

# PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

## 6. RAZRED

### TEMA 1. – IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

1. Odrediti skup tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od datih tačaka A i B.
2. Dat je ugao  $\alpha$  u O. Konstruisati sve tačke u ravni koje su jednako udaljene od krakova datog ugla.
3. Kroz datu tačku M konstruisati pravu n koja je normalna na datoj pravoj p.
4. Data je tačka O. Konstruisati skup tačaka u ravni koje su od tačke O udaljene 2 cm.
5. Konstruisati skup tačaka u ravni koje su 3 cm udaljene od date prave p.
6. Data je duž  $AB = 5$  cm. Konstruisati skup tačaka u ravni koje su od date duži udaljene manje od 2 cm.
7. Data je prava p i tačke A i B van nje. Na pravoj p konstruisati tačku M koja je jednako udaljena od tačaka A i B.
8. Dat je krug k i tačke A i B van njega. Na krugu k odrediti tačku koja je jednako udaljena od tačaka A i B.
9. Dat je trougao PQR i tačke A i B van njega. Na stranicama trougla PQR Konstruisati tačku M koja je jednako udaljena od tačaka A i B.
10. U ravni su dati prava p i tačka M. Korišćenjem samo šestara konstruisati tačku N koja je simetrična sa M u odnosu na p.
11. Dat je kvadrat ABCD i tačka M. Koristeći samo lenjir (tj konstruišući samo prave) konstruisati tačku N koja je simetrična sa M u odnosu na pravu AC.
12. Prave p i q seku se van ravni crteža u tački O. Konstruisati simetralu ugla  $\alpha$  u O.
13. Data je kružnica k i van nje tačke A i B. Koristeći samo šestar (tj. konstruišući samo krugove) konstruisati presek kružnice sa pravom AB.
14. Date su tačke P i Q i prava s. Konstruisati ugao POQ, ako se zna da je data prava s njegova simetrala.
15. Data je prava p i sa iste strane prave p date su tačke A i B. Na pravoj p odrediti tačku M tako da je zbir rastojanja  $AM + BM$  najmanji moguć.
16. Na pravougaonom bilijarskom stolu ABCD nalaze se dve loptice M i N. Kako treba udariti lopticu M da bi posle jednog (dva, ili tri) odbijanja udarila lopticu N.
17. Dati su trougao ABC i duž MN. Konstruisati duž PQ koja je jednaka i paralelna sa MN, tako da tačke P i Q pripadaju stranicama trougla ABC.
18. Dat je ugao  $\alpha$  u O i tačke A i B u njemu. Konstruisati tačku M na kraku Ox i tačku N na kraku Oy tako da je duž MN jednaka i paralelna sa AB.
19. Jednakokraki trouglovi ABC i MNP konstruisani su tako da osnovice BC i NP leže na istoj pravoj p. Konstruisati pravu q paralelnu sa p tako da odsečci prave q unutar datih trouglova budu jednaki.
20. Data je duž AB i tačka C van nje. Konstruisati kružnicu k koja sadrži kroz tačke A, B i C.

### KONKURSNI ZADACI

1. Date su prava s i tačke P i Q sa raznih strana prave s. Konstruisati ugao POQ, ako se zna da je data prava s njegova simetrala.
2. Date su tačke A i B i prave p i q. Konstruisati tačku M tako da je  $MA = MB$  i pri čemu je tačka M jednako udaljena i od prave p i od prave q.
3. Data je prava p i tačka M van nje. Konstruisati tačku N koja je od date prave p i tačke M udaljena 2 cm. Koliko ima rešenja ?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 2. – APSOLUTNA VREDNOST**

1. Izračunati vrednost izraza  $A = |a+3| + |a-3| + |a-1|$ , ako je  $a = -10$ .
2. Ako je  $x = -6$  izračunaj vrednost izraza  $(2|x| + x):3 + |x| + x$ .
3. Za  $x = -1$  i  $y = -5$  izračunaj vrednost izraza:  $|x-y| + 2|y| - (x+y)$ .
4. Izračunati sumu:  $|1-2| + |3-4| + |5-6| + \dots + |1998-1999| + |1999-2000|$ .
5. Odrediti odstojanje tačaka A(3), B(-7), C(-2), D(0) od tačke: a) R(0); b) Q(-5); c) R(5).
6. Rešiti jednačine:  $|x| = 9$ ;  $|x| = 0$ ;  $|x| = -3$ .
7. Rešiti jednačine:  $|x| - |-5| = -2$ ;  $|x:2| = 1 + |-3|$ .
8. Odrediti sve tačke koje su od tačke A(3), B(-5) i C(0) udaljene za 2.
9. Rešiti jednačine:  $|x-3| = 2$ ;  $|x-1| + 4 = |-3|$ ;  $2|x+2| - 3 = 7$ .
10. Rešiti jednačine:  $14 - |x+3| = 9$ ;  $|x| + 3 = 5$ ;  $|x| - 12 = 9$ .
11. Odrediti sve cele brojeve za koje su tačne nejednakosti:  $|x| < 2$ ;  $|x| > 3$ ;  $-5 < |x| \leq 6$ .
12. Rešiti nejednačine:  $|x| < 3$ ;  $|x| > 2$ ;  $|x| \geq -4$ ;  $|x| < -1$ .
13. Rešiti nejednačine:  $|x-2| < 3$  i  $|x-2| > 3$ . Napraviti razliku skupova njihovih rešenja.
14. Rešiti nejednačinu  $3|x+2| + 23 \leq 47$ .
15. Izračunati zbir rešenja jednačine: a)  $|x| = a$ ; b)  $|x-3| = a$ .
16. Data je nejednačina  $|x| < a$ . Koliki je: a) zbir svih njenih rešenja; b) proizvod svih njenih rešenja?
17. Šta je veće: a)  $|a+b|$  ili  $|a| + |b|$ ; b)  $||a| - |b||$  ili  $|a+b|$ ?
18. Rešiti jednačine:
  - a)  $|x-1| = |x+5|$ ;
  - b)  $|x+1389| - |x+1999| = 12$ ;
  - c)  $|x-1| + |x-3| = |4x-2|$ ;
  - d)  $|x| + |x-6| = |6-2x|$

**KONKURSNI ZADACI**

1. Koliki je zbir svih celobrojnih rešenja nejednačine: a)  $|x| \geq 1997$ ; b)  $|x| > a$ ?
2. Odrediti sve cele brojeve x i y koji istovremeno zadovoljavaju sledeće relacije:  
 $|x| + |y| \leq 6$  i  
 $x + y = -6$ .
3. Rešiti sledeće jednačine i nejednačine:
  - a)  $|x+1| + |x-1| = 6$ ;
  - b)  $|x-3| + |x-4| - |x-5| = 3$ ;
  - c)  $|x+1| = |x-5|$ ;
  - d)  $||3x-2| + 4| > -6$ .
4. Koliko celobrojnih rešenja ima jednačina:  $|x| + |x+1| + \dots + |x+11| + |x+12| = y$ , ako je y jednako:
  - a) -2;
  - b) 0;
  - c) 48;
  - d) 1997?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 3. – SABIRANJE I ODUZIMANJE CELIH BROJEVA**

1. Napisati deset uzastopnih celih brojeva tako da su:
  - a) samo četiri broja pozitivna;
  - b) samo tri broja negativna .
2. Izračunati:
  - a)  $(-1994) + (-1993) + \dots + 1995 + 1996 + 1997$ ;
  - b)  $(-1994) \times (-1993) \times \dots \times 1994 \times 1995 \times 1996 \times 1997$  ;
3. Koliko je:
  - a)  $(-25) + (-24) + \dots + 63 + 64$  ;
  - b)  $(-85) + (-84) + \dots + 37 + 38$  ?
4. Izračunati:
  - a)  $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \dots + 1995 - 1996 + 1997$ ;
  - b)  $1 - 3 + 5 - 7 + \dots + 1993 - 1995 + 1997$ .
5. Rešiti sledeće jednačine:
  - a)  $(-10) + (-9) + \dots + (x-1) + x = -40$  ( $x \in \mathbb{Z}$ );
  - b)  $x + (x+1) + \dots + 17 + 18 = 51$  ( $x \in \mathbb{Z}$ ).
6. Zbir 111 uzastopnih celih brojeva jednak je 0. O kojim brojevima je reč ?
7. Odrediti 1995 uzastopnih celih brojeva tako da je njihov zbir jednak 1995.
8. Zbir nekoliko uzastopnih celih brojeva je 25. O kojim brojevima je reč?
9. Odrediti sve uzastopne cele brojeve tako da je njihov zbir -35.
10. Ako je  $x + y = 0$ , onda je  $|x| - |y| = 0$ . Dokazati.
11. Odrediti sve cele brojeve  $x$  i  $y$  tako da je  $x + y = 0$  i  $2|x| + 3|y| = 25$ .
12. Odrediti sve cele brojeve  $x$ ,  $y$  i  $z$  tako da je:  $x + y + z = 0$ ,  $x - y + z = 2$  i  $|x| + |z| = |y|$ .
13. Koliko rešenja ima jednačina  $|x| + |y| = 10$ , ako su  $x, y \in \mathbb{Z}$ .
14. Da li je moguće u polja kvadrata  $3 \times 3$  rasporediti brojeve -1, 0 i 1 tako da je zbir u svakoj koloni, vrsti i dijagonali različit?

**KONKURSNI ZADACI**

1. Odrediti cele brojeve  $x$  i  $y$  tako da je:
  - a)  $x + (x+1) + \dots + (y-1) + y = -24$  ;
  - b)  $x + (x+1) + \dots + (y-1) + y = 39$ .
2. Zbir 1000 uzastopnih celih brojeva je
  - a) 500;
  - b) - 1500.O kojim brojevima je reč ?
3. Na tabli su napisani prirodni brojevi 1, 2, 3, ... 100, 101. Izbrišemo bilo koja dva broja i umesto njih napišemo njihov zbir ili razliku. Može li ponavljanjem tog postupka posle izvesnog broja koraka na tabli ostati samo broj nula ?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 4. – UGLOVI TROUGLA**

1. Ako je zbir dva spoljašnja ugla trougla  $270^\circ$ , onda je taj trougao pravougli. Dokazati.
2. Spoljašnji ugao jednakokrakog trougla je  $100^\circ$ . Izračunati unutrašnje uglove trougla.
3. Ako se spoljašnji ugao kod temena A poveća za  $35^\circ$ , a spoljašnji ugao kod temena B smanji za  $20^\circ$ , tada se unutrašnji ugao kod temena C smanji za svoju četvrtinu. Izračunati unutrašnji ugao kod temena C.
4. Simetrala unutrašnjeg ugla trougla i simetrala spoljašnjeg ugla trougla iz istog temena seku se pod pravim uglom. Dokazati.
5. U trouglu ABC simetrala  $\sphericalangle ACB$  obrazuje sa stranicom AB ugao od  $128^\circ$ . Izračunati oštar ugao između prave AB i simetrale spoljašnjeg ugla kod temena C.
6. Simetrale oštih uglova pravouglog trougla seku se pod uglom od  $135^\circ$ . Dokazati.
7. U trouglu ABC simetrala spoljašnjeg ugla C i simetrala spoljašnjeg ugla B, seku se u tački M. Izračunati  $\sphericalangle BMC$ , ako je  $\sphericalangle BAC = 50^\circ$ .
8. Izračunati ugao pri vrhu jednakokrakog trougla, ako se visine koje odgovaraju kracima trougla seku pod uglom od  $48^\circ$ .
9. U trouglu ABC, duž BK je simetrala  $\sphericalangle ABC$  ( $K \in AC$ ). Ako je  $\sphericalangle BKC = 70^\circ$  kolika je razlika  $\sphericalangle ACB - \sphericalangle CAB$ ?
10. Hipotenuza AB pravouglog trougla ABC produžena je preko temena A do tačke M tako da je  $AC = AM$  i preko temena B do tačke R tako da je  $BR = BC$ . Izračunati ugao MCR.
11. Jedan unutrašnji ugao trougla je  $75^\circ$ . Izračunati ostale uglove trougla, ako se zna da prava koja sadrži teme datog ugla deli dati trougao na dva jednakokraka trougla.
12. Izračunati uglove jednakokrakog trougla ako se zna da simetrala ugla na osnovici seče simetralu ugla pri vrhu pod uglom od  $130^\circ$ .
13. Hipotenuzina visina i simetrala pravog ugla seku se pod uglom od  $12^\circ$ . Izračunati uglove tog trougla.
14. Spoljašnji uglovi trougla su  $2x$ ,  $20x$  i  $13x$ . Izračunati unutrašnje i spoljašnje uglove trougla.
15. Data je kružnica k i na njoj tri tačke A, B i C. Ako je O centar kruga i  $\sphericalangle ACB = \varphi$ , onda je  $\sphericalangle AOB = 2\varphi$ . Dokazati.
16. Nad duži AB kao prečnikom konstruisana je kružnica. Neka je M proizvoljna tačka na toj kružnici. Dokazati da je  $\sphericalangle AMB = 90^\circ$ .
17. Nad duži AB kao prečnikom konstruisana je kružnica k. Dokazati: a) ako je tačka M u krugu onda je  $\sphericalangle AMB > 90^\circ$ ; b) ako je tačka M van kruga onda je  $\sphericalangle AMB < 90^\circ$ .
18. Ugao  $\beta$  jednakokrakog trougla ABC ( $AC = BC$ ) je  $72^\circ$ . Na produžetku kraka AC izabrana je tačka D, takva da je  $AD = AB$ . Dokazati da je trougao CBD jednakokrak.
19. Nad stranicom CD kvadrata ABCD konstruisan je jednakostranični trougao CDE. Izračunati uglove trougla ABE.
20. U trouglu ABC je  $\sphericalangle ACB = 40^\circ$ . Simetrala spoljašnjeg i simetrala unutrašnjeg ugla kod temena C seku se i određuju jednakokraki trougao CMR. Izračunati  $\sphericalangle ABC$  i  $\sphericalangle CAB$ .

**KONKURSNI ZADACI**

1. U pravouglog trouglu ABC tačka M je podnožje visine, a tačka E je središte hipotenuze. Dokazati da je  $\sphericalangle ACM = \sphericalangle BCE$ .
2. Simetrale dvaju spoljašnjih uglova trougla seku se pod uglom koji je jednak trećem unutrašnjem uglu datog trougla. Odrediti taj unutrašnji ugao.
3. Poluprave BM i CM su simetrale uglova  $\beta$  i  $\gamma$  trougla ABC. Prava p sadrži tačku M, paralelna je sa BC i seče stranice AB i AC u tačkama D i E. Dokazati da je  $DE = DB + EC$ .

# PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE

## 6. RAZRED

### TEMA 5. – DIRIHLEOV PRINCIP

1. Ako 7 zečeva treba smestiti u 3 kaveza, onda postoji kavez u kome se nalaze bar 3 zeca. Dokazati.
2. U osnovnoj školi «Dimitrije Tucović» iz Kraljeva ima u svakom razredu po 4 (ukupno 16) odeljenja viših razreda, a u školu za matematičke talente ide 18 učenika. Dokazati da bar 5 učenika idu u isti razred i da bar dva učenika idu u isto vreme.
3. Može li se tvrditi da u odeljenju sa 34 učenika sigurno postoje bar dva učenika čija prezimena počinju istim slovom? Može li se tvrditi i u odeljenju sa 29 učenika?
4. U radu zimske škole mladih matematičara učestvovalo je 368 učenika. Dokazati da među njima postoje bar dva koji slave rođendan istoga dana.
5. U odeljenju ima 30 učenika. Na kontrolnom zadatku iz matematike pravili su ne više od 6 grešaka (šest ili manje od šest). Dokazati da su bar 5 učenika napravili jednak broj grešaka (može i 0 grešaka).
6. U jednoj šumi ima 7654321 stabala i na svakom stablu ne više od 1000000 listova. Dokazati da u toj šumi postoji najmanje 8 stabala sa jednakim brojem listova.
7. U Beogradu živi 1 600 000 stanovnika, a na glavi svakog od njih je ne više od 300 000 vlasni kose. Dokazati da u Beogradu ima bar 6 ljudi sa istim brojem vlasni glavi.
8. Imamo 25 sanduka jabuka. U svakom sanduku su jabuke iste sorte, pri čemu su zastupljene ukupno 3 sorte jabuka. Dokazati da postoji 9 sanduka sa istom sortom jabuka.
9. Na prvenstvu škole u fudbalu učestvuju 8 ekipa, pri čemu svaka ekipa sa svakom od ostalih ekipa igra po jednu utakmicu. Dokazati da u svakom trenutku takmičenja postoje bar dve ekipe koje su do tada odigrale jednak broj utakmica.
10. U jednoj osnovnoj školi ima 987 učenika. Dokazati da u toj školi postoje bar dva učenika koji imaju jednake inicijale.
11. Na Zemlji živi više od 4 milijarde ljudi. Poznato je da je među njima manje od 10 000 000 ljudi starije od 100 godina. Dokazati da postoje dva čoveka koja su rođena iste godine, istog meseca, istog dana, istog sata, istoga minuta i istoga sekunda.
12. Jednom predavanju prisustvuju 28 ljudi. Dokazati da među njima postoje dvojica koji među prisutnima na predavanju imaju jednak broj poznanika.

13. Deset učenika ima zajedno 100 dinara od kojih svaki ima bar jedna dinar i svi imaju različit broj dinara. Dokazati da među njima postoji 5 učenika koji zajedno imaju više od 14 dinara. Dokazati da među njima ima 6 učenika koji imaju manje od 90 dinara.

14. U kutiji se nalazi 10 crvenih, 8 plavih, 8 zelenih i 4 žute olovke. U mraku izvlačimo olovke jednu po jednu. Koliko najmanje olovaka moramo izvući da bismo bili sigurni da je među izvučenim olovkama: a) jedna crvena olovka; b) jedna plava i dve žute; c) ne manje od 4 olovke iste boje; d) bar po jedna olovka svake boje; e) bar po jedna olovka različite boje?

15. U kesi se nalazi 20 belih i 40 crnih rukavica. Koliko najmanje rukavica treba izvući da bi: a) imao bar jedna par istobojnih rukavica; b) imao bar jedan par belih rukavica; c) imao bar jedan par crnih rukavica; d) imao više crnih nego belih rukavica.

### KONKURSNI ZADACI

1. U vreći se nalaze 5 parova crnih i 5 parova braon cipela iste veličine i izgleda. Koliko najmanje cipela treba uzeti iz vreće nasumice da bi kompletirali jedan propisan par cipela (leva i desna cipela su iste boje)?

2. Grupa od 21 dečaka treba da podeli 200 oraha. Dokazati da ma kako oni to činili uvek će se naći dvojica sa istim brojem dobijenih oraha.

3. Date su po tri nule, jedinice i dvojke. Da li je moguće dat cifre upisati u polja kvadrata  $3 \times 3$ , tako da zbir brojeva u svakoj vrsti, koloni i dijagonali bude različit.

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 6. – LOGIČKO-KOMBINATORNI ZADACI**

1. U čaši , balonu i kanti nalaze se : limunada, mleko i voda (u svakom sudu po jedna tečnost ). U kanti nije limunada, a ni mleko. U čaši nije limunada. Koja se tečnost nalazi u kom sudu?
2. Koje su ocene dobili Anka, Branka i Danka ako Anka nema '3', Danka nema '3' i nema '5' , a u odeljenju nema dvojki i jedinica iz matematike.
3. Od tri olovke , jedna je crvena, jedna bela i jedna plava. Označiti olovke sa A, B i C. Koje boje imaju olovke ako je tačno samo jedno od tri tvrđenja. "A je crvena" , "B nije crvena" , "C nije plava".
4. Boris , Dušan , Milica i Višnja su kapiteni sportskih ekipa u svojoj školi. Postavljeno im je pitanje u kojim sportovima se takmiče i oni su dali sledeće izjave : Boris : "Višnjina ekipa igra rukomet , a Milicina košarku". Dušan: "Višnja igra odbojku, a Boris košarku". Milica : "Dušan je kapiten odbojkaša , a Boris rukometaša ". Višnja : "Boris predvodi odbojkaše, a Milica šahiste". Ispostavilo se da se kapiteni nedovoljno poznaju. Naime svaki je istinu rekao samo za jednog sportistu. Odgovoriti kojim ekipama su kapiteni Boris, Dušan, Milica i Višnja.
5. U jednoj vazi je pet karanfila , a u drugoj tri ruže. Na koliko načina se može izabrati jedan karanfil ili jedna ruža? Na koliko načina se može napraviti buket od jednog karanfila i jedne ruže?
6. Od mesta A do mesta B vode tri puta , a od mesta B do mesta C dva puta. Na koliko se načina može stići iz A u C preko B?
7. Na koliko se načina mogu razmestiti 5 učenika na 5 pričvršćenih stolica?
8. Na koliko se načina mogu razmestiti 6 učenika na: a) 9 pričvršćenih stolica ; b) 4 pričvršćene stolice?
9. Koliko se četvorocifrenih brojeve može sastaviti od cifara: a)  $\{1,2,3,4,5,6\}$  ; b)  $\{0,1,2,3,4,5\}$  ako se cifre: a) ne ponavljaju ; b) ponavljaju .
10. Od cifara 0,1,3,5,7,9 napisani su petocifreni brojevi sa pet različiti cifara. Koliko je među njima onih koji nisu deljivi sa 10 ?
11. Koliko dijagonala ima dvanaestougao?
12. Nekoliko drugova, prilikom susreta, su se rukovali jedan sa drugim. Koliko je bilo drugova ako je bilo 10 rukovanja?

13. U ravni je dato 8 tačkaka od kojih su 4 na jednoj pravoj , a od preostalih 4 nikoje 3 nisu na jednoj pravoj. Koliko pravih određuje ovih 8 tačkaka?

14. Registracija automobila sadrži jedno slovo azbuke i jedan trocifreni broj (koji ne počinje nulom). Koliko se automobila može na taj način registrovati ?

15. Aca , Miša i Rajko čitaju: "Politiku" , "Novosti" i "Sport" i to svako čita samo jedne novine. Na pitanje , ko od njih čita koje novine njihova drugarica Vera je odgovorila: " Aca je čitao "Politiku", Miša nije čitao "Novosti", a Rajko nije čitao "Politiku". Odgovor je bio tačan samo za jednog čitaoca. Koje novine čitaju Aca, Miša i Rajko?

16. Koliko ima trocifrenih brojeva sa različitim ciframa, ako su sve cifre različite od nule?

17. Na jednoj proslavi svih 20 učesnika rukovali su se međusobno. Koliko je ukupno bilo rukovanja?

### KONKURSNI ZADACI

1. Od 6 učenika 2 imaju nedovoljnu ocenu iz matematike. Na pitanje koja su to dva učenika dobili smo sledeće izjave. Branko: Dragan i Mile; Dragan: Branko i Zoran; Kosta: Branko i Goran; Mile: Dragan i Zoran; Zoran: Branko i Kosta. Od svih izjava jedna je sasvim netačna, dok su ostale napola tačne. Koji učenici imaju slabe ocene i koji učenik je najveći lažov ?

2. Rukovodstvo odeljenjske zajednice sastoji se od predsednika, sekretara i 5 članova. Od 7 izabranih članova treba formirati rukovodstvo. Na koliko se načina to može uraditi?

3. Koliko se različitih signala može napraviti pomoću tri zastavice (bele, plave i crvene boje) uzimajući ih po jednu, po dve, po tri?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 7. – ODABRANI ZADACI SA RACIONALNIM BROJEVIMA**

1. Šta je veće:  $-1994/1995$  ili  $-1995/1996$
2. Odrediti sve razlomke sa jednocifrenim imeniocem od kojih je svaki veći od  $-8/9$  a manji od  $-7/9$ .
3. Da li postoji prost broj  $p$  takav da važi:  $-2/5 < -1/p < -8/63$ ?
4. Izračunaj koliko je:  
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{1995 \cdot 1996} - 2.$$
5. Koliko je racionalnih brojeva sa imeniocem 5 većih od  $-1$  a manjih od  $1$ ?
6. Šta je veće  $x$  ili  $1/x$  ako je  $x \neq 0$  i  $x \in \mathbb{Z}$ ?
7. Mile je otpio  $1/6$  šolje crne kafe i dolio mleko, zatim je otpio  $1/3$  šolje i dolio mleko, zatim je otpio  $1/2$  šolje i dolio mleko. Na kraju je popio celu šolju tečnosti. Čega je popio više: kafe ili mleka?
8. Razlika dva broja je  $13,86$ . Ako se većem broju pomeri zarez: a) u desno; b) u levo za jedno mesto dobija se manji broj. Koji su to brojevi?
9. Šta je veće:  $-299/999$  ili  $-2999/9999$ ?
10. Koliko ima razlomaka sa jednocifrenim imeniocem koji su veći od  $-1/2$ , a manji od  $1/3$ ?
11. Odrediti sve cele brojeve  $n$  za koje važi:  
$$\frac{1}{3} < \frac{1-n}{5} < \frac{11}{12}.$$
12. Odrediti dva racionalna broja čiji je zbir  $-1/5$ , a količnik  $1/5$ ?
13. Racionalan broj  $-4/7$  je nastao skraćivanjem racionalnog broja čiji brojilac i imenilac imaju zbir  $885$ . Odrediti prvobitni razlomak.
14. Za koje vrednosti celog broja  $x$  je i  $\frac{x+3}{x}$  ceo broj?
15. Kazaljke na časovniku pokazuju 9 sati. Posle koliko vremena će se one prvi put poklopiti?

**KONKURSNI ZADACI**

1. Kako je moguće od konopca dužine  $2/3$  m odrezati  $1/2$  m bez upotrebe metra?
2. Šta je veće:  $-555553/555557$  ili  $-666665/666669$ ?
3. Kazaljke na časovniku pokazuju 9 sati i zaklapaju prav ugao. Posle koliko vremena će one prvi put ponovo zaklapati prav ugao?
4. Odrediti skup svih racionalnih brojeva čiji je imenilac jednocifreni i koji su veći od  $-4/9$  a manji od  $2/7$ .
5. Mama je kupila jabuke za svoju decu: Miru, Anu i Branka. Trebalo je da deca jabuke podele na jednake delove. Mira je došla prva kući, uzela svoju trećinu otišla. Zatim je došla Ana i misleći da je ona prva, uzela svoju trećinu dela jabuka i izašla. Na kraju je došao Branko, uzeo trećinu jabuka i otišao. Posle toga ostalo je 8 jabuka. Koliko je jabuka svako uzeo?

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 8. – PROSTI BROJEVI. DELJIVOST**

1. Dokazati :
  - a) broj 2 je jedini paran prost broj
  - b) skup svih celih brojeva je beskonačan
  - c) svi prosti brojevi veći od dva su neparni.
2. Skup prostih brojeva je beskonačan. Dokazati.
3. Svi prosti brojevi veći od 2 su oblika  $4k - 1$  ili  $4k + 1$ . Svi prosti brojevi veći od 3 imaju oblik  $6k - 1$  ili  $6k + 1$ . Obrnuto ne važi. Dokazati.
4. Odrediti sve proste brojeve  $p$  takve da je
  - a)  $p + 5$  prost broj    v)  $3^p + p^3$  prost broj
  - b)  $p^2 + 9$  prost broj    g)  $p + 2$  i  $p + 4$  prosti brojevi.
5. Ako je  $p$  prost broj onda je :
  - a)  $p + 7$  složen broj
  - b)  $p^{1995} + p^{1996}$  složen broj
  - v)  $p^{1987} + p^{1988} + 1988$  složen broj. Dokazati.
6. Ako su  $p$  i  $8p - 1$  prosti brojevi onda je  $8p + 1$  složen broj. Dokazati.
7. Dokazati da postoji 11 uzastopnih složenih brojeva.
8. Zbir dva prirodna broja je 288 , NZD je 36. Koji su ti brojevi?
9. Postoji li prirodan broj čiji je proizvod cifara 650. Postoji li prirodan broj čiji je zbir cifara 650 ?
10. Odredi najmanji prirodan broj  $k$  kojim treba pomnožiti broj 300 da se dobije kub prirodnog broja.
11. Dokazati da je broj: a)  $1987^{1986} + 1$  ; b)  $1995^{1996} - 345$  deljiv sa 10.
12. Mirko je kupio nekoliko olovki po 27 dinara i nekoliko sveski po 72 dinara. Prodavac mu je za to naplatio 1234 dinara. Kako je Mirko znao da je prodavac pogrešio?
13. Proizvod 2 dvocifrena prirodna broja zapisan je samo pomoću četvorki. O kojim brojevima je reč ?
14. Odrediti najmanji prirodan broj koji pri deljenju sa 2 daje ostatak 1, pri deljenju sa 3 daje ostatak 2, a pri deljenju sa 8 daje ostatak 7.
15. Odrediti sve trocifrene prirodne brojeve čiji je zbir cifara 10, a deljivi su sa 11.
16. Ako je  $p$  prost broj onda je  $p^{1990} + 1991$  složen broj. Dokazati.
17. Postoji li prost broj  $p$  takav da su  $3p + 1$  i  $5p + 1$  prosti brojevi?
18. Odrediti cifre  $x$  i  $y$  takve da broj  $1997xy$  bude deljiv sa 8 i sa 9.

**KONKURSNI ZADACI**

1. Odrediti prost broj  $p$  tako da su  $p + 14$  i  $p + 16$  takođe prosti brojevi.
2. Odrediti najmanji prirodan broj koji je deljiv sa 7, a pri deljenju sa 2, 3, 4, 5 i 6 daje ostatak 1.
3. Koji najmanji prirodan broj pomnožen sa 378 daje kvadrat prirodnog broja ?
4. Dokazati da su 3, 5 i 7 jedina tri uzastopna neparna prosta prirodna broja.

**PODRUŽNICA MATEMATIČARA KRALJEVO  
ŠKOLA ZA MATEMATIČKE TALENTE**

**6. RAZRED**

**TEMA 10. – ODABRANI ZADACI SA OPŠTINSKIH TAKMIČENJA  
MLADIH MATEMATIČARA**

**1(86).** U jednom razredu je bilo 32 učenika. Na testu iz matematike Ivan je potuno tačno uradio svih 9 datih zadataka. Dokazati da u ovom odeljenju postoje bar 4 učenika koji su rešili isti broj zadataka.

**2(86).** Ako se broj 1000 podeli nekim brojem ostatak je 8. Ako se 900 podeli istim brojem onda je ostatak 1. Kojim brojem smo delili 1000 i 900?

**3(86).** Razlomak  $\frac{281}{140}$  prikazati kao zbir tri razlomka sa jednocifrenim imeniocima. Rešenje obrazložiti.

**4(86).** Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi: stranica  $CB=a=6$  cm, ugao  $\alpha=\angle BAC=75^\circ$  i visina  $CD=hc=4$  cm.

**5(86).** Konstruisati trougao ABC ( $AB=BC$ ). Na pravoj BC izabrana je tačka D, tako da je C između B i D. Dokazati da je  $\angle ABD > \angle ADB$ .

**6(87).** Racionalni broj  $-\frac{4}{7}$  nastao je skraćivanjem racionalnog broja čiji brojilac i menilac imaju zbir 885. Odrediti prvobitan racionalan broj.

**7(87).** Kada se iz jednog punog bureta prelije u drugo prazno bure  $\frac{1}{6}$  tečnosti, a zatim  $\frac{2}{3}$  preostale tečnosti, tada u drugo ne bi moglo da stane 48 litara. Koliko litara zahvata svako bure ako u prvo staje dva puta više tečnosti nego u drugo.

**8(87).** U trouglu ABC tačka M je središte duži AB. Prava p koja prolazi kroz M i paralelna je simetrali  $\angle ACB$  i preseca pravu BC u tački D, a pravu AC u tački E. Dokazati da je trougao CDE jednakokrak.

**9(87).** Dat je trougao ABC. U temenu A konstruisana je duž AD normalna na AC, a C i E sa raznih strana prave AB. Dokazati da je  $BD=CE$ .

**10(87).** U jednoj školi uči 1111 učenika. Dokazati da u toj školi postoje bar dva učenika koji imaju identične inicijale i da bar četiri učenika slave rođendan istoga dana.

**11(88).** Putnički voz prelazi razdaljinu između grada A i B za 6 sati, a teretni za 10 sati. Ako vozovi krenu istovremeno, jedan iz A, drugi iz B jedan drugom u susret, posle kog vremena će se sresti?

**12(88).** Dat je razlomak  $\frac{1988}{1987}$ . Koji broj treba oduzeti od brojioca i dodati imeniocu da bi se posle skraćivanja dobio razlomak  $\frac{2}{3}$ ?

**13(88).** U jednakokrakom trouglu ABC ( $AC=BC$ ) simetrala  $\angle BAC$  i visina AD koja odgovara kraku BC seku se pod uglom od  $15^\circ$ . Odrediti uglove trougla ABC.

**14(88).** Na kracima oštrog ugla  $xOy$  date su tačke A i B tako da je  $OA=OB$ . Ako je M proizvoljna tačka simetrale ugla  $xOy$  onda je  $MA=MB$ . Dokazati.

**15(88).** U jednog opštini na opštinskom takmičenju mladih matematičara u IV, V, VI, VII i VIII razredu učestvovalo je 1988 učenika rođenih 1973, 1974, 1975, 1976 i 1977 godine. Dokazati da postoje bar dva takmičara koji su rođeni istoga dana i iste godine. Dokazati da bar 6 takmičara slavi rođendan istoga dana.

**16(89).** Rešiti jednačinu  $\left|2x - \frac{3}{4}\right| : 5 = 6$ .

**17(89).** Odrediti sve cele brojeve  $n$  za koje je  $\frac{1}{3} < (1 - n) : 5 < \frac{11}{12}$ .

**18(89).** Jedan radnik završi jedan automobil za 10 dana. Ako mu se priključi drugi radnik i pomogne mu u radu samo 2 dana, onda će popravka biti gotova za 6 dana. Za koliko dana bi generalnu popravku auta završio drugi radnik?

**19(89).** Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod temena C. Ako hipotenuzu AB produžimo preko temena A za duž  $AM=AC$  i preko temena B za duž  $BN=BC$ , onda je ugao  $\angle MCN=135^\circ$ . Dokazati.

**20(89).** Dat je jednakokraki trougao ABC ( $AC=BC$ ). Na produžetku duži CA, iza temena A izabrana je proizvoljna tačka D, a na duži BC tačka E tako da je  $AD=BE$  ( $BE < BC$ ). Dokazati da osnovica AB polovi duž DE.

**21(90).** Brojilac razlomka  $\frac{23}{42}$  treba uvećati, a imenilac umanjiti za isti broj  $x$ , tako da se dobije  $\frac{7}{6}$ . Odrediti  $x$ .

**22(90).** Reši jednačinu  $2|x| = 6 - x$ .

**23(90).** U jednoj osmogodišnjoj školi u svakom razredu ima po 4 odeljenja, a ukupan broj učenika je 1111. Dokazati da postoji odeljenje u kome uči bar 35 učenika.

**24(90).** U trouglu ABC ugao kod temena C je  $45^\circ$ . Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C u preseku sa pravom AB određuju jednakokraki trougao CDE. Odrediti uglove trougla ABC.

**25(90).** Dokazati da je svaka težišna linija trougla manja od poluobima tog trougla.

**26(91).** Kada je pešak prešao četvrtinu puta i još 5 km, ostalo mu je da pređe još trećinu puta i još 10 km. Kolika je dužina puta?

**27(91).** Odrediti ceo broj  $x$  tako da je  $(-10)+(-9)+\dots+(x-1)+x=(-27)$ . Koliko rešenja ima?

**28(91).** U pravouglom trouglu ABC na hipotenuzi AB date su tačke M i N tako da je  $AM=AC$  i  $BN=BC$ . Izračunati  $\angle MCN$ .

**29(91).** Dat je jednakokraki trougao ABC i prava  $p$  koja je normalna na osnovici BC. Ako prava  $p$  seče jedan krak u tački M, a produžetak drugog kraka u tački N, onda je trougao MAN jednakokrak. Dokazati.

**30(91).** Čovek ima najviše 32 zuba. Dokazati da se u školi koja ima 1991 đaka, uvek može formirati grupa od najmanje 61 učenika, pri čemu svaki član grupe ima podjednak broj zuba.

**31(92).** Ako je tačka O centar kruga opisanog oko trougla ABC, onda je  $\angle BOC=2\angle BAC$ .

**32(92).** Na opštinskom takmičenju je učestvovalo 18 učenika. Za plasman u sledeći stupanj takmičenja bilo je potrebno da se od datih 5 reše 3 zadatka. Ako su svi učenici zajedno rešili ukupno 45 zadataka, dokazati da se najmanje tri učenika plasiralo dalje.

**33(92).** Neka je ABC jednakokraki trougao sa osnovicom BC i N proizvoljna tačka na njegovoj osnovici. Neka je prava  $n$  normalna na pravoj BC u tački N i neka seče prave AB i AC u tačkama D i E. Dokazati da je trougao ADE jednakokraki.

**34(92).** Odrediti najmanji prirodni broj koji pomnožen sa 540 daje kub prirodnog broja.

**35(92).** Odrediti racionalne brojeve  $a$ ,  $b$  i  $c$  ako su zbrojevi po dva od njih jednaki  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{17}{10}$  i  $\frac{83}{15}$ .

- 36(93).** U školi ima 240 devojčica i dečaka. Ako polovinu učenika škole čine  $\frac{3}{5}$  devojčica i  $\frac{3}{7}$  dečaka, koliko ima devojčica, a koliko dečaka ?
- 37(93).** U polja kvadrata  $3 \times 3$  raspoređeni su brojevi 1, 2 i 3. Da li je moguć takav raspored pri kome bi zbir brojeva u svakoj vrsti koloni i dijagonali bio različit ?
- 38(93).** Dati su skupovi  $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 1992, 1993 \}$ ;  $B = \{ 0, -1, -2, \dots, 1991, -1992 \}$ . Neka je  $s$  zbir svih brojeva iz skupa  $A$  i skupa  $B$ ,  $p$  njihov  $\cdot$ -1992. Neka je  $r$  zbir svih brojeva skupova  $A$  i  $B$ ,  $p$  njihov proizvod i  $r$  razlika sume neparnih brojeva iz  $A$  i parnih brojeva iz  $B$ . Poređati brojeve  $|s-p|$ ,  $|p-r|$  i  $|r-s|$  po veličini.
- 39(93).** Na produžetku stranice  $AB$  trougla  $ABC$ , iza temena  $B$  u odnosu na  $A$ , data je tačka  $M$  tako da je  $BM = BC$ . Dokazati da je prava  $MC$  paralelna simetrali ugla  $b$ .
- 40(93).** Oštar ugao pravouglog trougla je  $36^\circ$ . Izračunati ugao između visine i težišne duži koje odgovaraju hipotenuzi.
- 41(94).** U šesti razred OŠ "Kadinjača" upisala se  $\frac{1}{7}$  učenika više od planiranog broja, a do kraja školske godine školu je napustila  $\frac{1}{24}$  upisanih učenika, tako da je na kraju bilo 10 učenika više nego što je planirano. Koliko je učenika šestog razreda bilo planirano da se upiše ?
- 42(94).** U razredu koji ima 25 đaka, bar 17 učenika govori engleski jezik, bar 17 govori francuski i bar 17 nemački jezik. Dokazati da bar jedan učenik govori sva tri jezika.
- 43(94).** Pola cigle košta koliko pola crepa i jedan dinar, a tri crepa koštaju kao dve cigle i jedan dinar. Koliko košta cigla, a koliko crep ?
- 44(94).** Neka su u trouglu  $ABC$  uglovi  $\hat{B}$  i  $\hat{C}$  oštri i neka je  $\hat{B} > \hat{C}$ . Dokazati da je ugao između visine i simetrale ugla iz temena  $A$  jednak  $\frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$ .
- 45(94).** Neka je  $M$  središte stranice  $BC$  trougla  $ABC$ . Dokazati da je  $AB + AC > 2AM$ .
- 46(95).** Jedna i po mačka, za tri i po dana, ulovi četiri i po miša. Koliko miševa će uloviti pet i po mačaka za 3 sedmice (21 dan) ?
- 47(95).** Odrediti sve dvocifrene brojeve koji imaju sledeću osobinu: taj broj i broj napisan istim ciframa u obrnutom redosledu su prosti.
- 48(95).** Gumena loptica koja slobodno pada svaki put odskoči od zemlje do visine za  $\frac{1}{4}$  manje od visine sa koje pada. Izračunati sa koje visine je puštena ta lopta, ako je u trećem odskoku dostigla visinu od 432 mm. Do koje visine će lopta odskočiti u petom odskoku ?
- 49(95).** U spoljašnjoj oblasti pravougaonika  $ABCD$ , konstruisani su jednakostranični trouglovi  $BCE$  i  $CFD$ . Dokazati da je i trougao  $AEF$  takođe jednakostranični.
- 50(95).** U oštrogglom trouglu  $ABC$  ( $BC > AC$ ) data je visina  $CE$ . Simetrala spoljašnjeg ugla  $C$  seče pravu  $AB$  u tački  $D$ , tako da je  $CD = 2 \times CE$ . Dokazati da je  $\hat{a} - \hat{b} = 60^\circ$ .
- 51(96).** Sa koliko nula se završava proizvod brojeva  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 98 \times 99 \times 100$  ?
- 52(96).** U sudu  $A$  se nalazi pomešano 9 l vina i 6 l vode, a u sudu  $B$  12 l vina i 6 l vode. Iz oba suda odlijemo po 7 l pomešane tečnosti i 7 l iz suda  $A$  prespemo u sud  $B$  i obrnuto 7 l iz suda  $B$  prespemo u sud  $A$ . Izračunati koliko će vina, a koliko vode biti posle toga u sudu  $A$ , a koliko u sudu  $B$ .
- 53(96).** Na hipotenuzi  $AB$  pravouglog trougla  $ABC$  date su tačke  $M$  i  $N$  tako da je  $AM = AC$  i  $BN = BC$ . Izračunati  $\hat{MCN}$ .

**54(96).** Visina  $CC'$  i težišna duž  $CM$  trougla  $ABC$ , dele  $\hat{D}$   $ACB$  na tri jednaka dela. Odrediti sve uglove datog trougla.

**55(96).** Tepih dimenzija  $4\text{m} \times 4\text{m}$  progrizli su moljci i napravili 15 rupa zanemarljive veličine. Može li se iseći komad tepiha dimenzije  $1\text{m} \times 1\text{m}$ , na kome nema rupa ?

**56(97).** Dragan prvoga dana pojede  $\frac{1}{5}$  bombona i još 3 bombone. Drugoga dana uzme  $\frac{1}{5}$  preostatka i još 5 bombona. Koliko je bilo bombona na početku, ako je trećeg dana Dragan pojeo preostalih 15 bombona ?

**57(97).** Odrediti sve moguće vrednosti cifara  $a$  i  $b$  tako da je proizvod brojeva  $13a$  i  $26b$  deljiv sa 15.

**58(97).** U jednakokrakom trouglu  $ABC$  ( $AC = BC$ ) prava  $p$  sadrži teme  $C$  i seče stranicu  $AB$  u tački  $M$ , tako da su trouglovi  $AMC$  i  $BMC$  takođe jednakokraki.

Odrediti uglove datog trougla  $ABC$ .

**59(97).** Dat je jednakostranični trougao  $ABC$  i tačka  $O$  koja je centar kruga opisanog oko trougla  $ABC$ . Na stranici  $AB$  data je tačka  $M$ , a na stranici  $AC$  tačka  $N$ , tako da je  $AM + AN = AB$ . Dokazati da je  $OM = ON$  i odrediti ugao  $\hat{D}$   $MON$ .

**60(97).** Grupa od 15 dečaka dobila je 100 klikera. Mogu li ih međusobno podeliti tako da svaki od njih dobije različit broj klikera?

## TEMA 11.

### ODABRANI ZADACI IZ MATEMATIČKOG LISTA → 344/96 - 18.03.2000

#### ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Na tabli su zapisani brojevi 1,2,3, ... 1995, 1996, 1997. Zatim su izbrisana dva proizvoljna broja, i umesto njih je upisan njihov zbir ili razlika. Postupak se ponavlja sve dok na tabli ne ostane samo jedan broj. Da li taj broj može biti nula ?
2. Dokazati da broj  $1995^{1997} + 2$  nije kvadrat prirodnog broja.
3. Na stolu se nalazi a) 1997 b) 1998 šibica. Dva dečaka uzimaju, po redu, jednu ili dve šibice, Pobeđuje onaj koji uzme poslednju šibicu. Ako se primeni optimalna strategija ko je pobednik? Kako je igrao pobednik ?
4. Može li zbir cifara kvadrata prirodnog broja biti 1995 ?
5. Neki prirodni broj smo udvostručili i zatim mu dodali jedinicu. Opisani postupak smo ponovili 100 puta. Može li dobijeni broj biti deljiv sa 1980 ?
6. Mogu li tri čoveka, ako imaju motocikl sa dva sedišta preći put od 60 km za 3 sata, ako je brzina pešaka 5 km/h, a brzina motocikla 50 km/h
7. Dokazati da ne postoji trocifren broj abc takav da je broj A definisan jednakošću  $A = abc + bca + cab$  potpun kvadrat.
8. Odrediti prost broj p ako su brojevi  $p+10$  i  $p+14$  takođe prosti brojevi.
9. Građani grada A govore samo istinu. Građani grada B samo lažu, a građani grada C naizmenično govore istinu i laž. Dežurni vatrogasac je telefonom primio poruku: "Kod nas je požar. Dođi- te odmah." "Gde" - pitao je dežurni. "U grad C", odgovorili su. Kuda je otišla vatrogasna ekipa ?
10. U temena nekoliko jednakostraničnih trouglova (jednakih stranica) zapisani su u proizvoljnom redu brojevi 1,2,3. Trouglovi su zatim složeni jedan na drugi tako da im se temena poklapaju. Mogu li se trouglovi poredatli tako da zbir brojeva zapisanih kod svakog temena bude: a) 1994 b) 1995 ?
11. Postoje li prirodni brojevi a, b, c, d, ... takvi da je  $a + b + c + d + \dots = a \cdot b \cdot c \cdot d = 1998$ .
12. Odrediti sve trocifrene brojeve koji su deljivi sa 11 i koji imaju zbir cifara 10.
13. U svakoj od tri kutije (I, II, III) nalazi se po jedna kuglica: bela, crna ili plava. Na prvoj kutiji piše "bela", na drugoj "crna", a na trećoj "bela ili plava". Međutim ni jedan od natpisa ne odgovara istini. Gde se koja kuglica nalazi ?
14. Proizvod mernog broja dužine broda (u metrima), broja godina kapetana (prirodan broj) i broja njegove dece iznosi 12543. Koliko godina ima kapetan, koliko on ima dece i kolika je dužina broda ?
15. U ribljaku se nalazi 1997 gladnih štika. Jedna štika, da bi se zasitila mora da pojede tri štuke (bilo kakve - gladne ili site). Koliko je najviše moguće da ostane štika u ribnjaku, a da sve štuke koje ostanu u ribljaku budu site ?
16. Odrediti sve razlomke koji su veći od  $2/3$  i manji od  $5/6$ , a imenilac ili brojilac im je broj 9.

#### KONKURSNI ZADACI

17. U razredu ima 20 dečaka, od kojih: 14 ima plave oči, 15 tamnu kosu, sedamnaest igra rukomet, a osamnaest su članovi matematičke sekcije. Dokazati da bar četvorica dečaka imaju sve četiri navedene osobine.
18. Odrediti oštre uglove pravouglog trougla ABC, sa pravim uglom kod temena C, ako simetrala pravog ugla i težišna duž iz temena C zaklapaju ugao koji je 5 puta manji od tupog ugla koji obrazuju simetrale oštarih uglova tog trougla.
19. Dragan i Milan imaju na raspolaganju četiri cifre: 6, 7, 8, 9. Oni treba da napišu osmocifreni broj pišući naizmenično po jednu cifru. Ako dobijeni osmocifreni broj nije deljiv sa 9 pobednik je prvi igrač, a ako jeste pobednik je drugi igrač. Kako treba da igra prvi ili drugi igrač da bi uvek pobedio, ako jedan igrač date cifre: a) sme ponavljati; b) ne sme ponavljati.

## TEMA 11.

### ODABRANI ZADACI IZ MATEMATIČKOG LISTA II

→ 344/96 - 15.05.2000

#### ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Ako se od 20 kg brašna dobije 25 kg hleba, koliko takvog brašna treba za 100 kg hleba?
2. Mleko sadrži 3,2% masnoće. Koliko masnoće ima u 500 kg mleka?
3. Data je kocka K zapremine V. Njena ivica je najpre smanjena za 30% tako da smo dobili kocku K1, a zatim je ivica nove kocke povećana za 30% i dobijena kocka K2. Izračunati V1 i V2 u funkciji od V.
4. U tri gajbe nalazi se 290 jabuka. Ako se iz jedne uzme 1/4 njenog sadržaja, iz druge 1/3, a iz treće 1/2 u svakoj gajbi će ostati jednak broj jabuka. Koliko je jabuka bilo na početku u svakoj gajbi?
5. Neka su  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  uglovi trougla ABC i neka je  $\alpha + \beta = 150^\circ$ . Ako ugao  $\alpha$  smanjimo za 10%, zbir uglova  $\alpha$  i  $\beta$  se smanji za 2%. Odrediti uglove trougla ABC.
6. Bazen se jednom slavinom puni za 6 sati, a drugom za 8 sati. Pun bazen se jednom odvodnom cevi prazni za 4 sata. Ako se istovremeno otvore obe slavine i odvodna cev, koji deo bazena će se napuniti za 2 sata? Za koliko sati bi se u tom slučaju napunio bazen?
7. Odrediti sve dvocifrene brojeve koji su deljivi sa svakom svojom cifrom.
8. Odrediti sve cele brojeve m i n, takve da je  $|m| + |n| = 5$  i  $m - n = 3$ .
9. Dat je skup  $M = \{ h : h \in \mathbb{Z}, -90 \leq h \leq 100 \}$ . Koliko elemenata ima skup M? Odrediti zbir elemenata skupa M.
10. Odrediti sve cele brojeve x za koje važi: a)  $x + |x| = 0$ ; b)  $|x - 5| < 8$ .
11. Ako je zbir tri uzastopna prirodna broja neparan, onda je njihov proizvod deljiv sa 24. Dokazati.
12. Odrediti najveći trocifren broj koji pri deljenju sa 43 daje ostatak jednak količniku.
13. Drvena kocka ivice 4 sm obojena je plavom bojom, a potom je isečena na kubne centimetre, tj. na jedinične kockice. Koliko od dobijenih kockica ima tri strane obojene plavom bojom, dve strane obojene plavom bojom, jednu stranu obojenu plavom bojom i nijednu stranu obojenu plavom bojom?
14. Sveže šljive sadrže 84% vode. Koliko se suvih šljiva može dobiti sušenjem 315 t svežih, ako suve šljive sadrže 58% vode?
15. U ravni su date tačke M, N i M1. Konstruisati kvadrat ABCD, tako da tačke M i N pripadaju stranici AB i da je tačka M1 simetrična tački M u odnosu na centar kvadrata.
16. Dat je broj 12345678901234567890...1234567890x, pri čemu se grupa cifara 1234567890 ponavlja 1999 puta. Odrediti nepoznatu cifru x, tako da je dobijeni broj deljiv sa 66.
17. Ako se u decimalnom broju x decimalni zarez pomeri za jedno mesto u levo dobije se broj koji je za 31,05 manji od x. Odrediti x.
18. Tri lica su podelila izvesnu sumu novca. Prvo lice je dobilo trećinu sume i još 72 dinara. Drugo lice je dobilo trećinu ostatka i još 72 dinara. Treće lice je dobilo trećinu ostatka i preostalih 72 dinara. Koliko novca je dobilo svako lice?
19. Dat je pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod temena C. Nad katetama AC i BC, sa spoljašnje strane konstruisani su jednakokrako pravougli trouglovi CAD i CBE sa pravim uglovima kod A i B. Dokazati da tačke C, D i E pripadaju jednoj pravoj.
20. Ako je r prost broj, onda je bar jedan od brojeva  $2r+1$  i  $4r+1$  složen. Dokazati.
21. Ako je r prost broj, onda je  $r^{1995}-1$  složen broj. Dokazati.
22. Brojevi 3, 5 i 7 su uzastopni neparni prosti brojevi. Postoji li još koja trojka uzastopnih neparnih prostih brojeva?
23. Za koje prirodne brojeve a i b jednačina  $|2 - |a - |x|| = b$  ima najveći broj rešenja, ako je  $a + b = 5$ .

24. Izračunati zbir  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1997 \cdot 1999}$ .

25. Dat je jednakokraki trougao ABC ( $AC = BC$ ). Na kraku BC data je tačka K, a na produžetku kraka AC preko temena A tačka M, tako da je  $BK = AM$ . Dokazati da duž KM polovi osnovicu AB nezavisno od veličine duži AM, odnosno BK.

### **KONKURSNI ZADACI**

26. Odrediti sve proste brojeve r za koje je  $r^r + 1999$  takođe prost broj.

27. U zapisu nekog broja pojavljuju se 1 jedinica, 2 dvojke, 3 trojke, 4 četvorke, ..., 9 devetki. Da li je taj broj deljiv sa 3? Da li je taj broj potpun kvadrat?

28. Zbir cifara dvocifrenog broja x i kvadrata zbira njegovih cifara jednak je datom dvocifrenom broju x. Odrediti

## TEMA 12.

### GEOMETRIJSKI DOKAZ – PODUDARNOST TROUGLOVA

→ 344/96 - 15.05.2000

#### ZADACI ZA UVEŽBAVANJE

1. Dokazati da su dva oštrogla trougla podudarna ako su im jednaki sledeći elementi trougla: a)  $a, c, h_c$ ; b)  $a, b, t_c$ .
2. Dat je  $\angle bAc$  i tačka  $S$  na simetrali ugla. Prava  $n$  sadrži tačku  $S$ , normalna je na  $AS$  i seče krake ugla u tačkama  $B$  i  $C$ . Dokazati da je  $AB = AC$ .
3. Ako je tačka  $M$  jednako udaljena od krakova  $\angle aOb$ , onda je prava  $OM$  simetrala  $\angle aOb$ . Dokazati.
4. Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla je simetrala osnovice i simetrala ugla pri vrhu jednakokrakog trougla. Dokazati.
5. Dokazati da su u jednakokrakom trouglu jednake težišne duži koje odgovaraju kracima trougla.
6. Dat je trougao  $ABC$ . Dokazati da su temena  $A$  i  $B$  jednako udaljena od težišne linije  $CC_1$ .
7. Visine  $AD$  i  $CE$  trougla  $ABC$  seku se u tački  $H$ . Izračunaj  $\angle ACB$ , ako je  $CH = AB$ .
8. U trouglu  $ABC$  je  $\angle ABC = 15^\circ$ ,  $\angle ACB = 30^\circ$ . Prava koja sadrži teme  $A$  i normalna je na stranicu  $AB$  seče stranicu  $BC$  u tački  $D$ . Dokazati da je  $BD = 2 \cdot AC$ .
9. Iz temena  $A$  trougla  $ABC$  konstruisane su normale na simetrale spoljašnjih uglova  $\beta$  i  $\gamma$ . Ove simetrale imaju sa pravom  $BC$  zajedničke tačke  $M$  i  $N$ . Dokazati da je duž  $MN$  jednaka obimu trougla  $ABC$ .
10. Na kraku  $BC$  jednakokrakog trougla  $ABC$  izabrana je proizvoljna tačka  $M$  ( $B-M-C$ ), a na produženom kraku  $AC$  tačka  $N$  ( $C-A-N$ ) tako da je  $AN = BM$ . Dokazati da središte duži  $MN$  pripada osnovici  $AB$ .
11. Simetrale oštarih uglova pravouglog trougla  $ABC$  seku naspramne katete  $BC$  i  $AC$  u tačkama  $D$  i  $E$ . Iz  $D$  i  $E$  konstruisane su normale  $DM$  i  $EN$  na hipotenuzu  $AB$ . Koliki je  $\angle MCN$ ?
12. Kroz bilo koju tačku  $P$  osnovice jednakokrakog trougla  $ABC$  konstruisana je normala  $n$  na osnovicu  $AB$ , koja seče krake  $AC$  i  $BC$  u tačkama  $M$  i  $N$ . Dokazati da je zbir  $PM + PN$  konstantan.
13. Na produžetku stranice  $AB$ , trougla  $ABC$ , iza  $B$  u odnosu na  $A$  data je tačka  $M$ , tako da je  $BM = BC$ . Dokazati da je prava  $MC$  paralelna simetrali ugla  $ABC$ .
14. U trouglu  $ABC$  simetrala ugla  $BAC$  seče stranicu  $BC$  u tački  $D$ . Na pravoj  $AC$  data je tačka  $E$ , takva da je  $\angle CDE = \angle BAC$ . Dokazati da je  $BD = DE$ .
15. Težišna duž koja odgovara hipotenuzi pravouglog trougla jednaka je polovini hipotenuze. Dokazati.
16. U trouglu  $ABC$  hipotenuza je dva puta duža od katete. Izračunati oštre uglove pravouglog trougla  $ABC$ .

#### ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA

17. U ugao  $xOy$  upisan je krug  $k$  koji krake datog ugla dodiruje u tačkama  $A$  i  $B$ . Dokazati da je  $OA = OB$ .
18. Na kracima  $AB$  i  $AC$  jednakokrakog trougla  $ABC$ , izabrane su tačke  $M$  i  $N$ , tako da  $MN$  nije paralelno sa  $BC$ . Kroz središte  $S$  duži  $MN$  konstruisana je prava  $s$ , paralelna sa  $BC$ , koja seče krake u tačkama  $K$  i  $L$ . Ako su  $P$  i  $Q$  podnožja normala iz  $M$  i  $N$  na  $s$  dokazati da je  $PQ = KL$ .
19. Dat je jednakokrani trougao  $ABC$ . Nad stranicama  $AB$  i  $BC$  konstruisani su u spoljašnjoj oblasti trougla kvadrati  $ABMN$  i  $BCPQ$ . Duži  $AQ$  i  $CM$  seku se u tački  $S$ . Dokazati da je  $AQ \perp CM$  i da je  $CQ = 2 AS$ .
20. Dat je jednakokraki trougao  $ABC$  ( $AC = BC$ ) i proizvoljna tačka  $M$  na osnovici  $AB$  datog trougla. Konstruisan je paralelogram  $MBCD$ . Dokazati da je  $\angle DAB = \angle AMC$ . Ako je presek duži  $MC$  i  $BD$  tačka  $N$ , a  $P$  središte stranice  $AB$ , onda je  $MN = PN$ . Dokazati. (R-1997)
21. Visina  $CC'$  i težišna duž  $CM$  trougla  $ABC$  dele  $\angle ACB$  na tri jednaka dela. Odrediti uglove datog trougla.

### **KONKURSNI ZADACI**

22. Visina koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla je sime trala ugla pri vrhu. Dokazati.
23. Dokazati da su dva oštrogla trougla podudarna ako su im jednaki elementi:  $a$ ,  $hb$  i  $hc$ .
24. Jedan ugao pravouglog trougla je  $30^\circ$ . Tačka  $M$  je središte hipotenuze  $AB$ , a  $N$  je tačka na stranici  $AC$  tako da je  $MN$  normalno na  $AB$ . Dokazati da je  $AC = 3 \cdot MN$ .

### **TEMA 13.**

## **ZNAČAJNE TAČKE TROUGLA** → **344/96 - 15.05.2000**

### **ZADACI ZA UVEŽBAVANJE**

1. Ako se dve značajne tačke trougla poklapaju onda je trougao jednakokraničan. Dokazati.
2. Dato je pet kolinearnih tačaka i još jedna tačka van te prave. Koliko kružnica određuju te tačke?
3. Dokazati da je centar upisanog kruga u trougao najbliži temenu najvećeg ugla trougla.
4. Dokazati da je težišna duž trougla: a) manja od poluobima trougla ; b) manja od poluzbira susednih stranica.
5. U trouglu  $ABC$ , simetrala  $AE$  ugla  $A$ , seče stranicu  $BC$  u tački  $E$ . Ako je  $AB > AC$ , onda je  $\angle BEA$  veći od  $\angle CEA$ . Dokazati.
6. Dve visine trougla nisu manje od odgovarajućih stranica. Izračunati uglove ovog trougla.
7. U ravni su date tačke  $A, B, C$  i  $D$  takve da je  $AB$  normalna na  $CD$  i  $AC$  normalna na  $BD$ . Dokazati da je  $AD$  normalna na  $BC$ .
8. U pravougloj trouglu  $ABC$ ,  $CD$  je visina (ugao  $ACB$  je prav). Tačka  $M$  je središte duži  $CD$  a tačka  $N$  središte duži  $BD$ . Dokazati da je prava  $AM$  normalna na  $CN$ .
9. Prave  $a$  i  $b$  seku se u tački  $Q$  koja je 'nedostižna' tačka. Ako je data tačka  $P$  odrediti pravu  $PQ$ .
10. U trouglu  $ABC$ ,  $AC > BC$ ,  $CD$  je simetrala  $\angle ACB$  i  $CM$  težišna duž. Dokazati da je  $CM > CD$ .
11. Na simetrali spoljašnjeg ugla kod temena  $C$  izabrana je proizvoljna tačka  $M$ . Dokazati da je  $MA + MB > AC + BC$ .
12. Izračunati uglove trougla  $ABC$ , ako se zna da visina i težišna linija iz temena  $C$  dele  $\angle ACB$  na tri jednaka dela.

13. Ugao  $\beta$  jednakokrakog trougla ABC ( $AC = BC$ ) je  $72^\circ$ . Na produžetku kraka AC izabrana je tačka D tako da je  $AD = AB$ . Dokazati da je i trougao CBD jednakokrak.
14. Tačka M pripada unutrašnjosti trougla ABC. Dokazati da je  $MA + MB < AC + BC$ . Dokazati da je  $MA + MB + MC$  veće od poluobima, a manje od obima trougla ABC.
15. Iz temena C trougla ABC konstruisane su normale na simetrale spoljašnjih uglova kod temena A i B. Normale presecaju pravu AB u tačkama M i N. Dokazati da je duž MN jednaka obimu datog trougla.

### **ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA**

16. Dokazati da je zbir težišnih duži trougla veći od njegovog poluobima. (O - 1998.)
17. Dat je pravougli trougao ABC, sa pravim uglom kod temena B. Kroz tačku A konstruisana je prava p paralelna sa BC i na pravoj p je izabrana tačka K, tako da su K i C sa raznih strana prave AB. Ako prava CK seče stranicu AB u tački M i ako je  $MK = 2AC$ , onda je  $\angle ACB = 3 \cdot \angle KCB$ . Dokazati. (R - 1998.)
18. U nejednakokrakom oštrogulom trouglu ABC iz temena A konstruisana je težišna duž, iz temena B konstruisana je simetrala ugla  $\beta$ , a iz temena C visina. Presečne tačke konstruisanih pravih su tačke P, Q i R. Dokazati da dobijeni trougao PQR nije jednakostranični. (S - 1998.)
19. Dat je kružnic poluprečnika  $r = 1$  i dve proizvoljne tačke A i B u ravni kružnice. Dokazati da na kružnici postoji tačka X, takva da je  $XA + XB \geq 2$ . (S - 1997.)
20. Dat je jednakostranični trougao ABC. Nad stranicama AB i BC konstruisani su u spoljašnjoj oblasti trougla kvadrati ABMN i BCPQ. Duži AQ i CM seku se u tački S. Dokazati da je  $AQ \perp CM$  i  $CQ = 2AS$ . (R - 1997.)
21. Dat je jednakostranični trougao ABC i tačka O koja je centar opisanog kružnica oko trougla. Na stranici AB data je tačka M, a na stranici AC tačka N, tako da je  $AM + AN = AB$ . Dokazati da je  $OM = ON$  i odrediti  $\angle MON$ . (O - 1997.)

### **KONKURSNI ZADACI**

22. Naći sve trouglove kojima je obim 10cm, a dužine stranica su u centimetrima izražene celim brojevima.
23. U jednakokrakom trouglu ABC tačka M je središte osnovice AB. Neka je MN normalna na BC (tačka N je na BC) i S središte duži MN. Dokazati da je CS normalno na AN!
24. Na kružnici K dato je 5 tačaka i date su 4 tačke van kružnice K, koje ne pripadaju sve jednoj kružnici. Koliko kružnica odredjuju ovih 9 tačaka?
25. Kroz centar upisanog kružnica trougla ABC konstruisana je prava p paralelna sa AB. Prava p seče stranice AC i BC redom u tačkama M i N. Dokazati da je  $AM + BN = MN$ .

## **TEMA 14.**

### **KONSTRUKTIVNI ZADACI**

→ **344/96 - 21.05.2000.**

### **ZADACI ZA UVEŽBAVANJE**

1. Konstruisati trougao ABC ako su dati elementi:
- $AB = c, AC = b$  i  $\angle BAC = 60^\circ$
  - $AB = c, \angle BAC = 30^\circ, \angle ABC = 75^\circ$
  - $a + b + c = O, \angle BAC = 30^\circ$  i  $\angle ABC = 45^\circ$
  - $\angle BAC = 75^\circ, \angle ABC = 45^\circ, b + c = 7$  cm
  - $\angle BAC = 60^\circ, b + c = 6$  cm,  $a = 4$  cm
  - $b + c = s, h_c, \angle BAC = \alpha$ .
2. Konstruisati pravougli trougao ABC ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) ako su dati sledeći elementi:
- $AB = c$  i  $\angle BAC = \alpha$ .
  - $a + b = 6$  cm i  $\angle BAC = 60^\circ$

- c)  $a + c = 5 \text{ cm}$  i  $\angle BAC = 30^\circ$   
d)  $t_c$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

3. Konstruisati jednakokraki trougao ABC ( $AC = BC$ ) ako su dati sledeći elementi:

- a)  $AB = c$  i  $\angle ACB = \gamma$   
b)  $a + b = 8 \text{ cm}$  i  $\angle ABC = 30^\circ$   
c)  $b - a = d$  i  $\angle BAC = \alpha$  ( $b > a$ )  
d)  $a + b + c = O$  i  $\angle ACB = \gamma$

4. Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi:

- a)  $AB = c$ ,  $\angle CAB = 60^\circ$ ,  $\angle BCA = 45^\circ$   
b)  $a + b + c = 14 \text{ cm}$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 45^\circ$   
c)  $a$ ,  $b$ ,  $t_b$

5. Konstruisati pravougli trougao ABC ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) ako su dati elementi:

- a)  $a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .  
b)  $a$ ,  $h_c$

6. Konstruisati jednakokraki trougao ABC ( $AC = BC$ ) ako je dato  $AB = a$  i  $\angle BAC = \alpha$ .

### **ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA**

7. Date su tri različite, proizvoljne tačke A, B i C. Konstruisati tačku M tako da dobijeni skup tačaka  $\{A, B, C, M\}$  ima osobinu da sadrži dva para centralno simetričnih tačaka. Ispitati sve moguće slučajeve.

8. U ravni su date prave  $s_\alpha$  i  $s_\beta$  koje se seku i van njih tačka C. Konstruisati trougao ABC, ako su date prave  $s_\alpha$  i  $s_\beta$  redom simetrale  $\angle BAC$  i  $\angle ABC$ , a data tačka C teme traženog trougla ABC. (R – 1997.)

9. Konstruisati pravougli trougao ABC (sa pravim uglom kod temena C) ako su date težišne duži  $t_a = 4,5 \text{ cm}$  i  $t_c = 3 \text{ cm}$ . (M – 1997.)

10. Konstruisati trougao ABC, ako su dati sledeći njegovi elementi: stranica  $AC = b = 4 \text{ cm}$ , visima  $CC' = h_c = 3 \text{ cm}$  i težišna duž  $AM = t_a = 5 \text{ cm}$ . (M – 1996.)

### **KONKURSNI ZADACI**

11. Konstruisati trougao ABC ako su mu dati elementi:

- a)  $a + c$ ,  $b$ ,  
b)  $a + b$ ,  $h_b$ ,  
c)  $h_c$ ,  $t_c$ ,  $\angle BAC$

12. Konstruisati pravougli trougao ABC ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) ako su mu dati elementi:

- a)  $a + c = 10$ ,  $\angle BAC = 75^\circ$   
b)  $b - a$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .  
c)  $c - a = 4$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$

13. Konstruisati jednakokraki trougao ABC ( $AC = BC$ ) ako su dati elementi:

- a)  $AB = a$  i  $AC = b$  ( $a > b$ )  
b)  $a + b + c = 10$ ,  $\angle BAC = 45^\circ$ .

## **TEMA 15.**

### **KONSTRUKTIVNI ZADACI (II DEO)**

→ 344/96 - 21.05.2000

### **ZADACI ZA UVEŽBAVANJE**

1. Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi:

- a)  $b = 4 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$ ,  $s_\alpha = 3,5 \text{ cm}$

- b)  $b = 3,5 \text{ cm}$ ,  $h_a = 3 \text{ cm}$ ,  $s_\gamma = 3,5 \text{ cm}$
- c)  $a = 5 \text{ cm}$ ,  $h_c = 3,5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 60^\circ$
- d)  $\alpha = 45^\circ$ ,  $h_b = 3 \text{ cm}$ ,  $t_c = 4 \text{ cm}$
- e)  $a$ ,  $b$ ,  $t_c$

2. Date su nekolinearne tačke D, E i F. Konstruisati trougao ABC, ako je D podnožje visine AD, E središte stranice AB i F središte stranice AC.
3. Kroz temena datog trougla ABC konstruisati tri paralelene prave koje su međusobno podjednako udaljene.
4. Konstruisati trougao ABC ako je dato:
  - a)  $c = 4,5 \text{ cm}$ ,  $s_\beta = 4,5 \text{ cm}$ ,  $\gamma = 45^\circ$
  - b)  $c$ ,  $t_a$ ,  $t_c$
  - c)  $c$ ,  $t_c$ ,  $h_a$
5. Konstruisati jednakostranični trougao ABC ako su dati elementi:
  - a)  $a + h$  ;
  - b)  $a - h$
6. Konstruisati trougao ABC, ako su dati sledeći elementi:  $h_a$ ,  $s_\alpha$  i  $t_a$ .

### **ZADACI SA MATEMATIČKIH TAKMIČENJA**

7. Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi: visina  $CC' = h_c = 3 \text{ cm}$ , težišna duž  $CC_1 = t_c = 4 \text{ cm}$  i poluprečnik kruga opisanog oko trougla  $R = 3 \text{ cm}$ . (1988)
8. Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi:  $\angle BAC = 60^\circ$ , visina  $CC' = h_c = 3 \text{ cm}$  i visina  $BB' = 4 \text{ cm}$ . (1989)
9. Konstruisati trougao ABC ako su dati sledeći elementi:  $\angle BAC = 60^\circ$ , visina  $CC' = h_c = 3 \text{ cm}$  i zbir stranica  $AB + BC = c + a = 8 \text{ cm}$ . (1990.)
10. Date su tri nekolinearne tačke  $A_1$ ,  $B_1$  i  $C'$ . Konstruisati trougao ABC, ako su  $A_1$ ,  $B_1$  i središta stranica BC i AC i ako je  $C'$  podnožje visine  $h_c$ . (1991.)

### **KONKURSNI ZADACI**

11. Konstruisati trougao ABC, ako su dati sledeći elementi:  $a-b$ ,  $c$ ,  $\alpha - \beta = 60^\circ$ .
12. Konstruisati trougao ABC, ako su dati sledeći elementi:  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $t_c$
13. Dat je trougao ABC. Konstruisati pravu p paralelnu sa AB, koja seče stranicu AC u tački M i stranicu BC u tački N tako da je  $MN = AM + BN$ .