tačke C i D među kojima je rastojanje 300 m pod uglovima od 30° . Prave AD i BC su međusobno normalne. Kolika je dužina objekta AB.
17. Normale konstruisane iz temena B i D pravougaonika na dijagonalu AC, dele dijagonalu na tri jednaka dela. Ako je dužina jedne stranice pravougaonika $\sqrt{2}$, kolika je dužina druge stranice pravougaonika?
18. Vrt ima oblik pravougaonika sa temenima A,B,C,D. U vrtu je česma koja je od temena A udaljena 14 cm, a od temena B udaljena 4 cm i od temena C udaljena 12 cm. Koliko je česma udaljena od temena D?
19. Oko jednakokrakog trougla, čija je osnovica 48 cm, a krak 40 cm, opisan je krug. Odrediti poluprečnik tog kruga.

KONKURSNI ZADACI

1. Ako su a, b katete, a c hipotenuza pravouglog trougla, onda je $a^3 + b^3 < c^3$. Dokazati.
2. Normala konstruisana iz vrha B paralelograma ABCD na dijagonalu AC deli tu dijagonalu na dva dela dužine 15 cm i 6 cm. Odrediti pojedinačnu dužinu stranica paralelograma ako je razlika susednih stranica 7 cm.
3. Unutrašnji uglovi trougla odnose se kao $2 : 3 : 7$. Dužina najveće stranice trougla je 1 m. Odrediti dužine ostalih stranica trougla.

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

7. RAZRED

TEMA 2. – PITAGORINA TEOREMA – KONSTRUKTIVNI ZADACI

1. Date su duži a , b i c . Konstruisati duži: a) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; b) $y = \sqrt{a^2 + b^2}$;
c) $y = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
2. Konstruisati kvadrat čija površina jednaka zbiru (razlici) površina dva data kvadrata.
3. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka zbiru površine tri data kvadrata.
4. Konstruisati jednakostranični trougao čija je površina jednaka razlici površina dva data jednakostranična trougla.
5. Hipotenuzina visina deli hipotenuzu na dva odsečka čije su dužine p i q . Dokazati da je dužina hipotenuzine visine jednaka \sqrt{pq} .
6. Dat je pravougaonik čije su stranice a i b . Konstruisati kvadrat koji ima površinu jednaku površini datog pravougaonika.
7. Konstruiši kvadrat čija je površina jednaka površini jednakostraničnog trougla stranice a .
8. Konstruiši jednakostranični trougao čija je površina jednaka površini kvadrata date stranice a .
9. Konstruisati jednakokrako-pravougli trougao čija je površina jednake zbiru površinama dva data:
a) jednakokrako- pravougla trougla ; b) kvadrata ; c) jednakostranična trougla.
10. Nad stranicama jednakostraničnog trougla stranice a konstruisani su sa spoljnje strane kvadrati i dobijena slobodna temena povezana u mnogougao. Izračunati obim i površinu tako dobijenog mnogougla.
11. Nad stranicama pravilnog šestougla stranice a konstruisani su sa spoljnje strane kvadrati i dobijena slobodna temena povezana u mnogougao. Izračunati obim i površinu tako dobijenog mnogougla.
12. Nad stranicama pravouglog trougla čije su katete a i b konstruisani su sa spoljnje strane:
a) jednakostranični trouglovi ; b) pravilni šestouglovi ; c) pravougaonici čije se stranice odnose kao 2:1. Dokazati da je površina figure nad hipotenuzom jednaka zbiru površina figura nad katetama.

KONKURSNI ZADACI

1. Ako su m , n i r merni brojevi dužina triju datih duži , konstruisati jednakokrako-pravougli trougao kome je hipotenuza duž $x = \sqrt{m^2 + n^2 - r^2}$.
2. Dat je pravougaonik čije su stranice a i b . Konstruiši jednakostranični trougao čija je površina jednaka površini datog pravougaonika.
3. Nad stranicama pravouglog trougla čije su katete a i b konstruisani su sa spoljnje strane kvadrati i dobijena slobodna temena povezana u šestougao. Izračunati površinu tako dobijenog šestougla u funkciji od a i b ?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

7. RAZRED

TEMA 3. – IZRAČUNAVANJE POVRŠINE RAVNIH FIGURA

1. Postoji li trougao čije su sve stranice veće od 1000 cm, a čija je površina manja od 1 cm^2 ?
2. Sve visine trougla su veće od 2 cm. Može li površina tog trougla biti: a) manja od 1 cm^2 ; b) manja od 2 cm^2 ?
3. Trougao ABC čija je osnovica $AB=20 \text{ cm}$ i visina $CC'=16 \text{ cm}$, presečen je trima pravama p, q i r paralelnim sa AB koje visinu CC' dele na četiri jednaka dela. Odrediti koliko na tako dobijenoj figuri ima trouglova, a koliko trapeza i izračunati površinu tih figura. Kako se menja rezultat ako se visina pravama paralelnim sa AB podeli na 8 jednakih delova?
4. U jednakokrako-pravougli trougao čija je hipotenuza 8 cm upisan je kvadrat koji sa trouglom ima jedna zajednički ugao. Odrediti površinu tog kvadrata.
5. Dat je krug poluprečnika r . U krug je upisan i oko njega opisan kvadrat. Odrediti odnos površina tih kvadrata.
6. Dokazati da je površina pravilnog osmougla jednaka proizvodu njegove najmanje i najveće dijagonale.
7. Površina trapeza ABCD jednaka je proizvodu dužine kraka AD i duži EF koja predstavlja normalu konstruisanu iz središta E kraka BC na krak AD . Dokazati.
8. Dat je kvadrat ABCD čija je stranica 4 cm. Tačke M i N su središta stranica AB i BC . Izračunati površinu trougla MND .
9. U jednakokrakom trouglu ABC, $AB=AC=10 \text{ cm}$ i ugao BAC jednak je 30° . Kolika je površina datog trougla?
10. Hipotenuza pravouglog trougla je 12 cm, a jedan od oštih uglova je 75° . Izračunaj površinu tog trougla.
11. Kolika je površina romba čija je stranica $a=16 \text{ cm}$, a jedan ugao jednak 150° ?
12. Poluprečnik kruga opisanog oko pravilnog dvanaestougla je R . Kolika je površina dvanaestougla?
13. Dat je jednakokraki trapez ABCD čije su osnovice $AB=10 \text{ cm}$ i $CD=6 \text{ cm}$ i čije su dijagonale AC i BD normalne. Izračunati površinu datog trapeza.
14. U jednakokrakim trouglovima ABC i BCD ugao $\angle BAC = 2\angle BDC$. Dokazati da je $P(ABC) < 2P(BCD)$.
15. U datom trouglu ABC, tačka D je središte stranice BC . Tačka E deli duž AD u razmeri 3:1. Prava BE seče stranicu BC u tački F . Odrediti odnos površina trouglova ABF i BCF .
16. Duž AC dužine a je svojom unutrašnjom tačkom B podeljena u odnosu 3 : 2. Nad dužima AB i BC sa raznih strana u odnosu na AC konstruisani su kvadrati $ABDE$ i $BCFG$. Neka su M i N preseki dijagonala dobijenih kvadrata. Izračunati površinu četvorougla $MNCD$ u funkciji od date duži a .
17. Dijagonale konveksnog četvorougla ABCD seku se u tački O . Dokazati da je proizvod površina trouglova AOB i COD jednak proizvodu površina trouglova BOC i DOA .

18. Tačke M, N i R dele stranice AB, BC i CA trougla ABC u odnosu: a) 1:1 ; b) 2:1 ; c) m:n. Ako je površina trougla ABC jednaka P kolika je površina trougla MNR?
19. Dat je konveksan četvorougao ABCD površine P. Neka su K, L, M i N redom središta stranica AB, BC, CD i DA četvorougla. Dokazati da je KLMN paralelogram i izračunati njegovu površinu.
20. Dat je paralelogram ABCD površine 10 cm^2 . Neka su K, L, M i N redom proizvoljne tačke na stranicama AB, BC, CD i DA tog paralelograma. Dokazati da ako je površina četvorougla KLMN jednaka 5 cm^2 , onda je jedna od dijagonala četvorougla paralelna jednoj od stranica paralelograma.
21. Dat je četvorougao ABCD čija je površina P. Na stranicama AB i CD date su tačke K, L, M i N tako da je $AK = KL = LB$ i $CM = MN = ND$. Izračunati površinu četvorougla KLMN. Šta bi bilo ako bi se stranice AB i CD podelile na 5, 7, ..., $2n+1$ jednakih delova?
22. Stranice AB, BC i CA trougla ABC, produžene su preko temena B, C, A za svoju dužinu, tako da je $AB = BA'$, $BC = CB'$ i $CA = AC'$. Ako je površina trougla ABC jednaka P kolika je površina trougla A'B'C'?
23. Dat je paralelogram ABCD površine 10 cm^2 . Neka su M, N, P i Q tačke pravih AB, BC, CD i DA takve da su tačke B, C, D i A središta duži AM, BN, CP i DQ. Dokazati da je četvorougao MNPQ paralelogram i izračunati njegovu površinu.
24. Dat je konveksan četvorougao ABCD površine 1996 cm^2 . Neka su M, N, P i Q tačke pravih AB, BC, CD i DA takve da su tačke B, C, D i A središta duži AM, BN, CP i DQ. Izračunati površinu četvorougla MNPQ.
25. Dat je kvadrat ABCD čija je površina 100 cm^2 . Neka su M, N, P i Q redom središta stranica AB, BC, CD i DA. Presekom duži AP, BQ, CM i DN definisan je jedan četvorougao. Dokazati da je dobijeni četvorougao kvadrat i izračunati njegovu površinu. Šta se dešava ako je $AM:MB = BN:NC = CP:PD = DQ:QA = m:n$? Da li se sličan problem može definisati i ako je četvorougao ABCD paralelogram?
26. Dat je kvadrat ABCD čija je površina 81 cm^2 . Neka su K i L, M i N, P i Q, R i S tačke koje stranice AB, BC, CD i DA dele na tri jednaka dela. Presekom duži KN, LR, MQ i PS definisan je jedan četvorougao. Dokazati da je dobijeni četvorougao kvadrat i izračunati njegovu površinu.

KONKURSNI ZADACI

1. Dužine svih stranica jednog trougla su manje od 1 cm, a dužina svake stranice drugog trougla je veća od 100 cm. Može li prvi trougao imati površinu veću od površine drugog trougla?
2. Svaka stranica pravilnog šestougla ABCDEF produžena je za svoju dužinu tako da je $AB = BA'$, $BC = CB'$, $CD = DC'$, $DE = ED'$, $EF = FE'$, $FA = AF'$. Ako je površina šestougla ABCDEF jednaka P, odrediti površinu šestougla A'B'C'D'E'F'.
3. Tačke M, N i R dele stranice AB, BC i CA jednakostraničnog trougla ABC u odnosu 3:4. Prave AN, BP i CM seku se u grade trougao QRS. Ako je površina trougla ABC jednaka 1998 cm^2 , kolika je površina trougla QRS ?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

7. RAZRED

TEMA 4. – HERONOV OBRAZAC I PRIMENA

1. Izračunati površinu trougla čije su stranice 13, 14 i 15 cm.
2. Izračunati stranice trougla ako je $a : b : c = 13 : 20 : 21$ i $P = 504 \text{ cm}^2$.
3. Odrediti visine trouglova čije su stranice 17 cm, 25 cm i 28 cm.
4. Ako su stranice trougla a , b i c i ako je s poluobim trougla, tj. $a + b + c = 2s$, onda je površina tog trougla P definisana Heronovom formulom [
5. Odrediti površinu četvorougla ABCD ako je $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 11 \text{ cm}$, $CD = 13 \text{ cm}$, $AD = 16 \text{ cm}$, i dijagonala $BD = 20 \text{ cm}$.
6. Izračunati površinu svih tupouglih trouglova čije su stranice izražene uzastopnim prirodnim brojevima.
7. Dokazati da je $P = r \times s$, gde je P površina trougla, r poluprečnik kruga upisanog u trougao, a s je poluobim tog trougla.
8. Izračunati poluprečnik upisanog kruga u trougao čije su stranice 15 cm, 41 cm i 52 cm.
9. Izračunati površinu deltoida ABCD ako je dato: $AB = 17 \text{ cm}$, $AC = 30 \text{ cm}$, $AD = 25 \text{ cm}$.
10. Ako su kraci trapeza međusobno normalni, dokazati da je zbir kvadrata osnovica jednak zbiru kvadrata dijagonala.
11. Dokazati da je zbir kvadrata dijagonala paralelograma jednak dvostrukom zbiru kvadrata osnovica paralelograma.
12. Dat je pravougaonik ABCD i tačka M u ravni pravougaonika. Dokazati da za svaku tačku M važi jednakost: $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.
13. Ako je trougao pravougli onda je zbir kateta dva puta veći od zbira poluprečnika opisanog i poluprečnika upisanog kruga u taj pravougli trougao. Dokazati.
14. Dužine stranica trougla su uzastopni prirodni brojevi ne manji od 3. Dokazati da visina koja odgovara srednjoj stranici trougla deli tu stranicu na delove koji se razlikuju za 4.
15. U pravouglom trapezu ABCD (prav ugao je kod temena B) $AB = 12 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ i $CD = 8 \text{ cm}$. Da li simetrala ugla a seče krak BC ili njegov produžetak ?

KONKURSNI ZADACI

1. Unutrašnji uglovi trapeza odnose se kao $2 : 1 : 5 : 4$. Izračunati obim i površinu trapeza ako su manji krak i manja osnovica po 10 cm.
2. U kvadratu ABCD tačka E je središte stranice CD, a F je podnožje normale iz B na AE. Dokazati da stranice trougla BEF zadovoljavaju odnos $BE : BF : EF = 5 : 4 : 3$.
3. Dva pravolinijska puta p_1 i p_2 ukrštaju se pod uglom od 75° . Mesto M je od jednog puta p_1 udaljeno 6 km, a od raskršća R 12 km. Koliko je mesto M udaljeno od drugog puta p_2 ?

ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

7. RAZRED

TEMA 5. – IRACIONALNI BROJEVI

1. Dokazati da su brojevi: 0,123 ; 1,444... ; 2,343434... racionalni brojevi.
2. Dokazati da su $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{2}$ iracionalni brojevi .
3. Konstruisati duži $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{15}$.
4. Odrediti na brojnoj pravoj tačke $1 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{3}$.
5. Ako je N skup prirodnih, Q skup celih, R skup racionalnih, I skup iracionalnih, a R skup realnih brojeva koja od jednakosti je tačna:
 $Q \cup I = R$; $Q \cap I = \emptyset$; $R \setminus Q = I$; $Q \cup I \cup Z \cup N = R$; $I \cup N = R$; $N \setminus I = Z$.
6. Dokazati da je skup racionalnih brojeva zatvoren u odnosu na operacije : sabiranja, oduzimanja, množenja i deljenja, tj da se sabiranjem, oduzimanjem, množenjem i deljenjem dva racionalna broja opet dobija racionalan broj.
7. Da li je skup iracionalnih brojeva zatvoren u odnosu na sabiranje, oduzimanje, množenje i deljenje ?
8. Dati su racionalan broj $a = 5$ i iracionalan broj $x = \sqrt{2}$. Dokazati da su brojevi:
 $5 + \sqrt{2}$, $5 - \sqrt{2}$, $\sqrt{2} - 5$, $5\sqrt{2}$, $5/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}/5$ iracionalni ?
9. Ako je a racionalan i x iracionalan broj onda su brojevi $a+x$, $a-x$, $x-a$, ax ($a \neq 0$), $a:x$ ($a \neq 0$), $x:a$ ($a \neq 0$), \sqrt{x} iracionalni. Dokazati ?
10. Dokazati da je $(1 - \sqrt{3})^2$ iracionalan broj .
11. Dokazati da je broj $(7 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 7)$ racionalan broj .
12. Neka su x i y racionalni brojevi. Ako je $x + y\sqrt{2} = 0$ onda i samo onda važi jednakost
 $x = y = 0$.
13. Uporediti: $\sqrt{2000} - \sqrt{1999}$ i $\sqrt{2001} - \sqrt{2000}$.
14. Izračunaj: $\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$.
15. Ako su x i y iracionalni brojevi da li je x^y racionalan ili iracionalan broj ?
16. Dokazati da postoje iracionalni brojevi x i y takvi da je x^y racionalan broj.
17. Dokazati da je 1, 234234234... racionalan, $\sqrt{5}$ iracionalan.
18. Da li je $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ racionalan broj?
19. Dokazati da je $(\sqrt{2} - 1) / (\sqrt{2} + 1)$ iracionalan broj.

KONKURSNI ZADACI

1. Dokazati da je 0,121212... racionalan, a $\sqrt{7}$ iracionalan broj.
2. Neka su a, x i y racionalni brojevi. Ako je $a + x\sqrt{2} + y\sqrt{3} = 0$ onda je $a=x=y=0$.
Dokazati.
3. Ako su \sqrt{x} , \sqrt{y} i $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ racionalni brojevi onda su i x i y takođe racionalni brojevi. Dokazati.

ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

7. RAZRED

TEMA 6. – KOMBINATORIKA

1. Iz mesta A u mesto B vodi 3 puta, iz mesta B u mesto C 4 puta, a iz mesta S u mesto D 5 puteva. Na koliko se načina može doći:
 - a) iz mesta A u mesto C idući preko mesta B ?
 - b) iz mesta A u mesto D idući preko mesta B i C ?
2. Koliko ima trocifrenih brojeva čija je prva cifra: a) neparna b) parna. Koliko je među tim brojevima onih sa različitim ciframa?
3. Koliko se od slova a, b, c može formirati reči dužine 1, 2, 3 ako se slova u jednoj reči: a) mogu ponavljati b) ne mogu ponavljati. Uopštiti za slučaj n slova od kojih se formiraju reči dužine k.
4. Koliko se različitih prirodnih brojeva može napisati pomoću cifara 0, 1 i 2 ako se svaka cifra može ponoviti najviše dva puta ?
5. Koliko petocifrenih brojeva sa različitim ciframa se može formirati ako su prve dve cifre parne, a poslednje tri neparne?
6. Koliko kolona na tiketu sportske prognoze se mora popuniti da bi se obuhvatile sve kombinacije, ako predviđamo tri fiksna znaka, dva dvoznaka i ostale troznake?
7. Po rasporedu, danas su predviđeni sledeći časovi: matematika, istorija biologija, fizika i hemija. Na koliko se različitih načina može napraviti raspored?
8. Koliko dijagonala ima dvadesetougao ?
9. Koliko šestocifrenih brojeva napisanih ciframa 1, 2, 3, 4, 5, 6 (bez ponavljanja) počinje sa tri parne cifre?
10. Na polici se nalaze tri crvene, četiri žute i pet plavih knjiga. Na koliko načina se knjige mogu razmestiti tako da sve knjige iste boje stoje jedna do druge?
11. U ravni je dato pet tačaka. Koliko date tačke određuju različitih: a) duži, b) trouglova. Uopštiti rezultat za n tačaka i mnogougao od k temena.
12. Koliko različitih delilaca ima broj 210?
13. Na startu trke je 8 trkača. Na koliko se načina mogu: a) podeliti tri medalje b) odabrati trojica za finalnu trku?
14. Trideset učenika jednog odeljenja treba da izabere odeljensku zajednicu, i to: predsednika, blagajnika, sekretara i dva člana. Koliko ima različitih izbora?
15. U vrsti su 4 dečaka i 4 devojčice, ali tako da se između svaka dva dečaka nalazi devojčica. Koliko različitih rasporeda ima?
16. Koliko ima četvorocifrenih brojeva formiranih od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5 kod kojih su cifre 1 i 2 jedna do druge?
17. Na jednom skupu svi prisutni su se međusobno rukovali. Koliko je bilo prisutnih ako je bilo 66 rukovanja?

KONKURSNI ZADACI

1. U kutiji se nalaze 4 bele i 5 crvenih kuglica. Na koliko načina se može izvući jedna bela i dve crvene kuglice ?
2. Koliko ima četvorocifrenih brojeva: a) sa različitim ciframa; b) ukupno ; formiranih od cifara 0, 1, 3, 5, 7 koji su deljivi sa 5 ?
3. Krokodil može imati najviše 68 zuba. Pokazati da među 16^{17} krokodila postoje dva sa istim rasporedom zuba.

ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

7. RAZRED

TEMA 7. – STEPENI

1. Izračunati: a) $54 \cdot 3^{n-6} + 15 \cdot 3^{n-4} - 2^{n+1} \cdot 3^{n+1} : (2^n \cdot 3^3)$.
2. Izračunati: $a \cdot a^2 \cdot a^3 \dots \cdot a^{1995}$.
3. Dokazati da je $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ deljivo sa 155 za svaki prirodan broj n.
4. Šta je veće: a) 3^{303} ili 2^{454} ; b) 2^{3000} ili 3^{2000} ; c) 2^{1988} ili 130^{284} .
5. Odrediti prirodne brojeve m i n tako da važi jednakost:
$$m^n + m^{n+1} + m^{n+2} + m^{n+3} + m^{n+4} = 1984.$$
6. Dokazati da je $7^{1995} - 3$ deljivo sa 10.
7. Odrediti najmanji prirodan broj n za koji je broj $10^n - 1$ deljiv sa 369.
8. Dokazati da su brojevi: $1^{1994} + 2^{1994} + 3^{1994} + 4^{1994}$ i $1^{1995} + 2^{1995} + 3^{1995} + 4^{1995}$ deljivi sa 10. Da li tvrdjenje važi i za broj $1^{1997} + 2^{1997} + 3^{1997} + 4^{1997}$?
9. Ako je p prost broj tada je $p^{1998} - 1$ složen broj. Dokazati.
10. Posmatrati niz brojeva 6, 6^2 , 6^3 ... i napisati poslednje četiri cifre ovih brojeva: 0006, 0036, 0216, 1296, ... Dokazati da će se posle izvesnog broja stepenovanja niz od četiri poslednje cifre postati periodičan.
11. Postoji li stepen broja 3 koji se završava ciframa 0001?
12. Izračunati: $x^5 \cdot x^7$, $x^{10} \cdot x^{12}$, $x^6 \cdot x^8$ ($x \neq 0$).
13. Dokazati da je $x^0 = 1$.
14. Izračunati: 2^{-3} , 3^{-2} , 10^{-1} , x^{-4} , y^{-n} .
15. Šta je veće: a) $(-1)^{1997}$ ili $(-1997)^1$; b) $(-1)^{(-1997)}$ ili $(-1997)^{(-1)}$.
16. Dat je zbir $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{1996} + 2^{1997}$.
Izračunati: a) $S:2$; b) $S - S:2$ c) S .
17. Koliko je: $1 + 1/3 + 1/9 + \dots + 1/3^{10}$
18. Šta je veće: 333^{444} ili 444^{333} ?
19. Dokazati da je $24^{24} + 24$ deljivo sa 100.
20. Šta je veće: 200^{-300} ili 300^{-200} ?

KONKURSNI ZADACI

1. Šta je veće: a) 202^{303} ili 303^{202} ; b) 31^{-11} ili 17^{-14} ?
2. Ako je p prost broj, tada je $p^{1994} + 1995$ složen broj. Dokazati.
3. Dokazati da je broj $7^{7^7} - 3$ deljiv sa 10.

ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

7. RAZRED

TEMA 8. – ODABRANI ZADACI IZ MATEMATIČKOG LISTA

1. Dokazati da je rešenje jednačine $|x - 1| = 2$ iracionalan broj.
2. U pravougaoniku ABCD stranica $AB = 4$ cm i $BC = 3$ cm. Na stranicama AB, BC i DA date su redom tačke M, N i R, tako da je $AM = BN = DR = 1$ cm. Izračunati površinu trougla MNR.
3. Stranica datog kvadrata je 10 cm. Odrediti površinu osenčene figure.
4. U pravougaoniku ABCD stranica $AB = 4$ cm i $BC = 3$ cm na slučajan način je raspoređeno: a) 5 tačaka; b) 6 tačaka. Dokazati da postoje dve od njih takve da je njihovo rastojanje manje od $\sqrt{5}$ cm.
5. Odrediti najveći trocifren broj koji pri deljenju sa 43 daje ostatak jednak količniku.
6. U unutrašnjosti jednakokrako-pravouglog trougla ABC (sa pravim uglom kod temena C) data je tačka M tako da je $AM = 2$ cm, $\angle AMB = 120^\circ$ i $\angle AMC = 105^\circ$. Izračunati dužinu duži BM.
7. Zbir 12 različitih prirodnih brojeva iznosi 83. Dokazati da je njihov proizvod deljiv sa 420.
8. Odrediti najmanji prirodan broj n takav da je $336n$ kvadrat prirodnog broja.
9. Dokazati da je broj 1,234234234... racionalan broj.
10. Visina pravouglog trougla deli hipotenuzu na delove čije su dužine 16 cm i 9 cm. Odrediti obim i površinu trougla i poluprečnik upisanog kruga u datom trouglu.
11. Postoji li kvadar kod koga su merni brojevi njegovih ivica prirodni brojevi, a da je pri tom merni broj površine prost broj ?
12. Neka je $n = 101 \cdot 102 \cdot 103 \dots 199 \cdot 200$. Dokazati da je n deljivo sa 2^{100} , a nije deljivo sa 2^{101} .
13. Može li zbir četiri uzastopna prirodna broja biti prost broj ?
14. Šta je veće: $\frac{2^{1994} + 1}{2^{1995} + 1}$ ili $\frac{2^{1995} + 1}{2^{1996} + 1}$?
15. Trapez je svojim dijagonalama podeljen na četiri trougla. Dokazati da su površine trouglova koji naležu na krakove trapeza jednake.
16. Da li je moguće dobiti 10 bonova u ukupnoj vrednosti 25 dinara, ako je pojedinačna vrednost bonova 1, 3 i 5 dinara ?
17. Pravougaonik je razbijen na kvadrate stranice 1 cm. U svakom kvadratnom polju upisan je jedan broj. Poznato je da je zbir brojeva u svakom horizontalnom redu jednak 1, a zbir brojeva u svakom vertikalnom redu je 2. Da li može površina pravougaonika biti: a) 1994 cm^2 ; b) 1995 cm^2 ?
18. Apotekar ima šest bočica zapremine 16, 18, 22, 24, 26 i 34 ml. Neke od njih su napunjene destilovanom vodom, a neke alkoholom, a samo jedna je prazna. Ukupna zapremina alkohola je dva puta veća od zapremine vode. Odrediti sadržinu svake od datih bočica.
19. Dat je konveksan četvorougao ABCD. Neka su M, N, P, Q redom središta stranica AB, BC, CD, DA. Dokazati da važi nejednakost:
 $AB + BC + CD + DA \geq 2(MP + NQ)$.
20. Dokazati da jednačina $x^4 + y^4 = 1998$ nema rešenja u skupu celih brojeva.
21. Koliko ima prirodnih brojeva deljivih sa 4 čiji zbir cifara je 10, a proizvod cifara je 16 ?

22. Rešiti jednačinu: |.

23. Ako je u pravougloj trouglu odnos poluprečnika opisanog i upisanog kruga jednak 5 : 2, odrediti odnos stranica tog pravouglog trougla.

KONKURSNI ZADACI

1. U unutrašnjosti jednakokrako-pravouglog trougla ABC (sa pravim uglom kod temena C) data je tačka M tako da je $AM = 2$ cm, $BM = \sqrt{2}$ cm i $CM = 1$ cm.

Izračunati površinu trougla.

2. Dokazati da je zbir $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{1993} + 2^{1994}$ deljiv sa 6 .

3. Dijagonale konveksnog četvorougla dele četvorougao na četiri trougla. Dokazati da su proizvodi površina po dva naspramna trougla međusobno jednaki.

7. RAZRED

TEMA 10. – ZADACI SA OPŠTINSKIH TAKMIČENJA MLADIH MATEMATIČARA

- 1(86).** Za 25 klikera je plaćeno onoliko dinara, koliko klikera se može kupiti za 10000 din. Kolika je cena jednog klikera?
- 2(86).** Na krugu poluprečnika r uočen je luk čija je dužina jednaka polovini poluprečnika kruga. Izračunaj u funkciji od r površinu kružnog isečka koji odgovara luku dužine ($l=r/2$).
- 3(86).** Stranica pravilnog mnogougla je 10 cm. Koliki je njegov obim ako se zna da on ima 252 dijagonale?
- 4(86).** Dužina poluprečnika kruga upisanog u romb jednaka je četvrtini dužine veće dijagonale romba. Dokazati da visine romba koje prolaze kroz krajnje tačke manje dijagonale dele veću dijagonalu na tri jednaka dela.
- 5(86).** Katete pravouglog trougla ABC su $AC=6$ cm i $BC=8$ cm. Krug upisan u trougao dodiruje stranice trougla AB, BC i AC u tačkama M, N i P. a) Dokazati da je $AM=AP$ i $BN=BM$; b) Izračunati poluprečnik kruga upisanog u trougao; c) dokazati da je rastojanje između centra upisanog kruga i centra opisanog kruga jednako $\sqrt{5}$.
- 6(87).** Težište T trougla ABC pripada krugu konstruisanom nad stranicom $AB=8$ cm kao prečnikom, pri čemu je ugao $\angle TAB=30^\circ$. Izračunati površinu tog trougla.
- 7(87).** Stranica trougla je 10 cm, a ugao naspram nje je 150° . Izračunati površinu kruga opisanog oko tog trougla.
- 8(87).** Dokazati da je $\sqrt{5}$ iracionalan broj.
- 9(87).** Ako je p prost broj i $p>2$, onda je broj $p^{1987}+1987^p$ složen. Dokazati.
- 10(87).** U kvadratu stranice 5 cm na proizvoljan način je razmešteno 57 tačaka. Dokazati da se može konstruisati kvadrat površine 1 cm^2 unutar koga se nalaze bar tri date tačke.
- 11(88).** Racionalni broj 0.121212... napisati u obliku razlomka.
- 12(88).** Dati su kvadrati stranica 1, 2 i 3 cm. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka zbiru površina datih kvadrata.
- 13(88).** Izračunati obim i površinu pravouglog trapeza ABCD sa pravim uglom kod temena A, ako je njegova kraća dijagonala $AC=5$ cm, duži krak $BC=6$ cm i ako je oštar ugao trapeza $\angle ABC=30^\circ$.
- 14(88).** Odrediti sve cele brojeve x i y takve da je $xy - 2x = 5y - 7$.
- 15(88).** U magacinu je bilo 1000 kg jagoda koje sadrže 92% vode. Posle izvesnog vremena količina vode se smanjila na 90%. Kolika je težina jagoda sada?
- 16(89).** Moj pradede je rođen u XIX veku. Koje godine je on slavio 60. svoj rođendan ako je x^2 godine imao tačno x godina?
- 17(89).** Šta je veće $2 - \sqrt{3}$ ili $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.
- 18(89).** Odrediti vrednost razlomka $(4^{13}-4^{12}-6 \cdot 4^{10}):(2^{19} + 2^{17} + 2^{15})$.

TEMA 2.

KVADRAT RACIONALNOG BROJA ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Dokazati tvrđenje $(-x)^2 = x^2$.
2. Da li su tačna tvrđenja:
 - a) Ako je $x = y$ onda je $x^2 = y^2$;
 - b) Ako je $x^2 = y^2$, onda je $x = y$?
3. Dokazati da je za svako racionalno x broj $x^2 \geq 0$.
4. Ako je x racionalan broj, šta je veće: x ili x^2 ?
5. Da li su tačna tvrđenja:
 - Ako je $x < y$ onda je $x^2 < y^2$?
 - Ako je $x^2 > y^2$ onda je $x > y$?
6. Uporedi po veličini brojeve: a^2 , $|a^2|$ i $|a|^2$ (a je racionalan broj).
7. Kvadrati prirodnih brojeva završavaju se ciframa 1,4,5,6,9 i 0. Dokazati.
8. Postoje li prirodni brojevi x i y takvi da je:
 - a) $x^2 + 5y = 88888888$;
 - b) $1998x^2 + 5y^2 = 123456789$?
9. Dokazati formule:
 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
10. Koristeći gornje formule izračunaj: 14^2 , 99^2 , 1002^2 .
11. Ako je n paran ceo broj onda je n^2 paran prirodan broj. Važi li obrnuto?
12. Izračunaj koliko je $(10n + 5)^2$ i formuliši odgovarajuće pravilo.
13. Koristeći izvedeno pravilo iz prethodnog zadatka izračunati: 15^2 , 45^2 , 105^2 .
14. Ako je n prirodan broj, da li su moguće jednakosti:
 - a) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-3) + (2n-1) = 9876543$;
 - b) $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 6666666$?
15. Dokazati formulu: $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$.
16. Izračunaj na najracionalniji način: $19 \cdot 21$, $99 \cdot 101$, $34 \cdot 26$.
17. Koliko je:
 - a) $99^2 - 1$;
 - b) $34^2 - 16$;
 - c) $101^2 + 1998$?
18. Kvadrat celog broja pri deljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1. Dokazati
19. Dokazati da jednačina $4x^2 + 5y^2 = 10z + t$ nema rešenja u skupu celih brojeva ako broj t $\alpha\delta\alpha\pi\rho\pi \{2,3,7,8\}$.
20. Dokazati da jednačina $2222x^2 + 5555y^2 = 99999999$ nema rešenja u skupu celih brojeva.
21. Izračunati: $84^2 - 16^2$; $96 \cdot 104$; $(999 - 56)(999 + 56) + 56^2$.
22. Kojom cifrom se završava broj $1^{1996} + 2^{1996} + \dots + 1995^{1996} + 1996^{1996}$? (1996)
23. Dokazati da je broj $7^{1996} - 1$ deljiv sa 10. (1996)
24. Dešifruj kvadriranje: $(5c + 1)^2 = abca$. (1995)
25. U pozorišnoj dvorani sa dva partera (levo i desno) u svakom parteru ima onoliko redova, koliko u redu ima stolica. Ako u svakom redu ima jednak broj stolica i ako u sali ima 578 stolica, koliko ima redova u sali i koliko je stolica u jednom redu? (1994)
26. Odrediti najveći petocifren paran broj čije prve tri cifre obrazuju tačan kvadrat, a poslednje tri cifre obrazuju tačan kub prirodnog broja. (1992)
27. Dokazati da ne postoji prirodan broj n takav da je $n^2 - 8$ deljivo sa 5. (1991)

28. Moj pradede je rođen u XIX veku. Koje godine je on slavio svoj 60. rođendan, ako je x^2 godine imao tačno x godina ? (1989).

KONKURSNI ZADACI

29. Ako je $x > y$, šta je veće: $(x-y)^2$ ili $(x+y)^2$?
30. Dokazati da sledeće jednačine nemaju rešenja u skupu celih brojeva:
a) $x^{2000} + y^{2000} = 888...888$ (2000 osmica);
b) $x^2 + y^2 = 1997$?
31. Zbir dva broja je 20, a razlika njihovih kvadrata je 160. O kojim brojevima je reč ?

TEMA 3.

KOREN RACIONALNOG BROJA

→ 345/96 -13.02.2000

ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Odrediti sve realne brojeve čiji je kvadrat jednak: 25 ; 0,49 ; -16 ; 0,0121 ; $(-4)^2$.
2. Između kojih prirodnih brojeva se nalazi aritmetički kvadratni koren brojeva: 17 ; 66 ; 89 ; 110 ?
3. Odrediti sve prirodne brojeve između 400 i 650 čiji su koreni prirodni brojevi .
4. Izračunati: a) $7\sqrt{49} + 2\sqrt{36} - \sqrt{81}$;
b) $\sqrt{\frac{4}{81}} + 2\sqrt{\frac{9}{25}} - 5\sqrt{\frac{16}{49}}$.
5. Da li su tačna tvrđenja :
a) Ako je $x = y$ onda je i $\sqrt{x} = \sqrt{y}$.
b) $\sqrt{x^2} = x$;
c) Ako je $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ onda je $x = y$;
d) $\sqrt{(x)^2} = |x|$?
6. Ako je a pozitivan racionalan broj da li važi nejednakost: $a > \sqrt[3]{a}$?
7. Proizvod broja $4/7$ i kvadrata nekog broja je $484/567$. Koji je to broj?
8. U jednačini $5x^2 = 3k$ odrediti sve celobrojne vrednosti promenljive x , ako je $k \in \mathbb{N}$ i $k < 100$.
9. Dokazati da za pozitivne brojeve x i y važi nejednakost: $x + y \geq 2\sqrt{xy}$.
10. Izračunati:
a) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{48} + 5\sqrt{125} - 2\sqrt{3}$;
b) $\sqrt{245} - 5\sqrt{80} + 3\sqrt{125})\sqrt{20}$
11. Dokazati da su vrednosti sledećih izraza racionalni brojevi :
a) $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})$;
b) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$;
c) $(\sqrt{17} - 2\sqrt{3})(\sqrt{17} + 2\sqrt{3})$
12. Rešiti jednačine:
a) $x^2 = 2$;
b) $x^2 + 2x + 1 = 5$;
c) $7 - (x^2 - 6x + 9) = 3$.

13. Izračunati:

a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{32+10\sqrt{7}} - \sqrt{32-10\sqrt{7}}$

14. Uprostiti izraze:

a) $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-6x+9}$ (za $0 \leq x \leq 2$);

b) $\sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-10x+25}$ (za $2 \leq x \leq 3$).

15. Izračunaj vrednost izraza:

a) $(\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}})^2$;

b) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$.

16. Racionalisati imeniocce razlomaka:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$; b) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; c) $\frac{6}{3-\sqrt{5}}$ d) $\frac{3\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}+3}$; e) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

17. Rešiti jednačinu: $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

18. Odrediti brojeve x i y za koje je $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA

19. Izračunati $x + y + z$ ako su x, y i z rešenja jednačina:

$$\sqrt{3(x-1998)} = 3; \sqrt{3y-1998} = 3; \sqrt{3(z-1998)} = 3$$

20. Izračunati vrednost izraza $A = x + 1 + \sqrt{x^2}$ za $x = \sqrt{2} - 1997$. (1997)

21. Šta je veće: $\frac{5+2\sqrt{5}}{2}$ ili $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$? (1995)

22. Izračunati: $\sqrt{(3x-2)(x-2)} - 2x(x-2) - \sqrt{2}$ za $x = 3 - \sqrt{2}$. (1995)

23. Šta je veće: $2 + \sqrt{2}$ ili $6 - \sqrt{6}$. (1992)

KONKURSNI ZADACI

24. Uprostiti izraze: a) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$

25. Ako je $1 \leq x \leq 2$, onda je:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 2.$$

Dokazati.

26. Izračunati: $(\sqrt{\sqrt{4-\sqrt{15}}(\sqrt{10}-\sqrt{6})(4-\sqrt{15})})$

POLINOMI (1. DEO)
→ 345/96 -12.03.2000

ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Dokazati identitete: a) $(ax+by)^2 + (ay-bx)^2 = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$; b) $x(y-z) + y(z-x) - z(y-x) = 0$
2. Dokazati da se polinom $2x^2 + 2y^2$ može napisati u obliku zbira kvadrata dva binoma .
3. Rastaviti na činioce: a) $a^2 - 4a + 3$; b) $x^2 - 2x - 8$; c) $2y^2 - 5y + 2$.
4. Rastaviti na proste činioce sledeće polinome : a) $x^2 - 1 - xy + y$; b) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$; c) $2a^2 + 2ab + 1/2(b^2)$.
5. Rastaviti na činioce: a) $x^4 + 64$; b) $a^4 + 4b^4$ c) $ac(a+c) - bc(b+c) + ab(a-b)$.
6. Ako je n prirodan broj dokazati da je: a) $n^3 + 5n$ deljivo sa 6; b) $n^5 - n$ deljivo sa 30; c) $n^3 + 2n$ deljivo sa 3;
7. Dokazati da ni za jedan prirodan broj n izraz $n^2 + n + 2$ nije deljiv sa 49.
8. Ako je x ceo broj onda je $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) + 24$ deljivo sa 24. Dokazati.
9. Ako je p prost broj veći od 3, tada je $p^2 - 1$ deljivo sa 24. Dokazati.
10. Odrediti sve proste brojeve p za koje je $2^p + p^2$ takođe prost broj.
11. Rešiti po x i y sledeće jednačine: a) $x^3 - 12x^2 + 35x = 0$; b) $x^4 + 9 = 10x^2$; c) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$
12. Dokazati identitet: $(ad+bc)^2 + (ac-bd)^2 = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$.
13. Rastaviti na činioce polinome: a) $a^2 - a - 6$; b) $(x^2 + y^2) - 4x^2y^2$
14. Rastaviti na činioce izraz $xy(x-y) - xz(x-z) + yz(y-z)$.

ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA

15. Ako je n prirodan broj onda je $n^3 + 1997n + 1998$ deljivo sa 6. Dokazati. (M-1998.)
16. Dokazati da je zbir kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti kvadrat nijednog prirodnog broja. (R-1998.)
17. Dokazati da je $1991 \times 1993 \times 1995 \times 1997 + 16$ potpun kvadrat nekog prirodnog broja. Ako je n prirodan broj, da li je $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3) + 16$ takođe potpun kvadrat? (R-1997.)
18. Ako je n prirodan broj onda je $11n^3 + n$ deljivo sa 6. Dokazati. (M-1997.)
19. Dat je polinom $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$. Ako je p prost broj, onda je P(p) deljivo sa 24. Dokazati. Odrediti najmanji prost broj p takav da je P(p) deljivo sa 120. (R-1996.)
20. Dat je polinom $P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$. Odrediti za koje vrednosti x, y i z dati polinom nije pozitivan.

KONKURSNI ZADACI

21. Ako je a ceo broj koji nije deljiv ni sa 2 ni sa 3 onda je broj $4a^2 + 3a + 5$ deljiv sa 6. Dokazati.
22. Odrediti sve cele brojeve x i y tako da je: $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 33 = 0$.
23. Ako se proizvod četiri uzastopna cela broja uveća za 1 dobiće se kvadrat nekog celog broja. Dokazati.

LITERATURA

TEMA 8.

POLINOMI (2. DEO) → 345/96 -12.03.2000

ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Odrediti prost broj p takav da je broj $2p+1$ tačan kub nekog prirodnog broja.
2. Dokazati da se dati polinomi mogu napisati u vidu zbira kvadrata:
 - a) $x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3$
 - b) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 6xy - 8xz - 8yz$.
3. Dokazati da vrednost polinoma $x^6 - x^5 + x^4 + x^2 - x + 1$ ne može biti negativna.
4. Dat je polinom $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10$. Za koju vrednost promenljive x polinom $P(x)$ ima najmanju vrednost? Kolika je ta vrednost?
5. Ako je zbir dva broja konstantan, dokazati da je njihov proizvod najveći ako su ova dva broja jednaka među sobom.
6. Ako su a , b i c celi brojevi takvi da je $a^2 + b^2 = c^2$, onda je bar jedan od brojeva a i b deljiv sa 3. Dokazati.
7. Razlika dva neparna broja je deljiva sa 5. Kojom cifrom se završava razlika kubova tih brojeva?
8. Ako je $x - 2y + 3z = 0$, onda polinom $P(x,y,z) = 7xy + 11yz - 7xz - 2x^2 - 6y^2 - 3z^2 + 5$ ima konstantnu vrednost. Dokazati.
9. Ako je $x+y+z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ izračunati koliko je $x^4 + y^4 + z^4$?
10. Ako je $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ različito od 0, onda su brojevi a , b , c međusobno različiti. Dokazati.
11. Ako su x , y , z celi brojevi i ako je $x+y+z = 0$, dokazati da je broj $x^3 + y^3 + z^3$ deljiv sa 3.
12. Dokazati da se polinom $P(x,y,z) = 8x^2 + y^2 + 11z^2 + 4xy - 12xz - 5yz$ može napisati u vidu zbira kvadrata nekoliko polinoma.
13. Ako je $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, tada je $a+b+c = 0$ ili je $a = b = c$. Dokazati.
14. Neka su a , b , c celi brojevi takvi da je $a^2 + b^2 = c^2$. Dokazati da je abc deljivo sa 60.
15. Dokazati da je vrednost polinoma $2x^2 + 5y^2 + 3z^2 - 6xy - 2xz + 5yz$ stalno pozitivna.

ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA

16. Za koje vrednosti x , y i z važi jednakost: $x^{1988} + y^6 + z^4 + 146 = 2x^{994} + 16y^3 + 18z^2$.
17. Odrediti vrednost izraza $P(x,y) = x^{1989} + 1989y$, ako je $x^2 + y^3 + 2x - 6y + 10 = 0$.
18. Neka je $x = 444...444$ (11 četvorki). Dokazati da je broj $x^2 - x - 2$ deljiv sa 270.
19. Dokazati da je zbir kubova tri uzastopna prirodna broja deljiv sa 9.
20. Izračunati zbir $1991^2 - 1990^2 + 1989^2 - 1988^2 + \dots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.
21. Dat je broj $M = 19^{91} - 91^{19}$. Dokazati da je $M > 0$ i da je M deljivo sa 72.
22. Dat je polinom $P(t) = t^4 - t + 0,5$. Dokazati da je za svaki realan broj t $P(t) \neq 0$ i $P(t) > 0$.
23. Da li postoji prirodan broj n takav da je $n^3 - n + 2^n$ deljiv sa 1992?

TEMA 11.

ALGEBARSKI RAZLOMCI → 345/96 -25.03.2000

ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Odrediti uslove pod kojima se mogu skratiti, a zatim i skratiti razlomke:

$$\text{a) } \frac{x^2-4x+3}{x^2-1} \quad \text{b) } \frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-4x} \quad \text{c) } \frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac} \quad \text{d) } \frac{x^4+4}{x^3-2x^2+2x}$$

2. Za koje vrednosti celog broja n su sledeći razlomci takođe celobrojni:

$$\text{a) } \frac{2n+6}{n^2-9} \quad \text{b) } \frac{n-11}{n-3} \quad \text{c) } \frac{n^2-5n+6}{n^2-4}$$

3. Dokazati da se ni za jedno n iz skupa celih brojeva ne mogu skratiti razlomci:

$$\text{a) } \frac{n+1}{n} (n \geq 2) \quad \text{b) } \frac{2n+1}{n+1} \quad \text{c) } \frac{5n+7}{2n+3}$$

4. Za koje cele brojeve n se može skratiti razlomak:

$$\frac{3n+5}{7n+9}$$

5. Dati su razlomci $35/396$ i $28/297$. Odrediti najmanji od svih pozitivnih racionalnih brojeva koji je deljiv sa datim razlomcima, tako da količnik bude ceo broj.

6. Dati su razlomci $8/15$ i $18/15$. Odrediti najveći racionalan broj koji se u svakom od datih razlomaka sadrži ceo broj puta.

7. Ako je $a + \frac{1}{a}$ ceo broj (a nije ceo broj), onda su: $a^2 + \frac{1}{a^2}$ i $a^3 + \frac{1}{a^3}$ takođe celi brojevi.

8. Ako je $a + \frac{1}{a} = 2$, onda je $a^2 + \frac{1}{a^2} = a^3 + \frac{1}{a^3} = a^{1995} + \frac{1}{a^{1995}} = 2$. Dokazati.

9. Ako je $a + \frac{1}{a} = 1$ izračunati: $a^2 + \frac{1}{a^2}$, $a^3 + \frac{1}{a^3}$ i $a^{1995} + \frac{1}{a^{1995}}$.

10. Ako je $a + \frac{1}{a} = 3$ izračunati: $a^2 + \frac{1}{a^2}$ i $a^3 + \frac{1}{a^3}$.

11. Ako je $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ onda je $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2} = \frac{a}{c}$. Dokazati

12. Polinom $P(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (x \neq 1)$ izraziti kao količnik dva binoma.

13. Ako je $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ onda je:

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2$$

Dokazati.

KONKURSNI ZADACI

14. Odrediti sve cele brojeve a za koje je razlomak $\frac{a^2+1}{a-1}$ takođe ceo broj.

15. Ako je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0$ i $x^2 + y^2 = 2$, izračunati $x^{2000} + y^{2000}$ i $x^{2001} + y^{2001}$.

16. Razlomak $\frac{2n-3}{n^2-3n+2}$ se ne može skratiti ni za jedan prirodan broj n koji je veći od 2.
Dokazati.