ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Материјали за младе математичаре, св. 31

Републичка комисија за математичка
такмичења ученика основних школа

1000 ЗАДАТАКА

СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 1992–2001. године

Пето измењено издање

Б Е О Г Р А Д
2002

Аутори: *мр Војислав Андрић, Оливера Ђорђевић,
др Мирјана Ђорић, Милан Јовановић, Мирјана Јовчић,
Вера Јоцковић, Љубица Киселички,
др Драгослав Љубић, Љубинка Петковић,
др Бранислав Поповић, мр Владимир Стојановић,
мр Драгана Тодоровић, др Нинослав Ћирић*

1000 ЗАДАТАКА
са математичких такмичења ученика основних школа
1992–2001. године
Пето измењено издање

Материјали за младе математичаре, свеска 31

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV

За издавача: *др Раде Дорословачки*

Рецензенти: *др Зоран Каделбург, др Павле Младеновић*

Уредник: *др Владимир Јанковић*

Цртежи: *Ива Стојановић, др Мирјана Ђорић*

Ранија издања: 1996, 1997, 1998, 1999.

ISBN 86–81453–40–8

Тираж: 3000 примерака

Штампа: „ВЕДЕС“, Београд

ПРЕДГОВОР ПРВОМ ИЗДАЊУ

Ове године навршава се тачно 30 година од како је у Србији одржано прво Републичко такмичење ученика основних школа из математике. Поводом овог значајног јубилеја Друштво математичара Србије, као организатор математичких такмичења и покретач активности у области унапређивања рада са младим математичарима у Србији, приредило је збирку — 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа.

Дакле, пред корисницима редова који следе налази се тачно 1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа у времену од 1986. до 1995. године. Збирка садржи задатке из наведеног периода са свих ступњева такмичења, почев од школског и општинског нивоа, преко окружног, па све до републичког и савезног такмичења.

Збирка је редакторско дело чланова Републичке комисије за младе математичаре из основних школа Републике Србије. Садржај збирке најбоље говори о настојањима комисије да прошири и унапреди тематику математичких такмичења ученика основних школа. Задаци у збирци су углавном познати у математичкој литератури, али је не мали број задатака оригиналан и представља лични допринос чланова Комисије подизању квалитета наших такмичења.

Редактори се искрено надају да ће збирка бити још једна карика у ланцу корисне математичке литературе за ученике основних школа и да ће значајно допринети поспешивању интересовања ученика за математику уопште, а посебно за математичка такмичења.

Истовремено желимо да се захвалимо на плодној сарадњи колегама Мирославу Марићу, Бори Бајићу, Радмили Божић, Љубомиру Вуковићу, Љубици Киселички, Славољубу Милосављевићу, Драгољубу Милошевићу, Божидару Остојићу, Борки Пешић и другима, који су својим предлозима задатака и радом у Републичкој комисији знатно допринели да ова збирка буде богатија, а систем рада са математичким талентима у Србији квалитетнији.

Београд, маја 1996. год. *Војислав Андрић*

ПРЕДГОВОР ПЕТОМ ИЗДАЊУ

У овом издању збирка садржи све задатке са такмичења од 1992. до 2001. године, укључујући оне са првих пет Јуниорских балканских математичких олимпијада, које су одржане у Београду, Атини, Софији, Охриду и на Кипру.

Београд, новембра 2001. год.

САДРЖАЈ

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

372.851(075.2)(079.1)

АНДРИЋ, Војислав
1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа / мр Војислав Андрић, Оливера Ђорђевић, др Мирјана Ђорић, Милан Јовановић, Мирјана Јовчић, Вера Јоцковић, Љубица Киселички, др Драгослав Љубић, Љубинка Петковић, др Бранислав Поповић, мр Владимир Стојановић, мр Драгана Тодоровић, др Нинослав Ћирић. – [5. изд.]. – Београд : Друштво математичара Србије, 2002. (Београд : ВЕДЕС). – 302 стр. ; 24 cm

Тираж 3000.
ISBN 86–81453–40-8

ИД = 79011340

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1992.

IV разред

1. Пуж се пење на дрво високо 15 m. Дању се попне за 3 m, а ноћу спусти за 2 m. Ког ће дана стићи на врх дрвета?

2. Колико има троцифрених бројева који имају исто значење било да се читају здесна налево, било слева надесно?

3. Нацртај квадрат странице 3 cm и све четири његове осе симетрије. Колико дужи уочаваш на слици?

4. Ако Милан купи четири свеске, остаје му 9 динара, а за пет свезака недостаје му 9 динара. Колико динара има Милан?

5. Отац има четири пута више година од сина и ћерке заједно, а кроз 24 године ће имати исто као и они заједно. Колико година сада има отац?

V разред

6. Одреди све просте троцифрене бројеве којима је производ цифара 70.

7. Попуни празна поља у квадрату тако да се добије „магични" квадрат, тј. тако да збирови бројева у свим редовима, колонама и дијагоналама буду једнаки.

$\frac{1}{6}$		
	$\frac{5}{12}$	
	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$

8. На правој p дате су редом тачке M, N, P и Q. Одреди $(MN \cup NP) \setminus (PQ \setminus MP)$.

9. Да ли се звездице у броју $1 * 5 * 4 * 7$ могу заменити истом цифром тако да добијени број буде дељив са 3? Одговор образложи не проверавајући све могућности.

10. Углови α и β су суплементни, а углови β и γ комплементни. Одредити углове α, β и γ ако је угао α пет пута већи од угла γ.

VI разред

11. Која два природна броја имају производ 1350 и заједнички делилац 15?

12. Нека је S центар круга уписаног у правоугли троугао ABC са правим углом код темена A. Израчунати углове троугла ако је разлика углова $\measuredangle ASB$ и $\measuredangle ASC$ једнака 30°.

13. Када се четвртина једна суме сабере са трећином друге, која је 20 динара већа од прве, добија се сума за 280 динара већа од половине треће суме, која је за 50 динара мања од прве суме. Одреди све три суме.

14. На прослави рођендана окупило се деветоро деце. Да ли је могуће да свако од њих познаје од раније тачно троје деце?

15. Подели троугао ABC на три дела тако да се од њих може саставити правоугаоник.

VII разред

16. Умањилац чини $\frac{8}{13}$ умањеника. Колико процената умањиоца чини разлика?

17. Шта је веће: 31^{13} или 65^{11}?

18. Број дијагонала многоугла је 8 пута већи од броја страница. Колики је збир унутрашњих углова тог многоугла?

19. У неком месецу три суботе су пале на паран датум. Који је дан у недељи био 25. дан тог месеца?

20. У правоугли троугао чије су катете 21 cm и 28 cm упиши квадрат чије су две странице на катетама, а четврто теме на хипотенузи. Израчунај одсечке на које теме квадрата дели хипотенузу.

VIII разред

21. Међу n датих тачака не постоје 4 које припадају једној равни. Ако је број равни који оне одређују 35 пута већи од броја тачака, одредити колико правих одређују ове тачке.

22. Доказати да је разлика квадрата било која два непарна броја дељива са 8.

23. Решити једначину $|2x-1| + 2x = 3$.

24. Одредити разломак једнак периодичном развоју 0,818181... .

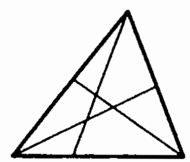
25. Око једнакокраког трапеза чије су основице 24 cm и 10 cm, а висина једнака средњој линији, описан је круг. Одреди колико процената површине круга заузима трапез.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1992.

IV разред

26. Обим правоугаоника је 72 cm. једна страница је 2 пута краћа од друге странице правоугаоника. Израчунати површину четвороугла чија темена су средишта страница овог правоугаоника.

27. Колико дужи и колико троуглова има на следећем цртежу?



Слика уз задатак 27

2	16	6

Слика уз задатак 29

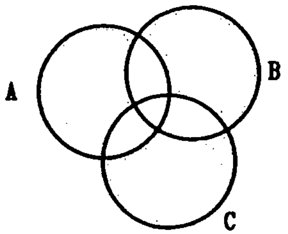
28. Сабирањем по два од три непозната броја добијају се збирови 156, 162, 170. Одреди непознате бројеве.

29. Попуни празна поља бројевима 0, 4, 8, 10, 12 и 14 у квадрату на слици тако да се добије „магични“ квадрат, тј. тако да збирови бројева у свим редовима, колонама и дијагоналама буду једнаки.

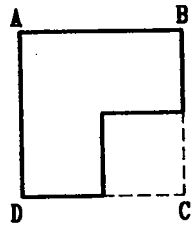
30. Две јабуке имају заједно 100 g. Већа јабука и тег од 20 g у равнотежи су са мањом јабуком и тегом од 50 g. Колико је тешка свака јабука?

V разред

31. Представи осенчени скуп на следећем цртежу примењујући операције $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ на скуповима A, B и C.



Слика уз задатак 31



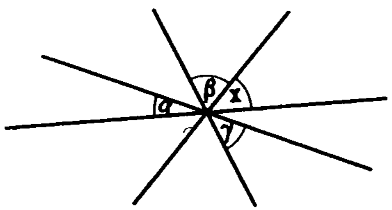
Слика уз задатак 34

32. Суд и вода у њему су укупно тешки 1 kg. Ако се одлије $\frac{2}{7}$ течности, укупна тежина се смањи за $\frac{1}{4}$ kg. Израчунати тежину суда.

33. Наћи све просте бројеве p који задовољавају неједначину $\frac{3}{16} < \frac{5}{p} < \frac{2}{7}$.

34. Из квадрата $ABCD$ је исечена његова четвртина (види цртеж). Подели преосталу фигуру на четири подударна дела.

35. Ако је на следећем цртежу $\alpha = 23°15'$, $\beta = 66°45'$, $\gamma = 43°30'$, израчунати угао x.



Слика уз задатак 35

VI разред

36. Ако је O центар описаног круга око оштроуглог троугла ABC, доказати да је $\measuredangle BOC = 2\measuredangle A$.

37. На општинском такмичењу је учествовало 18 ученика. За пласман у следећи ступањ такмичења било је потребно да се реше 3 од постављених 5 задатака. Ако су ови ученици решили укупно 45 задатака, доказати да се најмање 3 ученика пласирало.

38. Нека је ABC једнакокраки троугао са основицом BC и N произвољна тачка на његовој основици. Нека је права n нормална на правој BC у тачки N и нека сече праве AB и AC у тачкама D и E. Доказати да је троугао ADE једнакокрак.

39. Наћи најмањи природан број који помножен са 540 даје куб природног броја.

40. Одредити бројеве A, B и C ако су збирови $A+B$, $B+C$ и $C+A$ редом једнаки бројевима $\frac{5}{6}$, $1\frac{7}{10}$, $5\frac{8}{15}$.

VII разред

41. Наћи највећи петоцифрен парни број чије прве три цифре образују тачан квадрат, а последње три цифре образују тачан куб природног броја.

42. Угао између кракова трапеза је прав. Доказати да је збир квадрата дијагонала једнак збиру квадрата основица.

43. Који број је већи: $2+\sqrt{2}$ или $6-\sqrt{6}$?

44. Докажи да је број $43^{1995} - 37^{1993}$ дељив бројем 5.

45. Симетрала унутрашњег угла троугла дели наспрамну страницу на два одсечка. Доказати да је сваки од њих мањи од суседне странице.

VIII разред

46. Бочне стране праве тростране призме имају површине $26\,\mathrm{cm}^2$, $28\,\mathrm{cm}^2$ и $30\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати запремину призме ако основа има површину $21\,\mathrm{cm}^2$.

47. Мајстор ради неки посао два пута брже од свог помоћника. Ако су заједно посао завршили за 4 h, колико је свакоме од њих потребно времена за тај посао?

48. Квадрат природног броја завршава се цифром 5. Да ли је његова трећа цифра здесна парна или непарна?

49. Кругови k_1 и k_2 са центрима S_1 и S_2 секу се у тачкама A и B. Нека права кроз тачку B сече k_1 у тачки C, а k_2 у тачки D. Доказати да је $\measuredangle CAS_1 = \measuredangle DAS_2$.

50. Решити једначину $|1-|x||=2$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1992.

IV разред

51. Дешифровати сабирање

$$\begin{array}{r} AAA \\ BB \\ +\quad CC \\ \hline CDAB \end{array}$$

52. Ако броју избришемо последњу цифру 0, онда се он смањи за 27405. Који је то број?

53. Како бисте помоћу једне канте од 41 и једне канте од 91 донели са чесме тачно 61 воде?

54. Дат је правоугаоник $ABCD$ са страницама $AB = 5\,\text{cm}$ и $BC = 4\,\text{cm}$. Тачка M припада страници AB, а тачка N страници CD. Ако је обим четвороугла $AMND$ једнак обиму четвороугла $MBCN$ и износи $14\,\text{cm}$, нађи дужину дужи MN.

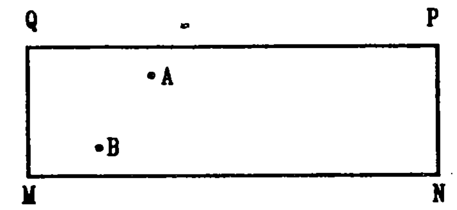
55. Коцка ивице $4\,\text{dm}$ је обојенна црвеном бојом, а потом исечена на коцкице ивице $1\,\text{dm}$. Колико је добијено коцкица које имају обојене: а) три стране; б) две стране; в) једну страну; г) ниједну страну?

V разред

56. Колико има природних бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 3 ни са 5?

57. Бројеве 1, 2, ..., 32 подели у четири групе од по 8 бројева тако да збирови бројева у овим групама буду једнаки.

58. На правоугаоном билијарском столу $MNPQ$ налазе се кугле у тачкама A и B. Кугла ударена у тачки A одбија се од ивице PQ у тачки X, потом од ивице QM у тачки Y, и погађа куглу у тачки B. Одреди тачке X и Y ако знаш да се кугла одбија од ивице тако да долазна и одлазна путања образују једнаке углове према тој ивици. Одговор образложи.



Слика уз задатак 58

59. Дато је 5 различитих тачака у равни које не припадају једној правој. За сваки од различитих положаја датих тачака израчунај број правих које оне одређују.

60. Влада, Нада и Јагода су имали 2450 динара. Када је Влада потрошио $\frac{1}{3}$ свог дела, Нада $\frac{1}{4}$ свог дела и Јагода $\frac{1}{5}$ свог дела, остале су им једнаке суме новца. Колико је свако од њих имао новца?

VI разред

61. Са колико нула се завршава производ првих 150 природних бројева?

62. Старији брат од куће до школе пешачи 30 минута, а млађи 40 минута. После колико минута ће старији брат стићи млађег ако је млађи пошао 5 минута раније?

63. Да ли се од 100 произвољних целих бројева увек може изабрати 15 бројева таквих да је разлика свака два броја од тих 15 дељива бројем 7?

64. Докажи да је теме највећег унутрашњег угла троугла најближе центру уписаног круга.

65. Дата је страница правоугаоника $b = 10\,\mathrm{cm}$ и збир друге странице и дијагонале $a + d = 15\,\mathrm{cm}$. Конструиши тај правоугаоник.

VII разред

66. Доказати да је број $n(n^2+2)$ дељив са 3 за свако $n \in \mathbf{N}$.

67. Збир четири броја је 396. Ако се првом броју дода 5, другом одузме 5, трећи помножи са 5, а четврти подели са 5, добијају се четири једнака броја. Који су то бројеви?

68. Колико на шаховској табли (квадратној мрежи 8×8) има правоугаоника? Колико је међу њима квадрата?

69. Израчунај површину правоуглог троугла чији је угао $\alpha = 22°30'$, а хипотенуза $c = 2\,\mathrm{cm}$.

70. Доказати да средишта страница и подножје било које висине разностраног троугла представљају темена једнакокраког трапеза.

VIII разред

71. Докажи да је број $2 + 2^2 + \cdots + 2^{1991} + 2^{1992}$ дељив са 30.

72. Реши једначину $x^2 - 1992 = y^2$ у скупу природних бројева.

73. Шта представља скуп свих тачака (x, y) у равни xOy, таквих да је $x + |x| = y + |y|$?

74. Син се налази 60 својих корака испред оца који га сустиже. Док син направи 9 корака, дотле отац направи 6 корака, али су 4 корака оца једнака са 7 корака сина. Колико корака треба да направи отац да би достигао сина?

75. Једно теме коцке и центри трију страна којима је то теме заједничко, темена су тростране пирамиде. Одредити запремину те пирамиде ако је ивица коцке a.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1992.

VI разред

76. Одреди бројеве a и b ако је $a + b = a \cdot b = \dfrac{a}{b}$.

77. Бројеви од 1 до 1000 закључно исписани су редом по кружници. Почевши од 1 прецртавамо сваки петнаести број $(1, 16, 31, 46, \dots)$, при чему при поновним обиласцима кружнице већ прецртане бројеве поново урачунавамо. Колико ће бројева остати непрецртано?

78. Цена злата на берзи свако пре подне порасте за 10%, а свако поподне опадне за 10%. Да ли ће после 50 дана рада берзе цена злата бити већа, мања, или једнака половини првобитне цене?

79. Конструисати троугао ABC коме је висина $AA' = 4\,\mathrm{cm}$, тежишна линија $AA_1 = 6\,\mathrm{cm}$ и тежишна линија $BB_1 = 9\,\mathrm{cm}$.

80. У троуглу ABC су углови код темена A и B редом једнаки $\alpha = 30°$ и $\beta = 15°$. Ако је D тачка странице AB таква да је $\angle BCD = 90°$, доказати да је $BD = 2\,AC$.

VII разред

81. Да ли је за неки природан број n број $n^3 - n + 2^n$ дељив са 1992? Одговор образложити.

82. Доказати да се сваки природан број већи од 7 може представити као збир једног природног броја дељивог са 3 и једног природног броја дељивог са 5.

83. Сакупило се 26 људи од којих сваки познаје бар 13 присутних. Доказати да се међу њима могу изабрати 4 човека и разместити око округлог стола тако да сваки седи између својих познаника.

84. На кружници су у смеру казаљке на сату дате тачке A, B, C, D, E и F, тако да је $\angle ADF = \angle BEC$. Доказати да је $AB \parallel CF$.

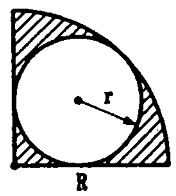
85. Конструисати правоугли троугао ABC када се знају хипотенуза AB и тежишна линија BB_1.

VIII разред

86. У једној чаши направљен је сок од воде и сирупа у размери $2:1$, а у другој у размери $3:2$. Сок из обе чаше је пресут у празан суд при чему је добијена размера воде и сирупа $27:17$. Колики је био однос количина сока у чашама?

87. Одредити природне бројеве a и b, $a > b$, за које је збир бројева $a+b$, $a-b$, $a\cdot b$ и $\frac{a}{b}$ једнак 245.

88. Правоугаоник страница 9 cm и 16 cm разрезати на два дела од којих се може саставити квадрат.



Слика уз задатак 89

89. У правоугли исечак полупречника R уписан је круг полупречника r (види слику). Изрази површину осенченог дела фигуре у зависности од R.

90. У базен облика квадра базе $1{,}5\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ и дубине $2\,\mathrm{m}$ насуто је $4{,}5\,\mathrm{m}^2$ воде.

а) За колико се подигне ниво воде ако у њега спустимо металну коцку ивице $1\,\mathrm{m}$?

б) За колико се поново подигне ниво воде ако се на дно базена спусте још две такве коцке?

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1992.

VII разред

91. Одредити бројеве a, b, c, d који испуњавају следеће услове:

$$a:b=2:3,\quad a:d=3:5,\quad b:c=6:5,\quad 2d-a-c=26.$$

92. Дужине страница правоугаоника су изражене природним бројевима. Одредити те дужине ако је мерни број површине правоугаоника једнак мерном броју његовог обима.

93. Свака дијагонала конвексног четвороугла $ABCD$ дели његову површину на два једнака дела. Доказати да је тај четвороугао паралелограм.

94. Нека је X произвољна тачка дужи $AB = d$. Нека су C и D тачке са разних страна праве AB такве да су троуглови AXD и XBC једнакостранични. Доказати да је четвороугао $ACBD$ једнакокраки трапез и одредити његову површину у зависности од d.

95. Два трговца јужним воћем врше размену. Први је другом за 16 кивија дао онолико комада лимуна колико је кивија добио за три туцета лимунова. Колико ће комада кивија други трговац дати првом за туце (= 12 комада) лимунова?

VIII разред

96. Решити по x једначину:

$$\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1.$$

Бројеви a, b, c, $a+b+c$ су различити од нуле.

97. Нека се кругови k_1 и k_2 са центрима S_1 и S_2 секу у тачкама A и B. Права p кроз тачку A сече круг k_1 у тачки M_1 и круг k_2 у тачки M_2. Доказати да је $M_1M_2 \leqslant 2\cdot S_1S_2$. У ком је случају $M_1M_2 = 2\cdot S_1S_2$?

98. Око полулопте полупречника r је описана права купа висине H, тако да су основе полулопте и купе концентрични кругови. Израчунати запремину купе.

99. Квадрат величине $10\,\mathrm{dm}^2$ поплочај са 10 квадратних плочица површине по $1\,\mathrm{dm}^2$. Дозвољено је неке од плочица једним правим резом поделити на два дела.

100. Места A и B повезује праволинијска пруга дужине 300 km. Из места A ка месту B полази воз V_A брзином $v_1 = 40\,\mathrm{km/h}$. Истовремено из места B ка месту A полази воз V_B брзином $v_2 = 80\,\mathrm{km/h}$. У тренутку поласка возова, из места A ка возу V_B полеће ласта. Кад стигне до воза V_B, ласта лети назад ка возу V_A све док га не сусретне, па поново лети ка возу V_B, итд.
Ако ласта на овај начин лети између возова V_A и V_B брзином $120\,\mathrm{km/h}$, колико ће километара она прелетети до сусрета V_A и V_B?

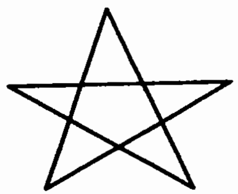
ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1993.

IV разред

101. Обим правоугаоника је 14 cm, а странице су му природни бројеви. Колико правоугаоника има ову особину и који од њих има највећу површину?

102. Аца је дао половину свог новца Мићи, а затим је Мића дао Аци трећину суме коју је у том тренутку имао. Ако су на крају обојица имали по 80 динара, колико је новца имао сваки од њих на почетку?

103. Редом су исписани бројеви 12345678910111213.... Која цифра се налази на 1993. месту?



Слика уз задатак 105

104. Производ два броја је 2250. Ако се један број умањи за 6, а други остане исти, нови производ је 1800. Који су то бројеви?

105. Одреди број дужи и број троуглова на слици.

V разред

106. Написати све скупове X за које је $\{a,b,c,d\} \cup X = \{a,b,c,d\}$.

107. Збир два броја је 24. Дељењем већег броја мањим добија се количник 3 и остатак 4. Нађи те бројеве.

108. Којом цифром се завршава производ 1993 седмице?

109. У броју $x = \overline{a1993b}$ одреди цифре a и b тако да шестоцифрени број x буде дељив са 45.

110. Праве a и b се секу и образују четири угла: два оштра α и γ и два тупа β и δ. Одредити те углове ако је $7 \cdot (\alpha+\gamma) = 5 \cdot (\beta+\delta)$.

VI разред

111. Колико има природних бројева који су мањи од 3000 и код којих је производ цифара једнак 210?

112. Запиши скуп целих бројева x који задовољавају неједначину $\frac{1}{3} < \frac{1-x}{5} < \frac{11}{12}$.

113. Реши једначину $\left|x - \frac{1}{2}\right| = 2\frac{1}{5}$.

114. Права p садржи теме правог угла правоуглог троугла и полови угао између тежишне линије и висине повучених на хипотенузу. Израчунати углове које права p образује са катетама.

115. У троуглу ABC тачка D припада страници AB. Ако је $AC = CD$ и $\measuredangle A - \measuredangle B = 37^\circ$, израчунати $\measuredangle BCD$.

VII разред

116. Дат је квадрат $ABCD$. Конструиши квадрат три пута веће површине.

117. Једна страница правоугаоника смањи се за 20%, а друга повећа за 20%. За колико процената се при томе променила површина правоугаоника?

118. Доказати да је троугао чије су странице $2mn$, m^2-n^2 и m^2+n^2 правоугли ($m > n$, $m, n > 0$).

119. На првенству школе у шаху учествовало је 8 ученика, при чему сваки ученик са сваким учеником игра по једну партију. Докажи да у сваком тренутку такмичења постоје бар два ученика са једнаким бројем до тада одиграних партија.

120. Ја сада имам четири пута више година него што је имала моја сестра када је била два пута млађа од мене. Колико година имам ја, а колико моја сестра, ако ћемо кроз 6 година имати заједно 75 година?

VIII разред

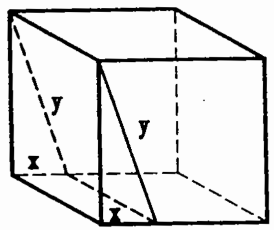
121. Нека су на мимоилазним правим p и q дате тачке $A, B, C \in p$ и $D, E \in q$. Колико равни одређују тачке A, B, C, D, E, F ако тачка F не припада ниједној од правих одређених тачкама A, B, C, D, E?

122. Реши неједначину $\dfrac{2-x}{x-1} > \dfrac{2}{3}$.

123. Кругови k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2 додирују се споља у тачки B. Сечица кроз тачку B сече кругове k_1 и k_2 редом у тачкама A и C. Доказати да су тангенте ових кругова у тачкама A и C паралелне.

124. Докажи да је израз $8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2}$ дељив са 584 ($n \in \mathbf{N}$).

125. Од коцке чија је ивица 10 cm одрезана је једна њена трећина, као што је приказано на слици. Израчунај дужине x и y.



Слика уз задатак 125

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1993.

IV разред

126. Попуни празна поља табеле тако да сума бројева у свака три суседна поља по хоризонтали и вертикали буде 12.

	5						
					1		
6							
			2				

127. У једној школи на два дечака долазе три девојчице, а на десет дечака један наставник. Колико је у школи дечака, девојчица и наставника, ако је укупно ученика и наставника 312?

128. Колико прабаба имају заједно све твоје прабабе?

129. Допуни магични квадрат

		20
21		
14	19	

130. Напиши све четвороцифрене бројеве којима је збир цифара три.

V разред

131. Напиши пет рационалних бројева већих од $\dfrac{3}{4}$, а мањих од $\dfrac{4}{5}$.

132. У парку су се сусрела три друга: професор Белић, писац Црнковић и лекар Жутић. „Занимљиво, један од нас је црнокос, други има белу, а трећи жуту косу, али ниједан од нас нема боју косе на коју указује његово презиме“ – рече црнокоси. „У праву си“ – сложи се Белић. Коју боју косе има свако од њих?

133. Одреди број који подељен са 143 даје остатак 132, а подељен са 144 даје исти количник и остатак 108.

134. Одреди елементе скупова A, B, C ако је $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$, $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \emptyset$, $A \setminus B = \{1,3,5\}$, $C \setminus B = \{2,4\}$ и $(A \cap B) \setminus C = \{6\}$.

135. Разлика угла α и њему упоредног угла β је 36°. Израчунај угао γ који је комплементан углу β.

VI разред

136. У школи има 240 девојчица и дечака. Ако половину ученика школе чине $\dfrac{3}{5}$ девојчица и $\dfrac{3}{7}$ дечака, колико има девојчица, а колико дечака?

137. У поља квадрата 3×3 распоређени су бројеви 1, 2 и 3. Да ли је могућ такав распоред при коме би збир бројева у свакој врсти, колони и дијагонали био различит?

138. Дати су скупови

$$A = \{1, 2, \ldots, 1993\} \quad \text{и} \quad B = \{0, -1, -2, \ldots, -1992\}.$$

Нека је c збир свих бројева скупова A и B, d њихов производ и e разлика суме непарних бројева из A и парних бројева из B. Поређати бројеве $|c-d|$, $|d-e|$ и $|e-c|$ по величини.

139. На продужетку странице AB троугла ABC, иза темена B у односу на A, дата је тачка M тако да је $BM = BC$. Доказати да је права MC паралелна симетрали угла $\measuredangle B$.

140. Оштар угао правоуглог троугла је $36°$. Израчунати угао између висине и тежишне дужи које одговарају хипотенузи.

VII разред

141. Шта је веће: 2^{1993} или 65^{333}?

142. У правоуглом троуглу (са правим углом у темену C) дужине тежишних дужи су t_a, t_b, t_c. Доказати једнакост $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

143. Да ли је број $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ рационалан? Докажи.

144. Једна четвртина укупне количине робе је продата са 15% зараде, а $\frac{1}{2}$ са губитком од 10%. Са колико процената зараде треба продати остатак робе да би се покрио губитак?

145. У троуглу ABC чија је основица AB дужине $24\,\mathrm{cm}$ и одговарајућа висина $18\,\mathrm{cm}$ уписан је правоугаоник $MNPQ$ тако да су M и N на страници AB, P на страници BC и Q на страници AC. Израчунај површину правоугаоника $MNPQ$, ако је једна његова страница $12\,\mathrm{cm}$.

VIII разред

146. Бродови A и B крећу се по међусобно нормалним путањама које се секу у тачки O. Брод A је од тачке O удаљен $300\,\mathrm{km}$ и креће се брзином $40\,\mathrm{km/h}$, а брод B је од тачке O удаљен $100\,\mathrm{km}$ и креће се брзином од $30\,\mathrm{km/h}$. Одредити када ће растојање између бродова бити најмање и колико је то растојање.

147. Колико литара воде треба сипати у мешавину $40\,\mathrm{l}$ 60%-алкохола и $60\,\mathrm{l}$ 40%-алкохола да би се добио 25%-алкохол?

148. За које целе бројеве a једначина $a + 5 + \dfrac{2}{x-1} = 0$ има негативна цела решења? Наћи та решења.

149. Основа праве призме је једнакокраки троугао основице a и угла при врху $120°$. Колика је запремина призме (у функцији од a) ако је површина омотача два пута већа од површине базе?

150. Кругови k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Сечице p и q садрже тачку A и секу дате кругове у тачкама C, D и E, F ($C, E \in k_1$, $D, F \in k_2$). Доказати да је $\measuredangle CBD = \measuredangle EBF$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1993.

IV разред

151. Сто подударних квадрата дужине странице $3\,\mathrm{cm}$ треба сложити тако да се добије правоугаоник:

1) највећег; 2) најмањег обима.

Које су димензије тих правоугаоника?

152. Дешифровати сабирање

$$\begin{array}{r} A \\ A\,B \\ A\,B\,C \\ +\;A\,B\,C\,D \\ \hline 1\,C\,C\,3 \end{array}$$

153. У дворишту пасу кокошке и прасићи, при чему уочавамо 130 ногу и 40 глава. Колико има кокошака, а колико прасића?

154. Два одрасла човека и два дечака треба да се превезу с једне на другу страну реке. Како ће они то најбрже урадити ако на располагању имају само мали чамац у који може стати један одрастао човек или два детета?

155. Ако се једна страница квадрата повећа за $2\,\mathrm{cm}$, а друга смањи за $5\,\mathrm{cm}$, добија се правоугаоник чија је површина за $46\,\mathrm{cm}^2$ мања од површине квадрата. Колика је страница квадрата?

V разред

156. Група у којој је било мање од 15 дечака и девојчица пошла је на излет. Да је девојчица пошло троструко више, тада би их било више него дечака. Међутим, да је пошло двоструко више дечака, тада би их било више од петоструког броја девојчица. Колико је на излету било девојчица, а колико дечака?

157. Права s је симетрала угла pOq, а тачке A и B припадају правама Op и Oq. Конструисати угао pOq ако су дати: s, A и B.

158. Славко са сином и Јордан са сином су били у риболову. Славко је уловио толико риба, колико и његов син, а Јордан – троструко више од свог сина. Свега је било уловљено 35 риба. Син Славка се зове Никола. Како се зове син Јордана?

159. Дечак направи 10 корака напред, па се врати 2 корака назад, затим напред 10 корака, па 1 назад, потом 10 напред и 2 назад, итд. Колико корака треба да направи да би од почетног места био удаљен 1000 корака?

160. У равни је дата права p и круг $k(O, 2\,\mathrm{cm})$, тако да је $p \cap k = \emptyset$. На кружници је дата тачка M. Конструиши круг k_1 који додирује дату праву p и дати круг у датој тачки M.

VI разред

161. У једнакостраничном троуглу странице $1\,\mathrm{cm}$ изабрано је на произвољан начин пет тачака. Доказати да постоје бар две тачке чије је растојање мање или једнако $0.5\,\mathrm{cm}$.

162. У правоугаонику $ABCD$ је $AB = 2\,BC$. На страници AB дата је тачка P таква да је $\measuredangle APD = \measuredangle DPC$. Одредити овај угао.

163. Дат је разломак $\dfrac{28*3}{4276}$. Који природан број треба одузети од бројиоца, а додати имениоцу па да се добије разломак $\dfrac{2}{7}$?

164. Конструиши трапез $ABCD$, $(AB \parallel DC)$, ако $AB = 7\,\mathrm{cm}$, $DC = 3\,\mathrm{cm}$, $AC = 8\,\mathrm{cm}$ и $BD = 6\,\mathrm{cm}$.

165. Која цифра се налази на 1993. месту у децималном запису разломка $\dfrac{2}{7}$?

VII разред

166. Највећа дијагонала правилног многоугла са парним бројем страница гради са страницом тог многоугла угао од $67°30'$. Конструисати тај многоугао тако да му дужина највеће дијагонале буде $4\,\mathrm{cm}$.

167. На колико начина 7 ученика може сести на:

а) 5 различитих столица; б) 9 различитих столица?

168. Са три паралелне праве подели трапез на четири дела једнаке површине, ако су му основице дужине $6\,\mathrm{cm}$ и $10\,\mathrm{cm}$.

169. Дат је једнакокраки трапез чије су основице $a = 24\,\mathrm{cm}$, $b = 10\,\mathrm{cm}$ и крак $c = 13\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину круга описаног око датог трапеза.

170. Одредити a, b, c, d тако да израз $a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d)$ има најмању вредност.

VIII разред

171. Шестоцифрен број има на месту јединица цифру 7. Ако се та цифра премести на највише место, добија се број пет пута већи од полазног. Који је то број?

172. Висине бочних страна неке пирамиде су једнаке. Под којим углом су нагнуте њене бочне стране према равни основе, ако је површина пирамиде 1,5 пута већа од површине њеног омотача.

173. Наћи број x такав да кад му се дода 2 или одузме 7, добија се квадрат целог броја.

174. Одредити углове троугла ABC коме су центар описаног и центар уписаног круга симетрични у односу на страницу BC.

175. Туриста је прешао $105\,\mathrm{km}$. Да је дневно прелазио $6\,\mathrm{km}$ мање, на путу би провео два дана више. Колико километара дневно је прелазио туриста?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1993.

VI разред

176. Укупна маса посуде напуњене водом (посуде заједно са водом) износи 2000 g. Одлијемо ли 20% воде, укупна маса се смањи на 88% првобитне масе. Одредити масу празне посуде и масу воде.

177. Ако је p прост број онда је $p^{1992}+1993^p$ сложен број. Доказати.

178. Неколико браће је поделило извесну количину дуката. Први брат је узео 100 дуката и једну шестину остатка. Други брат је потом узео 200 дуката и једну шестину новог остатка. Трећи брат је затим узео 300 дуката и једну шестину најновијег остатка. Последњи брат је узео све што је остало од његових претходника. Испоставило се да је сваки брат добио исту количину дуката. Колико је било браће?

179. У троуглу ABC је $AB=c$ и $AC=b$. Одредити дужину дужи A_1P у функцији од b и c, при чему је A_1 средиште странице BC, а P подножје нормале из темена B на симетралу угла $\measuredangle BAC$.

180. Конструисати квадрат ако је дат збир дијагонале и полуобима квадрата $MN=6\,\mathrm{cm}$.

VII разред

181. Одредити све природне бројеве n за које је број $3(n^2+n)+7$ дељив са 5.

182. Колико се шестоцифрених бројева може саставити од цифара $0,1,2,3,4,5$ уз услов да се свака цифра појављује само једном и да су парне цифре једна уз другу? (Напомена: 0 је парна цифра.)

183. Могу ли се бројеви $-1,0,1$ распоредити у поља квадратне таблице 5×5 тако да збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали буде различит?

184. У правоуглом троуглу ABC ($\measuredangle A=90^\circ$) уписан је круг који додирује хипотенузу у тачки M. Ако је $BM=m$ и $MC=n$, доказати да је површина троугла ABC једнака mn.

185. У квадрату $ABCD$ је M средиште странице CD, а N је средиште странице AD. Дужи BM и CN секу се у тачки E. Доказати да је: а) $BM\perp CN$; б) $AE=AB$.

VIII разред

186. Реши систем једначина: $1+x^2=2y$, $1+y^2=2z$, $1+z^2=2t$, $1+t^2=2x$.

187. Нека је $x=111\ldots11$ (20 јединица). Доказати да је број x^3-x^2-2x дељив са 1188.

188. Воз се креће узбрдо константом брзином. Током кретања воз сусреће Ацу, који се креће низбрдо дуж пруге брзином од 6 km/h и прође поред њега за 12.6 s. Мало касније воз сустиже Бору који се креће узбрдо брзином 3.6 km/h и прође поред њега за 15 s. Одредити дужину и брзину воза.

189. Нека је k кружница над пречником $BD=12\,\mathrm{cm}$ и нека су A и C тачке те кружнице са различитих страна праве BD. Ако је $\measuredangle DBA=60^\circ$ и $\measuredangle DBC=45^\circ$, израчунати дужину тетиве AC.

190. Ивице AB, AC и AD тростране пирамиде су међусобно нормалне. Израчунати запремину пирамиде ако су површине страна ABC, ACD и ADB редом једнаке $3\,\mathrm{cm}^2$, $4\,\mathrm{cm}^2$ и $6\,\mathrm{cm}^2$.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1993.

VII разред

191. Колико има петоцифрених бројева записаних цифрама $0,1,2$, таквих да су им бар неке две суседне цифре исте?

192. Миле има три албума марака. У првом се налази петина свих марака, у другом неколико седмина и у трећем 303 марке. Колико марака има у сва три албума?

193. Ако су a и b такви бројеви да је $a-b\geqslant 2$, доказати да је $a^4+b^4\geqslant 2$.

194. Нека је S центар уписаног круга троугла ABC, а M средиште оног лука $\overset{\frown}{AB}$ којем не припада тачка C. Доказати да је $MA=MB=MS$.

195. Симетрала угла β троугла ABC сече страницу AC у тачки D. Нормала на BD кроз средиште M дужи BD сече праву AC у тачки E. Доказати да је $AE \cdot CE = DE^2$.

VIII разред

196. Милан је кренуо у Ваљево неколико минута пре 9 часова, а када је стигао, у неколико минута пре 12 часова, мала и велика казаљка су замениле места. Колико времена је Милан провео на путу и када је кренуо?

197. Доказати да је $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$ за свако x.

198. Свака од четири стране тростране једнакоивичне пирамиде (правилног тетраедра) је издељена средњим линијама на четири једнакостранична троугла. За бојење тетраедра користе се бела (Б), плава (П), црвена (Ц) и зелена (З) боја. Колико има различитих бојења тетраедра, ако:

а) на свакој страни тетраедра се користе само две боје;

б) сваком бојом су обојена тачно четири троугла;

в) свака два троугла са заједничком страницом су обојена различитим бојама?

(Стране тетраедра нису обележене. Различита су она бојења која дају различито обојен тетраедар, независно од његовог превртања.)

199. Дат је полукруг са центром O и пречником AB. Нека су C и D тачке дужи AB такве да је $OC = OD$, а E и F тачке полукруга такве да је $CE \parallel DF$. Доказати да су дужи CE и DF нормалне на EF.

200. Основица праве тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ је једнакокраки правоугли троугао ABC са катетама $AB = AC = 1\,\mathrm{cm}$. Висина призме је $H = 6\,\mathrm{cm}$. Раван π садржи тачку B и од ивица AA_1 и CC_1 одсеца дужи $AA' = 2\,\mathrm{cm}$ и $CC' = 4\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину оног дела призме који се налази између равни π и основе $A_1B_1C_1$.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1994.

IV разред

201. Дат је десетоцифрени број 3794618502. Прецртати три цифре тако да добијени седмоцифрени број буде:

(а) најмањи могућ; (б) највећи могућ.

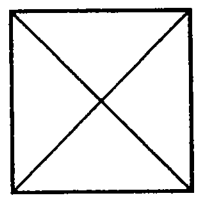
202. Који број је за 60 већи од своје трећине?

203. Колико има природних бројева који су мањи од 1000 чији је збир цифара једнак 5?

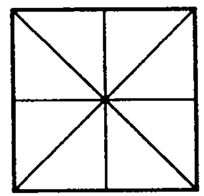
204. Израчунај вредност израза:

$$(1994 + 1992 + \cdots + 6 + 4 + 2) - (1993 + 1991 + \cdots + 5 + 3 + 1).$$

205. Колико дужи и колико троуглова има на слици?



Слика уз задатак 205



Слика уз задатак 210

V разред

206. Одредити све скупове X који задовољавају релације

$$X \cup \{1,2,3,4,5\} = \{1,2,3,4,5,6\},$$
$$X \cap \{2,3,4\} = \{3,4\}.$$

207. Одредити угао α, који је за $18°$ већи од половине свог суплементног угла.

208. Дешифруј множење $\star 4 \star \cdot 15 = 3 \star 9 \star$.

209. Како се само помоћу судова од 3 l и 5 l из бурета може одлити тачно 4 l вина?

210. Колико дужи и колико троуглова има на слици?

VI разред

211. Решити једначину: $\left|x - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{3}{2} - x\right|$.

212. Колико има природних бројева дељивих са 4 који су написани парним цифрама, а мањи су од 1000?

213. Ако би се од Миланове висине одузела њена десетина и додала Мерициној висини, Марица би била за деветину своје висине виша него што је била, а 17 cm виша од Милана. Колико је висок Милан, а колико Марица?

214. Ако симетрале унутрашњих углова троугла образују једнаке углове, онда је троугао једнакостранични. Доказати.

215. У правоуглом троуглу ABC (са правим углом у темену C), тачка M је подножје хипотенузине висине, а тачка E средиште хипотенузе. Доказати да је $\measuredangle ACM = \measuredangle BCE$.

VII разред

216. У позоришној дворани са два партера (лево и десно) у сваком партеру има онолико редова, колико у реду има столица. Ако у сваком реду има једнак број столица и ако у сали има 578 столица, колико има редова у сали и колико столица у реду?

217. Свеже грожђе садржи 70% воде, а суво свега 18% воде. Колико килограма свежег грожђа треба да би се добило 24 kg сувог грожђа?

218. При дељењу полинома $a^4 + b^4 + 1$, делилац је једнак количнику, а остатак је $2a^2 + 2b^2 - 2a^2b^2$. Израчунати количник.

219. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC је нормална на крак BC и полови угао BAD. Израчунати површину трапеза ако је $\measuredangle ABC = 60°$ и ако је обим трапеза 2 m.

220. Тежишне дужи правоуглог троугла из темена оштрих углова су дужине 7 cm и 4 cm. Израчунај дужину хипотенузе тог троугла.

VIII разред

221. Дате су тачке A и B са разних страна дате равни α и њихове нормалне пројекције A' и B' на раван α.

(а) Нацртати одговарајућу слику.

(б) Израчунати дужину дужи AB ако је $A'B' = AA' = 8\,\mathrm{cm}$ и $BB' = 7\,\mathrm{cm}$.

222. Од коцке ивице 6 cm, са четири равни нормалне на базу, одсечене су четири једнаке тростране призме, тако да су им базе једнакокрако правоугли троуглови. Остатак коцке представља призму чија је база правилни осмоугао. Израчунати запремину добијене осмостране призме.

223. Који број треба додати бројиоцу и имениоцу разломка $\frac{34}{53}$ да би се добио разломак једнак са $\frac{4}{5}$?

224. Возећи равномерно 15 минута бициклиста је прешао половину пута AB. Другу половину је возио брзином за 6 km/h мањом од првобитне брзине. Тако је цео пут од A до B прешао за 33 минута. Одредити брзину кретања бициклисте и дужину пута AB.

225. Решити једначину

$$x\left[\left(1{,}2 : 36 + 1\frac{1}{5} : 0{,}25 - 1\frac{5}{16}\right) : \frac{169}{24}\right] = (7 - 6{,}35) : 6{,}5 + 9{,}9.$$

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1994.

IV разред

226. Колико цифара се употреби за нумерацију књиге која има 789 страна?

227. Допунити магични квадрат на слици.

5	10	
4	6	

228. Од свих правоугаоника површине $36\,\text{cm}^2$ чије су странице природни бројеви одредити онај који има:

(а) највећи обим; (б) најмањи обим.

Колико таквих правоугаоника има?

229. Идуће године Нада ће имати два пута више година од Јагоде. Колико година има Јагода, а колико Нада, ако се зна да је Нада 7 година старија од Јагоде?

230. Помоћу шест четворки, заграда и симбола рачунских операција конструисати бројевни израз чија је вредност једнака 100.

V разред

231. Шта је веће: $\dfrac{1}{181}$ или $\dfrac{11}{1994}$?

232. Колико подскупова има скуп $A = \{1, 2, 3, 4\}$?

233. Угао α је суплементан са углом β, а комплементан са трећином угла β. Одредити углове α и β.

234. Одредити све цифре a и b тако да је збир бројева $\overline{199a}$ и $\overline{b234}$ дељив са 18.

235. Јато гусака наиђе на усамљену гуску. „Здраво сто гусака" рече она. „Да нас је још оволико и половина и четвртина и ти са нама било би нас тачно 100" — одговорише гуске. Колико је било гусака?

VI разред

236. У шести разред школе „Кадињача" уписало се $\dfrac{1}{7}$ ученика више од планираног броја, а до краја године школу је напустило $\dfrac{1}{24}$ уписаних ученика, тако да је на крају било 10 ученика више него што је планирано. Колико је ученика шестог разреда било планирано да се упише?

237. У разреду који има 25 ђака бар 17 ученика говори француски језик, бар 17 ученика енглески и бар 17 немачки. Доказати да бар један ученик говори сва три језика.

238. Пола цигле кошта исто као пола црепа и један динар, а три црепа коштају као две цигле и један динар. Колико кошта цигла, а колико цреп?

239. Нека су у троуглу ABC углови $\measuredangle B$ и $\measuredangle C$ оштри и нека је $\measuredangle B > \measuredangle C$. Доказати да је угао између висине и симетрале угла из темена A једнак $\dfrac{\measuredangle B - \measuredangle C}{2}$.

240. Нека је A_1 средиште странице BC троугла ABC. Доказати да је $2\,AA_1 < AB + AC$.

VII разред

241. Доказати да је $A = (4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$ рационалан број.

242. Доказати да је број $1991 \cdot 1992 \cdot 1993 \cdot 1994 + 1$ потпун квадрат (без коришћења рачунских помагала).

243. Производ два двоцифрена броја записан је само помоћу четворки. Одреди те бројеве.

244. Израчунати катете правоуглог троугла чији је један унутрашњи угао $22°30'$, а хипотенуза износи $2\,\text{cm}$.

245. Странице ромбоида су $7\,\text{cm}$ и $4\,\text{cm}$. Одредити однос површина делова на које је тај ромбоид подељен симетралом једног његовог унутрашњег угла.

VIII разред

246. Правилна четворострана призма основне ивице дужине $k\,\text{cm}$, има висину дужине $3k\,\text{cm}$. Вертикална раван, која са бочном страном гради угао од $60°$, дели призму на два дела једнаких запремина.

Изразити површину тела које представља добијена половина, у функцији од основне ивице дате призме.

247. Дате су мимоилазне праве a и b, тачке A_1, A_2, A_3 на правој a, тачке B_1, B_2, B_3, B_4 на правој b и тачка C ван ових правих. Колико највише различитих равни одређују дате тачке?

248. Ако је $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$, колико је $x + \frac{1}{x}$?

249. Дужи BD и CE су висине оштроуглог троугла ABC. Доказати да је $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$.

250. У скупу природних бројева решити једначину

$$\frac{2x-5}{3} + \sqrt{x^2-8x+16} = \frac{2}{3} + \frac{x-2}{6} - \frac{x-4}{2}.$$

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1994.

IV разред

251. Аца из прве клупе је приметио: „Ако се број јабука у корпи сабере са бројем ученика добија се тачно 100“. Потом је учитељ сваком ученику поделио по 2 јабуке, а при том је у корпи остало 19 јабука. Колико је ученика у том разреду и колико је јабука било у корпи?

252. Дешифруј сабирање ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.

$$\begin{array}{r} A \\ A\,B \\ A\,B\,B \\ +\,A\,B\,B\,C \\ \hline D\,D\,A\,3 \end{array}$$

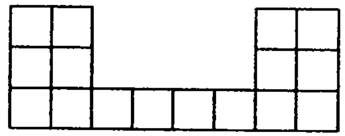
253. Група од 58 путника превезе се преко реке помоћу 9 чамаца, од којих су неки имали 6, а неки 8 седишта. Колико чамаца је било од сваке врсте, ако се зна да су сви били пуни?

254. Ако се страница квадрата повећа за 2 cm, онда се добије нови квадрат чија је површина за $144\,\mathrm{cm}^2$ већа од површине првобитног. Израчунати обим и површину првобитног квадрата.

255. Фигуру дату на слици поделити:

(а) на 6 делова користећи само две праве;

(б) на 4 подударне фигуре.



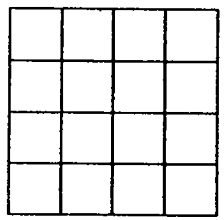
Слика уз задатак 255

V разред

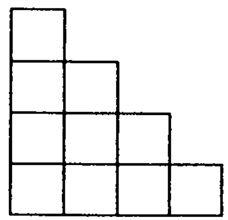
256. Две оловке и 5 свезака коштају 11 динара, а 8 оловки и 2 свеске коштају 8 динара. Колико кошта оловка, а колико свеска?

257. Разломак $\frac{999}{1994}$ представити као збир два разломка са једноцифреним бројиоцима.

258. Могу ли се у поља датог квадрата на слици распоредити бројеви 1, 2, 3 и 4, тако да у свакој колони, врсти и дијагонали сви бројеви буду различити?



Слика уз задатак 258



Слика уз задатак 260

259. Написано је 180 првих природних бројева. Избрисани су сви бројеви који се завршавају нулом. Затим су избрисани сви бројеви који су дељиви са 4, а потом су избрисани сви бројеви који су дељиви са 3. Колико је бројева остало?

260. Колико квадрата, а колико правоугаоника (који нису квадрати) има на слици?

VI разред

261. У продавници је било 98 килограма јабука и крушака. Продато је $\frac{4}{9}$ крушака и $\frac{3}{5}$ јабука, што износи $\frac{1}{2}$ укупне количине јабука и крушака. Колико је било килограма јабука, а колико крушака?

262. Одредити све просте бројеве p тако да је

$$\frac{665}{1993} < \frac{5}{p} < \frac{997}{1994}.$$

263. Над катетама AC и BC правоуглог троугла ABC конструисани су квадрати $ACDM$ и $BCEN$. Нека су M_1 и N_1 подножја нормала из тачака M и N на праву AB. Доказати да је $MM_1+NN_1 = AB$.

264. У ромбоиду $ABCD$ страница AB је два пута дужа од странице BC. Ако је M средиште странице CD, израчунати $\measuredangle AMB$.

265. Написано је 1200 узастопних природних бројева. Прво су избрисани сви бројеви који се завршавају нулом. Затим су избрисани сви бројеви који су дељиви са 4, а на крају су избрисани сви бројеви који су дељиви са 3. Колико је бројева остало?

VII разред

266. Тежиште T троугла ABC налази се на кружници (кружној линији) конструисаној над страницом $AB = 12\,\mathrm{cm}$ као пречником. Израчунај површину $\triangle ABC$ ако је $\measuredangle TAB = 30^\circ$.

267. Нацртај звезду шестокраку („шерифска звезда"). Израчунај збир њених конвексних унутрашњих углова.

268. Воз прелази мост дуг $171\,\mathrm{m}$ за 27 секунди, а поред пешака, који се креће насупрот возу брзином од $1\,\mathrm{m/s}$, пролази за 9 секунди. Израчунати брзину воза и његову дужину ако се прелазак воза преко моста рачуна од тренутка доласка локомотиве на мост, до тренутка силаска последњег вагона са моста.

269. Ако су a и b рационални бројеви и ако је $a + b\sqrt{2} = 0$, онда је $a = b = 0$. Доказати.

270. Колико има четвороцифрених природних бројева написаних помоћу цифара 0, 1, 3, 4, 5, 8, таквих да се:

(а) цифре могу понављати;

(б) цифре не могу понављати;

(в) цифре могу понављати, а број је дељив са 5?

VIII разред

271. Одредити сва решења једначине

$$2x^2 - y^2 = y^2 + 1994$$

у скупу целих бројева.

272. Воз прелази мост дуг $171\,\mathrm{m}$ за 27 секунди, а поред пешака, који се креће насупрот возу брзином од $1\,\mathrm{m/s}$, пролази за 9 секунди. Израчунати брзину воза и његову дужину ако се прелазак воза преко моста рачуна од тренутка доласка локомотиве на мост, до тренутка силаска последњег вагона са моста.

273. Правоугли троугао чије су катете $6\,\mathrm{cm}$ и $8\,\mathrm{cm}$ је основа тростране пирамиде чије све три бочне стране са основом заклапају угао од 60°. Израчунати површину и запремину дате пирамиде.

274. Дата је кружница (кружна линија) и ван ње тачка M. Кроз тачку M конструисане су сечице s_1 и s_2 које секу дату кружницу редом у тачкама A и B, односно C и D. Ако је $MA = 2\,\mathrm{cm}$, $MB = 6\,\mathrm{cm}$ и $MC = 3\,\mathrm{cm}$, израчунати дужину дужи CD.

275. Колико има петоцифрених природних бројева написаних помоћу цифара 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 таквих да се:

(а) цифре могу понављати;

(б) цифре не могу понављати;

(в) цифре могу понављати, а број није дељив са 5?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1994.

VI разред

276. Две трећине неке робе продато је са губитком од 20%, а на четвртини првобитне количине је остварена добит од 50%. Са колико процената зараде или губитка треба продати преостали део робе, да би се на крају остварила планирана цена?

277. Дат је природан број чије декадни запис садржи 1994 јединице, 1994 двојке и известан број нула. Доказати да дати број није квадрат природног броја.

278. У троуглу ABC, A' и B' су подножја висина конструисаних из темена A и B. Конструисати $\triangle ABC$ ако су дате дужи: $AB = 5\,\mathrm{cm}$, $BA' = 3\,\mathrm{cm}$ и $A'B' = 2\,\mathrm{cm}$.

279. Над страницама паралелограма $ABCD$ са спољне стране конструисани су квадрати. Доказати да дужи које повезују средишта тих квадрата образују такође квадрат.

280. У једној кутији има 1993 црвене, 1994 плаве и 1995 белих куглица. Колико се куглица најмање мора узети из те кутије (без гледања и враћања) да би међу извученим куглицама биле сигурно три куглице:

(а) исте боје; (б) различитих боја?

VII разред

281. Дат је троугао ABC чије су странице $AB = 14\,\mathrm{cm}$, $BC = 15\,\mathrm{cm}$ и $CA = 13\,\mathrm{cm}$ и круг чији се центар налази на страници AB, а додирује странице BC и CA. Израчунати колики део троугла (у процентима) се налази изван круга.

282. Доказати да је за ма који природан број n израз $\dfrac{n^2}{2} - \dfrac{2n}{3} + \dfrac{n^3}{6}$ цео број.

283. Златар има две различите легуре сребра и злата. У једној су сребро и злато у размери $2:3$, а у другој у размери $5:3$. Колико килограма сваке легуре треба узети да бисмо добили $9\,\mathrm{kg}$ нове легуре у којој има једнако и злата и сребра?

284. Дат је троугао ABC код кога је $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Нека је A_1 средиште странице BC, а B' и C' подножја висина из темена B и C. Доказати да је троугао $A_1B'C'$ једнакостранични.

285. На кружници је распоређено 1995 тачака од којих су 1994 обојене белом, а једна тачка је црне боје. Уочимо све могуће конвексне

многоуглове са теменима у тим тачкама. Да ли је више многоуглова са једним црним теменом, или је више многоуглова који не поседују црно теме? Одговор образложити.

VIII разред

286. (а) Израз $a^4 + 4b^4$ написати у облику производа два полинома.

(б) Доказати да је број $2^{1994} + 5^{1996}$ сложен.

287. Када се два троцифрена броја напишу један до другог добије се шестоцифрен број који је три пута већи од њиховог производа. О којим бројевима је реч?

288. Дата су четири природна броја. Израчунавањем свих могућих ненегативних разлика ових бројева добијамо $0,\ 2,\ 3,\ 5$. Одредити о којим бројевима се ради ако је познато да је збир двају већих бројева три пута већи од збира двају мањих бројева.

289. Две стране тростране пирамиде су једнакостранични троуглови чија је страница $a\,\mathrm{cm}$. Равни ових троуглова су међусобно нормалне. Израчунати површину и запремину дате тростране пирамиде.

290. Дат је троугао ABC. Кроз теме C, ван троугла ABC, а у његовој равни, конструисати праву p тако да је збир нормалних растојања тачака A и B од праве p највећи могућ.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1994.

VII разред

291. Израчунати вредност израза

$$x^{19} - 23x^{18} + 23x^{17} - 23x^{16} + \cdots + 23x^3 - 23x^2 + 23x + 5,$$

ако је $x = 22$.

292. Авион лети из Београда у Подгорицу и враћа се назад. При каквим временским условима ће тај авион цео пут прећи брже: при ветру који стално истом снагом дува од Београда према Подгорици или при мирном времену, без ветра?

293. Шест бројева је распоређено у теменима правилног шестоугла. Збир свих бројева је 1 и сваки од њих је једнак апсолутној вредности разлике претходна два, посматрајући бројеве у смеру кретања казаљке на сату. Који су то бројеви?

294. Два круга k_1 и k_2 са центрима O_1 и O_2, секу се у тачкама A и B. Произвољна права кроз A сече k_1 у C_1 и k_2 у C_2. Доказати да су углови $\measuredangle BC_1O_1$ и BC_2O_2 једнаки.

295. У унутрашњости квадрата $ABCD$ је дата тачка P, таква да је $\measuredangle ABP = \measuredangle BAP = 15^\circ$. Доказати да је троугао CDP једнакостраничан.

VIII разред

296. Унутар квадрата странице 1 на произвољан начин је смештена 51 тачка. Доказати да постоји круг полупречника мањег од $1/7$, који обухвата бар три од датих тачака.

297. Основица AB једнакокраког троугла ABC је $24\,\mathrm{cm}$ и крак је $20\,\mathrm{cm}$. Израчунати растојање између ортоцентра H и тежишта T тог троугла.

298. Коцка ивице $13\,\mathrm{cm}$ исечена је на 1994 коцке са целобројном дужином ивица. Колике су димензије добијених коцки и по колико их има?

299. Дат је природан број

$$n = \underbrace{111\ldots11}_{1994}\underbrace{222\ldots22}_{1994}.$$

Доказати да је тада израз $n^3 - 3n^2 - 18n$ дељив са 13 200.

300. У селима A, B и C живи 300, 200 и 100 ученика. Удаљеност села је: $AB = 3\,\mathrm{km}$, $BC = 2\,\mathrm{km}$ и $AC = 4\,\mathrm{km}$. Где треба изградити заједничку школу да би укупан број km, који би прелазили сви ученици, био најмањи?

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1995.

IV разред

301. Колико има четвороцифрених природних бројева код којих је производ цифара једнак 6?

302. Израчунај разлику највећег и најмањег десетоцифреног природног броја од којих је сваки записан помоћу различитих цифара.

303. У једном граду у главној улици у правој линији су школа, пошта и биоскоп. Од школе до поште је $1\,\mathrm{km}$ и $215\,\mathrm{m}$, а растојање између школе и биоскопа је за једну трећину краће. Колико је растојање између поште и биоскопа?

304. Отац, мајка, син и кћи имају укупно 73 године. Отац је старији од мајке 3 године, а сестра од брата 2 године. Укупан збир година свих чланова породице пре 4 године је био 58. Колико година има сада сваки од чланова породице?

305. Обим правоугаоника је $2\,\mathrm{m}$. Када му се једна страница повећа за $10\,\mathrm{cm}$, а друга смањи за $10\,\mathrm{cm}$, добија се квадрат. Израчунати странице датог правоугаоника и добијеног квадрата.

V разред

306. У петом разреду једна школа има 90 ученика. Познато је да 22 ученика учи енглески језик, 28 руски језик, 35 француски језик, 5 енглески и руски, 7 француски и енглески, 9 француски и руски, а само енглески 12 ученика. Колико ученика учи сва три језика, а колико не учи ниједан језик?

307. Израчунај углове α и β ако су они упоредни и ако се односе као $1:9$.

308. У броју $n = \overline{a1995b}$ одредити непознате цифре a и b тако да добијени шестоцифрени број n буде дељив са 72.

309. Шта је веће: $\dfrac{19}{1995}$ или $\dfrac{20}{2079}$?

310. Квадрат чија је страница 3 cm подељен је на квадратне центиметре. Колико на тако добијеној слици има дужи, а колико правоугаоника (рачунајући у правоугаонике и квадрате)?

VI разред

311. У броју $n = \overline{1995ab}$ одредити непознате цифре a и b тако да добијени шестоцифрени број n буде дељив са 72.

312. Једна цев напуни базен за 6 сати, а друга за 10 сати. Цев која празни базен источи пун базен воде за 5 сати. За колико ће се сати напунити базен ако истовремено раде све три цеви?

313. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$), а угао на основици је $\alpha = 50^\circ$. На продужетку крака BC (преко темена C) дата је тачка M, тако да је $BC = CM$. Доказати да је $AM \perp AB$ и $AM > AB$.

314. Дат је једнакостранични троугао ABC. Свака од страница AB, BC и CA продужена је преко темена B, C и A за дуж d, тако да је $BM = CN = AP = d$. Доказати да је троугао MNP такође једнакостранични.

315. Како се само помоћу судова од 3 литра и 7 литара, са чесме може донети тачно 5 литара воде?

VII разред

316. На хипотенузи AB једнакокрако-правоуглог троугла ABC дате су тачке M и N тако да је $MC = NC = 2\,\text{cm}$. Растојање сваке од тачака M и N од њој најближе катете је $1\,\text{cm}$. Одредити површину датог троугла и дужину дужи MN.

317. Израчунати вредност израза:

$$\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2} \qquad \text{за } x = 3-\sqrt{2}.$$

318. Цена меса у једној продавници повећана је за 8%, а у другој је смањена за 8%. Колика је првобитна цена меса ако разлика те две цене сада износи 1,2 динара.

319. Ако су a и b реални бројеви и ако је $a < b$, онда је $a < \dfrac{a+b}{2} < b$. Доказати.

320. Дат је троугао ABC. Разрезати дати троугао на три дела од којих се може саставити правоугаоник. Образложити решење.

VIII разред

321. Дат је разломак чији је именилац за 1995 већи од његовог бројиоца. Ако се датом разломку дода 1/3, добије се разломак који је три пута већи од првобитног. Колики је именилац, а колики бројилац датог разломка?

322. Решити неједначину: $\dfrac{1995}{1+|x-1|} > 1$.

323. Свежа трава садржи 80% воде, а сено свега 20%. Колико треба свеже траве да би се добила 1 тона сена?

324. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Ако је O пресек његових дијагонала, онда је: $P(\triangle AOB)\cdot P(\triangle COD) = P(\triangle BOC)\cdot P(\triangle DOA)$. Доказати.

325. Коцка $ABCDA'B'C'D'$ чија ивица има дужину a пресечена је са равни π која садржи тачке A, C и D'. Одредити површину пресека коцке са равни π. Одредити запремине делова на које раван π дели коцку.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1995.

IV разред

326. Колико седмоцифрених бројева почиње цифрама 1995, а колико се завршава цифрама 1995?

327. Збир два броја је 825, при чему се већи број завршава цифром 0. Ако ту нулу у већем броју изоставимо, онда се добије мањи број. О којим бројевима је реч?

328. Два ученика имају нешто новца и желе да купе исту збирку задатака из математике. Првом недостаје 66 динара, а другом 82 динара. Зато реше да заједнички купе збирку задатака. Међутим, ни тада нису имали довољно новца, јер им је недостајало још 24 динара. Колико кошта та збирка задатака?

329. Правоугаоник обима 96 cm једном правом је подељен на два подударна квадрата. За колико је обим правоугаоника већи од обима једног од добијених квадрата?

330. Саставити магични квадрат (3×3) чији су елементи бројеви 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14.

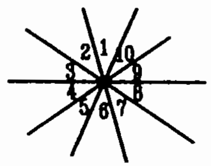
V разред

331. Јагода је добила кутију пуну бомбона. Првога дана је појела четвртину бомбона, а другог дана четвртину остатка. Колико бомбона је Јагода добила ако је на крају другога дана остало 9 бомбона?

332. Одредити разломак који је једнак разломку $\frac{43}{90}$ и код кога је збир бројиоца и имениоца једнак 1995.

333. Разломци $\frac{3*5*}{36}$ и $\frac{4*7*}{45}$ су природни бројеви. Упоредите их по величини.

334. Пет правих секу се у једној тачки и граде десет углова које ћемо редом обележити бројевима од 1 до 10 (слика). Доказати да је $\measuredangle 1+\measuredangle 3+\measuredangle 5+\measuredangle 7+\measuredangle 9=180^\circ$.



Слика уз задатак 334

		20
21		
14	19	

Слика уз задатак 335

335. Допунити магични квадрат на слици.

VI разред

336. Једна и по мачка, за три и по дана, улови четири и по миша. Колико мишева ће уловити пет и по мачака за 3 седмице (21 дан)?

337. Одредити све двоцифрене природне бројеве који имају следећу особину: тај број и број написан истим цифрама у обрнутом редоследу су прости.

338. Гумена лоптица која слободно пада сваки пут одскочи од земље до висине за 1/4 мање од висине са које пада. Израчунати са које висине је пуштена та лопта ако је у трећем одскоку достигла висину од 432 mm. До које висине ће лопта одскочити у петом одскоку?

339. У спољашњој области правоугаоника $ABCD$, конструисани су једнакостранични троуглови BCE и CFD. Доказати да је и троугао AEF такође једнакостранични.

340. У оштроуглом троуглу ABC $(BC>AC)$ дата је висина CE. Симетрала спољашњег угла троугла код темена C сече праву AB у тачки D, тако да је $CD=2CE$. Доказати да је $\alpha-\beta=60^\circ$.

VII разред

341. Страница правилног осмоугла је 10 cm. Израчунати његову површину.

342. Ако је троугао ABC правоугли и ако су t_a, t_b и t_c тежишне дужи које одговарају катетама, односно хипотенузи, онда је $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$. Доказати.

343. Шта је веће: $0{,}064^{665}$ или $0{,}16^{997}$?

344. Дато је 1995 бројева од којих је сваки 1 или -1. Могу ли се дати бројеви распоредити у две групе које немају заједничких елемената, тако да је збир бројева у првој групи једнак збиру бројева у другој групи?

345. У центру собе је мачка и 10 мишева: 9 црних (означених бројевима 1 до 9) и један бели миш (означен бројем 10). Мишеви трче у круг, стално у истом смеру, не мењајући међусобни редослед (1, 2, 3, …, 9, 10). Мачка лови мишеве једног по једног и сваки пут када улови једног миша, пропусти четири следећа, а петог улови. Испоставило се да је бели миш последњи уловљен. Који је миш први уловљен?

VIII разред

346. Ако је $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, онда је $a=b=c$. Доказати.

347. У једнакокраком троуглу ABC $(AC=BC)$ основица $AB=10\,\mathrm{cm}$, а угао наспрам ње, $\measuredangle ACB=36^\circ$. Израчунати дужину крака тог троугла.

348. Нека је $S=3+3^2+3^3+\cdots+3^{1994}+3^{1995}$. Доказати да је S дељиво са 39.

349. На кружној стази дугој 1650 m крећу се два мотоциклиста различитим константним брзинама. Ако се крећу у супротним смеровима, сусрешће се после једног минута; ако се крећу у истом смеру, онда ће бржи сустићи споријег после 11 минута. Колика је брзина сваког од њих?

350. У центру собе је мачка и 10 мишева: 9 црних (означених бројевима 1 до 9) и један бели миш (означен бројем 10). Мишеви трче у круг, стално у истом смеру, не мењајући међусобни редослед (1, 2, 3, …, 9, 10). Мачка лови мишеве једног по једног и сваки пут када улови једног миша, пропусти четири следећа, а петог улови. Испоставило се да је бели миш последњи уловљен. Који је миш први уловљен?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1995.

IV разред

351. Књига има 195 листова. Колико та књига има страница? Колико цифара је потребно за нумерацију те књиге?

352. Дешифруј сабирање: $\overline{A}+\overline{AB}+\overline{BB}+\overline{ABBB}=\overline{A995}$.

353. Два ученика имају нешто новца и реше да купе исту књигу. Али, једном недостаје 2 динара, а другом 7 динара. Зато реше да заједнички купе књигу, али ни тада нису имали довољно новца. Колико кошта књига ако је њена цена природан број динара?

354. Ако се једна страница датог квадрата повећа за 8 cm, а друга смањи за 6 cm, добија се правоугаоник чија је површина једнака површини датог квадрата. Одредити обим квадрата и правоугаоника.

355. Коцка ивице 3 cm разрезана је на кубне центиметре. Од свих добијених кубних центиметара направљени су сви могући квадри. Који од њих има највећу, а који најмању површину?

V разред

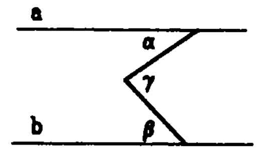
356. Када је пешак прешао 4 km и још половину остатка пута, остало му је да пређе још 4 km и трећину целог пута. Израчунај дужину целог пута.

357. Дата је права s и тачка A ван ње. Конструисати једнакостранични троугао ABC ако је A једно његово теме, а s је оса симетрије троугла.

358. Дешифруј множење:

$$\overline{abcd}\cdot 9=\overline{dcba}$$

ако једнаким цифрама одговарају једнака слова и обрнуто, различитим цифрама различита слова.



Слика уз задатак 359

359. Дати су углови $\alpha=34^\circ 52'$ и $\beta=47^\circ 39'$. Израчунати угао γ ако је $a \parallel b$ (слика).

360. Како помоћу два суда чије су запремине 3 литра и 5 литара са чесме узети 4 литра воде?

VI разред

361. Када се у позитивном децималном броју зарез помери за једно место у лево, добије се број који је за 123,48 мањи од првобитног броја. Израчунати првобитни број.

362. Одредити цифре a и b тако да је број $n=\overline{a1995}+\overline{1995b}$ дељив са 44.

363. На страницама AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ дате су тачке M, N, P, Q тако да је $AM=BN=CP=DQ$. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ такође квадрат.

364. Конструисати једнакостранични троугао ABC ако је дата дуж $d = 5\,\mathrm{cm}$, која представља збир странице и висине тог троугла.

365. У једнакостраничном троуглу ABC странице $a = 3\,\mathrm{cm}$ на случајан начин је распоређено 10 тачака. Доказати да при сваком распореду датих тачака постоје бар две тачке чије растојање је мање од $1\,\mathrm{cm}$.

VII разред

366. Дешифруј квадрирање: $(5c+1)^2 = \overline{abca}$.

367. Шта је веће: $\dfrac{5+2\sqrt{5}}{2}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$?

368. Ако је x реалан број и ако је $x + \dfrac{1}{x} = 3$, колико је $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$?

369. У троуглу ABC странице су $AB = c = 32\,\mathrm{cm}$ и $BC = a = 24\,\mathrm{cm}$, а тежишне дужи AA' и CC' су међусобно нормалне. Израчунати обим и површину троугла ABC.

370. Дванаест витезова округлог стола треба да изаберу двочлану делегацију за посету краљу Артуру. На колико начина је то могуће урадити ако у делегацији не могу бити два витеза који су суседи за округлим столом?

VIII разред

371. У 4 сата ујутру казаљке на часовнику заклапају угао од $120°$. После колико времена ће казаљке поново, први пут заклапати угао од $120°$?

372. Ако је x реалан број и ако је $x + \dfrac{1}{x} = 3$, колико је $x^3 + \dfrac{1}{x^3}$?

373. Одредити све троцифрене бројеве који су 15 пута већи од збира својих цифара.

374. Дат је троугао чије су странице $13\,\mathrm{cm}$, $20\,\mathrm{cm}$ и $21\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину оног дела круга описаног око датог троугла, који се налази изван троугла.

375. Равни бочних страна праве тростране пирамиде су међусобно нормалне и имају површине: $4\sqrt{105}\,\mathrm{cm}^2$, $16\sqrt{21}\,\mathrm{cm}^2$, $42\sqrt{5}\,\mathrm{cm}^2$. Одредити површину и запремину те пирамиде.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1995.

VI разред

376. Два рибара су пошли заједно у риболов. Један је уловио 3 рибе, а други 5 риба. Када су почели да их пеку, наиђе неки путник и седе са њима да доручкује, при чему су појели све рибе, тако да су сва тројица добили једнаке порције. После доручка путник рибарима плати свој оброк 8 динара. Како ће рибари међу собом, али праведно, да поделе тај новац?

377. Ако је p прост број, онда је $1995p+1$ сложен број. Доказати.

378. У једнакокраком троуглу ABC, $AB = AC$ и $\measuredangle CAB > 30°$. На основици BC изабрана је тачка M тако да је $\measuredangle BAM = 30°$, а на краку AC тачка N тако да је $AM = AN$. Израчунати $\measuredangle NMC$.

379. Дате су паралелне праве a и b на међусобном растојању $3\,\mathrm{cm}$. На правој a дата је тачка A, а на правој b дата је тачка B тако да је $AB > 3\,\mathrm{cm}$. На дужи AB изабрана је тачка C тако да је $AC > BC$. Кроз тачку C конструисати праву p која сече праву a у тачки M и праву b у тачки N, тако да је $AM + BN = 5\,\mathrm{cm}$.

380. Група од 64 дечака треба да подели 1995 кликера. Доказати да ма како их они међусобно делили, сигурно ће се наћи два дечака који су добили једнак број кликера.

VII разред

381. Пословођа који има 14 радника уговори да тих 14 радника један посао заврше за 10 дана. Међутим, после два дана пословођа утврди да ће радећи овим темпом закаснити 4 дана у извршењу уговореног посла и трећег дана ангажује још неколико радника, те уз њихову помоћ посао заврше тачно на време. Колико је радника накнадно ангажовано?

382. Нека је $S = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1995}$. Доказати да је:

а) $S = 2(2^{1995} - 1)$; б) S дељиво са 434.

383. Дат је правоугли троугао ABC (угао $C = 90^\circ$ и $AC > BC$). Над катетом AC као над пречником конструисан је круг који хипотенузу AB пресеца у тачки D. Кроз тачку D конструисана је тангента t која катету BC сече у тачки E. Доказати да је $BE = CE$.

384. Нека је ABC дати правоугли троугао ($\angle C = 90^\circ$) чије су катете $BC = a$ и $AC = b$. Над страницама троугла са спољне стране конструисани су квадрати $ACMN$, $ABQP$ и $BCSR$. Израчунати површину шестоугла $MNPQRS$ у функцији од a и b.

385. Дати су редом природни бројеви: $1, 2, 3, \ldots, 1994, 1995$. Бришемо ма која два броја из датог низа и уместо њих пишемо или њихов збир, или апсолутну вредност њихове разлике. Поступак се понавља све док не остане само један број. Може ли тај последњи број бити:

а) 0; б) 1995?

VIII разред

386. а) Ако су a и b реални бројеви, доказати да важи:

$$a^{1995}+b^{1995} = (a+b)(a^{1994}-a^{1993}b+a^{1992}b^2-\cdots+a^2b^{1992}-ab^{1993}+b^{1994}).$$

б) Доказати да је сума $1^{1995} + 2^{1995} + \cdots + 1994^{1995} + 1995^{1995}$ дељива са 1995.

387. У соби се̂ налазе столице са 3 и 4 ноге. Када на све столице седну људи, у соби је укупно 69 ногу. Колико у соби има столица са 3 ноге, а колико са 4 ноге?

388. За које вредности реалног броја a једначина $||x-1|-1| = a$ има највише реалних решења по x? Одредити сва та решења?

389. У круг је уписан конвексан четвороугао $ABCD$, тако да је $AB = BC$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки S. Израчунати дијагоналу BD ако је $AB = 6\,\mathrm{cm}$ и $BS = 4\,\mathrm{cm}$.

390. Дата је четворострана пирамида $SABCD$ чије наспрамне бочне стране SAB и SCD припадају међусобно нормалним равнима које су нормалне и на раван основе $ABCD$. Ако су бочне ивице $SA = SD = 20\,\mathrm{cm}$ и $SB = SC = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и ако бочне ивице SA и SD са равни основе заклапају угао од 30°, израчунати површину и запремину дате пирамиде.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1995.

VII разред

391. Ако је p прост број, онда је $p^{1995} + 1995^p + 1996$ сложен број. Доказати.

392. Ученик треба да реши 20 задатака. За свако тачно решење добија 8 бодова, за нетачно решење му се одузме 5 бодова, а задатак који није решавао се не бодује. Ученик је сакупио 13 бодова. Колико је задатака тачно решио?

393. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине $1995\,\mathrm{cm}^2$. На страници AB су дате тачке M и N, тако да је $AM = MN = NB$, а на страници CD тачке P и Q, тако да је $CP = PQ = QD$. Израчунати површину четвороугла $MNPQ$.

394. Нека је k кружница пречника AB, OM њен произвољан полупречник, а P и Q центри кружница описаних око троуглова AOM и BOM. Праве AP и BQ секу се у тачки S. Доказати да је тачка S на кружници k.

395. Таблу чоколаде која има $m \times n$ „коцкица“ сложених у m хоризонталних и n вертикалних редова, треба изломити на појединачне „коцкице“. Примењују се искључиво „правилни ломови“. Једним „правилним ломом“ се неки правоугаони део табле ломи на два правоугаона дела по линији која раздваја два његова суседна реда. Доказати да укупан број „правилних ломова“ не зависи од избора редоследа „правилних ломова“.

VIII разред

396. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ коцка ивице $AA_1 = 6\,\mathrm{cm}$. Израчунати дужину одсечака просторне дијагонале AC_1 одређених нормалним пројекцијама темена коцке на њу.

397. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) је $\angle CAB = 50^\circ$. Нека је тачка D ван троугла, таква да су A и D са разних страна праве BC, при чему је $\angle CBD = 30^\circ$ и $\angle BAD = 20^\circ$. Израчунати $\angle BCD$.

398. Ако за природне бројеве x, y, z важи једнакост $x^2 + y^2 = z^2$, онда је производ xyz дељив са 15. Доказати.

399. Одредити све природне бројеве a, b, c, d, e, тако да је $2 < a < b < c < d < e$ и

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1.$$

400. Скакавци S_1, S_2 и S_3 се налазе у тачкама 1, 2 и 3 на бројној оси. Сваки скакавац „скаче“ преко једног од преостала два скакавца, тако да доскочи у тачку која је централно симетрична са његовим положајем у односу на скакавца преко кога се скок изводи. После неколико изведених скокова скакавци су се поново нашли у тачкама 1, 2 и 3, али у поретку различитом од почетног. Доказати да су скакавци S_1 и S_3 међусобно разменили места.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1996.

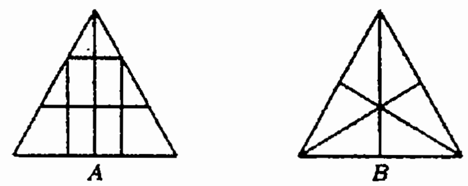
IV разред

401. Дат је број 1996. Користећи све његове цифре (једна јединица, једна шестица, и две деветке) по једном (без права понављања) и користећи заграде и симболе рачунских операција сабирања, одузимања, множења и дељења конструисати бројевне изразе чија је бројевна вредност: 1, 2, 3, 4, 5.

402. Дате су цифре 0, 5 и 8. Напиши највећи и најмањи петоцифрен природан број који садржи дате цифре, ако се морају употребити све цифре и ако се дате цифре могу понављати. Колика је разлика та два петоцифрена броја?

403. Ако Јагода поклони Нади 10 динара, онда ће обе имати једнаке суме новца. Ако пак Нада поклони Јагоди 10 динара, онда ће Јагода имати два пута више новца од Наде. Колико новца има Нада, а колико Јагода?

404. Обим правоугаоника је $90\,cm$, при чему су две дужине правоугаоника једнаке са три ширине правоугаоника. Колике су странице датог правоугаоника?



Слика уз задатак 405.

405. Која фигура на слици има више троуглова, A или B?

V разред

406. Запремина коцке је $1728\,cm^3$. Одредити њену површину.

407. Одредити скуп X ако скуп X задовољава следеће услове: $X \subset \{2,3,4,5,6,7\}$ и $X \cap \{2,3,4,7\} = \{2,4\}$.

408. Дат је угао α. Ако су α и β суплементни углови, а β и γ комплементни углови, израчунати: а) разлику углова α и γ; б) угао суплементан углу γ (у функцији од α).

409. Дешифровати множење: $*8**\cdot 45 = 26*17*$.

410. Колико, најмање, а колико највише, треба конструисати правих у равни, да би оне раван поделиле на тачно 7 области?

VI разред

411. Шта је веће $\frac{29}{1996}$ или $\frac{7}{500}$?

412. Расејана домаћица је отворила славину над кадом и заборавила да каду зачепи. Познато је да се када напуни за 20 минута, а празни за 30 минута. После 36 минута домаћица се сетила да погледа каду. Да ли је у кади било воде и колико?

413. Ако је p прост број онда је $p^{1996} + 1997p$ сложен број. Доказати.

414. Угао β једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) је $72°$. На продужетку крака AC, иза тачке A, изабрана је тачка D, таква да је $AD = AB$. Доказати да је троугао BCD једнакокрак.

415. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$). Доказати да су тежишне дужи које одговарају крацима међусобно једнаке.

VII разред

416. Дат је једнакостранични троугао странице a. Конструисати једнакостранични троугао чија је површина три пута већа од површине датог троугла.

417. Доказати да $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ није рационалан број.

418. Штедиша који улаже 100 динара жели да после две године штедње има бар дупло више новца него што је уложио. Колики је најмањи цео број процената годишње камате који му то омогућује?

419. Доказати да је број $7^{1996} - 1$ дељив са 10.

420. Висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла, дели хипотенузу на два дела: $x = 16\,cm$ и $y = 9\,cm$. Одредити обим и површину тог правоуглог троугла.

VIII разред

421. Пут од места A до места B пешак прелази за 4 сата крећући се при том сталном брзином. Ако после једне трећине пређеног пута повећа брзину за $3\,km/h$, за пут од A до B утрошиће укупно 3 сата. Колико је растојање од A до B?

422. Решити једначину

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{1 - 2x + x^2} = 1996.$$

423. Дато је 10 тачака. Колико је највише правих, а колико највише равни одређено датим тачкама?

424. У правоугли троугао чије су катете $15\,cm$ и $20\,cm$ уписан је квадрат тако да се два његова темена налазе на хипотенузи, а сваки од преостала два, на по једној од катета. Доказати да је површина тог квадрата већа од $64\,cm^2$.

425. Мерни бројеви ивица квадра су три узастопна природна броја, а један од дијагоналних пресека квадра је квадрат. Колика је површина, а колика запремина тог квадра?

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1996.

IV разред

426. Колико има двоцифрених бројева код којих су: (а) обе цифре непарне; (б) обе цифре парне.

427. Збир два броја је 196. Ако већем од њих избришемо цифру јединица добијамо мањи број. О којим бројевима је реч?

428. На удаљености од $125\,m$ пас је опазио зеца и појурио за њим. Истога тренутка зец се дао у бег. Једним скоком зец прескаче пола метра, а пас два метра. Осим тога у времену у ком зец скочи седам пута, пас скочи два пута. Колику удаљеност је претрчао пас од тренутка када је спазио зеца, до тренутка када га је уловио?

429. Шаховска табла облика квадра има 64 поља, такође облика квадра. Обим сваког од поља шаховске табле је 18 cm. Израчунати обим шаховске табле.

430. Допунити следећи магични квадрат:

7		5
11		9

V разред

431. Ако број 860 поделимо једним бројем добићемо остатак 9. Ако број 1200 поделимо истим тим бројем добићемо остатак 16. Колики је количник у првом, а колики у другом случају?

432. У једној школи има 450 ученика. Спортом се не бави само њих 20. Остали играју кошарку, одбојку или фудбал. Кошарку и одбојку игра 215 ученика, фудбал и одбојку игра 323 ученика. Колико ученика се бави сваким од ових спортова?

433. Дат је угао $\alpha = 160°$. Дати угао је подељен на четири дела тако да је први два пута већи од другог; други четири пута већи од четвртог, а трећи три пута већи од четвртог. Израчунати колико износи сваки од тих углова.

434. Одредити све разломке чији је именилац 8 тако да се њихова вредност налази између бројева $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$.

435. На удаљености од 125 m пас је опазио зеца и појурио за њим. Истога тренутка зец се дао у бег. Једним скоком зец прескаче пола метра, а пас два метра. Осим тога у времену у ком зец скочи седам пута, пас скочи два пута. Колику удаљеност је претрчао пас од тренутка када је спазио зеца, до тренутка када га је уловио?

VI разред

436. Са колико нула се завршава производ првих сто узастопних природних бројева: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100$?

437. У суду A се налази помешано 9 l вина и 6 l воде, а у суду B 12 l вина и 6 l воде. Из оба суда одлијемо по 7 l помешане течности и 7 l из суда A преспемо у суд B и обрнуто, 7 l из суда B преспемо у суд A. Израчунати колико ће вина, а колико воде бити после тога у суду A, а колико у суду B.

438. На хипотенузи AB правоуглог троугла ABC дате су тачке M и N тако да је $AM = AC$ и $BN = BC$. Израчунати $\sphericalangle MCN$.

439. Висина CC' и тежишна дуж CM троугла ABC, деле $\sphericalangle ACB$ на три једнака дела. Одредити све углове датог троугла.

440. Тепих димензија $4\,m \times 4\,m$ прогризли су мољци и направили 15 рупа занемарљиве величине. Може ли се исећи комад тепиха димензије $1\,m \times 1\,m$, на коме нема рупа?

VII разред

441. Хипотенуза правоуглог троугла је 20 cm, а један од оштрих углова једнак је четвртини правог угла. Израчунати површину правоуглог троугла.

442. Збир првих n узастопних природних бројева једнак је троцифреном броју чије су све цифре једнаке. Одредити n и тражени троцифрени број.

443. Сада је тачно 9 сати. После колико времена ће казаљке први пут заклапати угао од 50°?

444. Одредити реалан број a $(1 < a < 10)$ и природан број k тако да важи једнакост: $17 \cdot 10^{33} + 26 \cdot 10^{32} - 74 \cdot 10^{31} = a \cdot 10^k$.

445. Нека су h_a, h_b, h_c висине датог троугла ABC. Ако је

$$\left(\frac{h_c}{h_a}\right)^2 + \left(\frac{h_c}{h_b}\right)^2 = 1,$$

онда је троугао правоугли. Доказати.

VIII разред

446. Јова има два пута више браће него сестара, а његова сестра Милена има пет пута више браће него сестара. Колико у тој породици има синова, а колико кћери?

447. Решити неједначину: $|x| + 1996 > 5x$.

448. Дат је правоугли троугао ABC чије су катете $a = 15\,cm$ и $b = 20\,cm$. У дати троугао уписан је круг, а у тај круг уписан је троугао $A'B'C'$ сличан датом. Колики су обим и површина добијеног уписаног троугла $A'B'C'$?

449. Основа косе призме $ABCDA'B'C'D'$ је квадрат странице $10\,cm$. Израчунати површину и запремину призме, ако је њена бочна ивица $20\,cm$, бочна страна $ABB'A'$ је нормална на равни основе, а бочна страна $ADD'A'$ са равни основе заклапа угао од $30°$.

450. У непровидној врећици се налазило 10 белих, 20 црвених и 30 плавих куглица. Колико најмање куглица треба извући из врећице да бисмо сигурно имали:

(а) три црвене куглице;
(б) три куглице различите боје;
(в) три куглице исте боје.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1996.

IV разред

451. Старој књизи недостају прве 142. странице, тако да књига почиње 143. страницом, а завршава се страницом која је написана такође цифрама 1, 4 и 3, али у другом распореду. Колико страница има та стара књига?

452. Збир два броја је 1804. Ако први увећамо четири пута, онда је њихов збир 1996. О којим бројевима је реч?

453. Дешифровати сабирање: $\overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{AB} + \overline{A} = 4321$, ако једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре.

454. У првој фудбалској лиги игра 10 клубова. Колико ће се утакмица одиграти у току такмичења, ако сваки клуб игра са сваким четири пута?

455. Коцка чија је ивица $3\,dm$ обојена је плавом бојом. Колико најмање резања треба извршити да би се коцка исекла на мање коцке ивице

$1\,dm$? Колико тако исечених коцки је: а) необојено; б) има две стране коцке обојене плавом бојом?

V разред

456. Дешифровати сабирање: $\overline{AB} + \overline{ABB} + \overline{CBBC} = \overline{BCDC}$, ако једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре.

457. Одредити четири разломка a, b, c и d са једноцифреним имениоцима тако да важи релација:

$$\frac{7}{9} < a < b < c < d < \frac{8}{9}.$$

458. Лека и Раша ураде један посао за 495 сати, Лека и Жарко ураде исти посао за 440 сати, а Раша и Жарко за 792 сата. За колико сати ће тај посао бити готов ако се ангажују истовремено сва тројица?

459. На правој p дате су редом тачке M, A, B, C, D и N, тако да је $AB = BC = CD$. Растојање између средишта дужи AB и CD је $32\,cm$, а растојање између средишта дужи MA и DN је $57\,cm$. Колика је дужина дужи MN?

460. У једној преступној години регистровано је 53 понедељка. Одредити који дан у недељи је био 6. април.

VI разред

461. У три корпе налази се редом 6, 7 и 11 јабука. Треба са три пребацивања изједначити број јабука у корпама, при чему се из једне корпе у другу може пребацити тачно онолико јабука колико у тој корпи већ има. Како то учинити?

462. У једном одељењу број, због болести одсутних ученика, једнак је шестини броја присутних ученика. Када се још један од присутних ученика разболео, онда је број одсутних ученика постао петина броја присутних ученика. Колико ученика има у том одељењу?

463. Када се природан број n подели са 3, остатак је 1. Ако га поделимо са 37, остатак је 33. Колики је остатак при дељењу броја n са 111?

464. Конструисати троугао ABC, ако су дати следећи његови елементи: висина $CC' = h_c = 3\,cm$, страница $AC = b = 4\,cm$ и тежишна дуж $AM = t_a = 5\,cm$.

465. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$) и произвољна тачка M на основици AB датог троугла. Конструисан је паралелограм $MBCD$. Доказати да је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle AMC$. Ако је пресек дужи MC и BD тачка N, а P средиште странице AB, онда је $MN = PN$. Доказати.

VII разред

466. Када се збир углова у многоуглу помножи са бројем дијагонала многоугла, добије се 97200°. Колико страница има тај многоугао?

467. Дат је полином $P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$. Одредити за које вредности x, y и z дати полином није позитиван.

468. На страницама AB, BC и CA једнакостраничног троугла ABC дате су тачке M, N, P, тако да је $AM : MB = BN : NC = CP : PA = 2 : 1$. Доказати да је и троугао MNP једнакостранични и одредити однос обима и површине троуглова ABC и MNP.

469. Око трапеза чије су основице $a = 24\,cm$ и $b = 10\,cm$, а површина $P = 289\,cm^2$ описан је круг.

(а) Доказати да је дати трапез једнакокрак.
(б) Израчунати полупречник круга описаног око трапеза.
(в) Израчунати угао између дијагонале и основице.
(г) Израчунати угао између дијагонала трапеза.

470. Колико има петоцифрених природних бројева код којих је прва цифра паран број, друга цифра сложен број, трећа цифра непаран број, четврта цифра прост број, а последња цифра број који је дељив са 3?

VIII разред

471. Колико има парова природних бројева (x, y) таквих да је: $3x + 8y = 1996$?

472. У координатној равни дата је права $4x + 3y = n$, где је n неки реалан број. Нормално одстојање дате праве од координатног почетка је 12. Одредити број n и површину троугла који дата права гради са координатним осама.

473. Могу ли се бројеви $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^{1995}, 2^{1996}$ поделити у два скупа без заједничких елемената, тако да је збир бројева у једном скупу једнак збиру бројева у другом скупу? Зашто?

474. Из дате тачке M, ван датог круга $k(O, r)$ конструисана је сечица s која кружну линију сече у тачкама A и B. Израчунати обим и површину датог круга ако је $MA = 16\,cm$, $MB = 9\,cm$ и $MO = 13\,cm$.

475. Основа четворостране пирамиде је једнакокраки трапез чије су основице $a = 5\,cm$ и $b = 3\,cm$, а краци су $c = d = 7\,cm$. Израчунати запремину дате пирамиде ако висина пирамиде пада у пресек дијагонала трапеза, а већа бочна ивица је $13\,cm$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1996.

VI разред

476. Четири друга су заједнички купили компјутер. Први је платио 50% од вредности компјутера, други је дао трећину суме коју су дала остала тројица, а трећи је уплатио 25% од суме коју су дала остала тројица. Четврти је дао 500 динара. Колика је цена тог компјутера?

477. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног природног броја записује се у декадном запису само помоћу неколико цифри 2. Одредити о којим бројевима је реч.

478. У неједнакокраки троугао ABC уписан је круг k, чији је центар тачка O. Кроз тачку O, конструисане су праве p и q, тако да је $p \parallel AC$ и $q \parallel BC$. Ако права p сече страницу AB у тачки M, а права q сече страницу AB у тачки N, онда је обим троугла OMN једнак дужини странице AB. Доказати.

479. У неједнакокраком трапезу један крак је већи од другог за $4\,cm$, а већи крак је за $2\,cm$ мањи од веће основице. Збир мање основице и кракова једнак је $40\,cm$, а једна од дијагонала полови угао на основици. Одредити странице тог трапеза. Колико различитих решења има?

480. Једнакостраничан троугао чија је страница $1996\,dm$ треба у потпуности поплочати плочицама облика једнакостраничног троугла странице $1\,dm$, тако да се плочице не смеју прекривати. Колико плочица је потребно за такво поплочавање?

VII разред

481. Књиге су сложене у кутије. У свакој кутији је једнак број књига. Магационер вади једну по једну књигу из кутије, пакује их и адресира претплатницима.Први магационер целу кутију препакује за 3 сата и 36 минута, а други исту такву кутију препакује за 2 сата и 6 минута, при чему је брзина паковања за сваког од магационера стална.

(а) Ако је за неко време први спаковао 63 књиге, колико је књига, за исто време, спаковао други магационер?
(б) Ако за паковање једне књиге сваком од магационера треба цео број минута, колико највише књига може бити спаковано у једну кутију?

482. Дат је полином $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$.
(а) Ако је p прост број већи од 3, онда је $P(p)$ дељиво са 24. Доказати.
(б) Одредити најмањи прост број p такав да је $P(p)$ дељиво са 120.

483. Дат је неједнакокраки троугао ABC. Нека је тачка H ортоцентар, а O центар круга описаног око троугла ABC и нека праве CH и CO секу круг описан око троугла ABC у тачкама M и N. Доказати да су тачке A, B, M и N темена једнакокраког трапеза.

484. У неједнакокраком трапезу дијагонале $m = AC = 20\,cm$ и $n = BD = 15\,cm$ секу се под правим углом. Израчунати обим и површину тог трапеза, ако је дужа основица трапеза $a = 21\,cm$.

485. Ортоцентар H троугла ABC дели висину AA' тако да је $AH : HA' = 1 : 1$ и висину BB' тако да је $BH : HB' = 2 : 1$. Израчунати однос $CH : HC'$ у коме ортоцентар дели трећу висину троугла.

VIII разред

486. Нека је $S = p_1^{1996} + p_2^{1996} + \cdots + p_{1996}^{1996}$, где су бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_{1996}$ првих 1996 простих природних бројева. Доказати да је S дељиво са 5.

487. Аутомобил је превалио растојање од града A до града B за 5 сати, а у обрнутом смеру од B до A за 4 сата. При том се узбрдо кретао брзином $60\,km/h$, по равном путу брзином од $72\,km/h$ и низбрдо брзином од $90\,km/h$. Колико је растојање од града A до града B?

488. У квадрату $ABCD$ конструисан је полукруг k над дужи AB као пречником. Затим је конструисан кружни лук $l = \overset{\frown}{AC}$ са центром B, полупречника $AB = BC$. Нека је P произвољна тачка на луку l, M пресечна тачка дужи BP и полукруга k и N подножје нормале из P на страницу квадрата AD. Доказати да је $MP = NP$.

489. Темена датог троугла ABC налазе се са исте стране равни α и удаљена су од ње за $24\,cm$, $30\,cm$ и $39\,cm$, редом. Одредити колико је од равни α удаљено тежиште T троугла ABC.

490. Дата су три тврђења:
(1) Број $n + 29$ је потпун квадрат неког природног броја.
(2) Број n се завршава цифром 8.
(3) Број $n - 60$ је потпун квадрат неког природног броја.
Одредити природан број n, ако се зна да су два од датих тврђења тачна, а једно нетачно.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1996.

VI разред

491. Колико има целих бројева између 100 и 10000, од којих су тачно три цифре једнаке?

492. У групи од $2n$ људи сваки се познаје са најмање n осталих. Познанство је узајамно (ако А познаје Б, онда Б познаје А). Доказати да се из те групе могу издвојити 4 човека и поставити за округли сто тако да сваки од њих седи између својих познаника.

493. Веверица за 20 минута отрчи од свог гнезда до стабла ораха и донесе плод ораха. Без ораха трчи брзином од $5\,km/h$, а са орахом је спорија, те трчи брзином од $3\,km/h$. Одредити растојање од стабла ораха до гнезда.

494. Дат је троугао ABC чије су странице AB, BC, CA редом једнаке дужима c, a, b. Тачка D је подножје нормале из темена B на симетралу s унутрашњег угла код темена A. Ако је H средиште дужи BC, изразити дужину DH преко a, b, c.

495. Дат је једнокраки троугао ABC са основицом AB. На правој AC је изабрана тачка D таква да је A између C и D. Ако је E тачка крака BC, таква да је BE једнако са AD, доказати да основица AB полови дуж DE.

VII разред

496. Којом цифром се завршава број

$$1^{1996} + 2^{1996} + 3^{1996} + \cdots + 1996^{1996}?$$

497. Рационални бројеви су записани у облику низа

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Утврдити правило по којем су поређани чланови овог низа, па одредити на којем месту по реду је број $\frac{1996}{1995}$.

498. Дужине страница троугла су три узастопна природна броја. Доказати да висина повучена на страницу средње дужи дели ову страницу на две дужи које се разликују за 4.

499. У троуглу ABC је $AC + BC = 2AB$. Доказати да је права одређена тежиштем и центром уписаног круга тог троугла паралелна са AB.

500. На гусарској карти пише: На брду Лагатор, изнад Лознице, налази се један храст, једна липа и један дуд. Крени од храста и broj кораке до липе, затим скрени лево под правим углом и изброј исто толико корака. Ту стави први знак! Затим, крени од храста до дуда, онда скрени десно под правим углом и изброј исто толико корака. Ту стави други знак! Одреди средиште између првог и другог знака и копај! Ту ћеш наћи закопано благо. Један разбојник је по карти нашао Лагатор и на њему липу и дуд. Међутим, храст, од којег је требало мерити кораке, у међувремену је нестао, па се разбојник вратио кући без блага. Да је знао мало геометрије, нашао би благо. Како?

VIII разред

501. Наћи све природне бројеве облика $222\ldots22$, које можемо представити у облику збира или разлике квадрата два природна броја.

502. Одредити све природне бројеве a, b, c, такве да је

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = 1.$$

503. Природан број n је такав да су бројеви $2n+1$ и $3n+1$ квадрати природних бројева. Доказати да је број $5n+3$ сложен.

504. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$, код којег је $\sphericalangle ABD = 50^\circ$, $\sphericalangle ADB = 80^\circ$, $\sphericalangle ACB = 40^\circ$, а угао DBC је за 30° већи од угла BDC. Израчунати угао DBC.

505. У равни је дат конвексан четвороугао и унутар њега 1996 тачака, тако да никоје три од њих не леже на једној правој. Произвољним редоследом спајамо по две тачке дужима које се не пресецају међусобно. Овај поступак продужавамо све док постоји бар један пар тачака који се може спојити помоћу дужи која не пресеца ниједну од претходно повучених дужи. Колико смо непресецајућих дужи повукли?

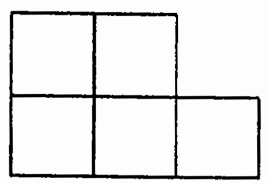
ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1997.

IV разред

506. Дат је број 581 909 786. Прецртај пет цифара тако да новодобијени број (кога чине преостале цифре) буде:
а) најмањи могућ; б) највећи могућ.
Који су то бројеви?

507. Ако је $x+y=97$, израчунати: а) $(x+40)+(y+13)$; б) $1997-x-y$.

508. Одредити бројеве чији је збир 85, а количник 4.



Слика уз задатак 510

509. На две гране налазило се укупно 25 врабаца. После извесног времена, с прве гране је на другу грану прелетело 5, а с друге сасвим одлетело 7 врабаца. Тада је на првој грани остало два пута више врабаца него на другој. Колико је првобитно врабаца било на свакој грани?

510. Колико на датој слици има:
а) дужи; б) квадрата; в) правоугаоника који нису квадрати?

V разред

511. У једној школи су испитивали укус 600 ученика. Јабуке воли 240 ученика, банане 180, а мандарине 360 ученика. Јабуке и мандарине воли 120 ученика, јабуке и банане 70 ученика. Педесет ученика воли мандарине и банане, а 40 ученика не воли воће. Одредити колико има ученика који воле све три врсте воћа.

512. На тренингу је било 225 дечака и 105 лопти. Подељени су на једнаке групе, тако да је свака група добила исти број лопти. Колико је било група и колико је свака група добила лопти? Колико решења има дати проблем?

	12	
15		13

513. Збир угла комплементног датом углу α и угла суплементног датом углу α једнак је четвороструком углу α. Колики је угао α?

514. Шта је веће: $\frac{1}{4}$ или $\frac{499}{1997}$?

515. Допунити магични квадрат.

VI разред

516. Шта је веће $\frac{25}{99}$ или $\frac{499}{1997}$?

517. Трактор је првог дана узорао $\frac{3}{16}$ поља; другог дана $2\frac{2}{5}$ пута више него првог дана, а трећег дана преосталих $87\,ha$. Колика је површина тог поља?

518. Одредити све целе бројеве x, за које је $|x-1|\le 3$.

519. У правоуглом троуглу угао између висине и тежишне линије које одговарају хипотенузи је 10°. Израчунати углове тог троугла.

520. У једнакокраком троуглу ABC $(AC=BC)$ симетрала угла на основици и симетрала угла при врху секу се у тачки S тако да је $\sphericalangle ASC=110^\circ$. Шта је веће: основица AB или крак BC тог троугла?

VII разред

521. Две трећине од 0.4 најпре повећај за 50%, па добијену вредност умањи за 50%. Колики је добијени број?

522. Шта је веће: 79^{499} или 3^{1997}?

523. Брод је брзином од $30\,km/h$ кренуо из пристаништа право на север . После 20 минута скренуо је право на запад и наставио да се креће брзином од $48\,km/h$. Колико је брод био удаљен од пристаништа после 50 минута од поласка из пристаништа?

524. У трапезу $ABCD$ дијагонала AC нормална је на крак BC, а дијагонала BD нормална је на крак AD. Доказати да је дати трапез $ABCD$ једнакокрак.

525. Израчунати вредност израза $A=x+1+\sqrt{x^2}$ за $x=\sqrt{2}-1997$.

VIII разред

526. Бициклиста прелази растојање од места A до места B за 12 сати. Ако би повећао брзину за $10\,km/h$, пут би прешао за 9 сати. Колико је растојање места A од места B и колика је брзина бициклисте?

527. Решити једначину

$$|x^2+2x+100|-|x^2+200|=3894$$

по променљивој x.

528. У равни α дата је права p и на њој пет тачака A, B, C, D и E. Ван праве p, а у равни α, дате су још четири тачке Q, R, S и T. Колико је најмање, а колико највише правих одређено са датих 9 тачака?

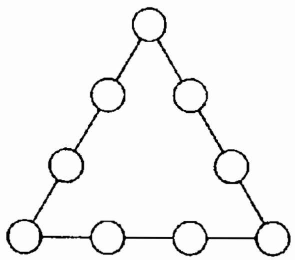
529. Дат је квадрат $ABCD$ странице a. Конструисан је лук $\overset{\frown}{AC}$ са центром B, и лук $\overset{\frown}{AC}$ са центром D. Израчунати површину фигуре између два лука $\overset{\frown}{AC}$ у функцији од странице a.

530. Пресек ACD' коцке $ABCDA'B'C'D'$ има површину $18\sqrt{3}\,cm^2$. Колика је површина и запремина те коцке?

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1997.

IV разред

531. Младен је за један посао требао да добије 130 динара и лопту. Међутим он је урадио само трећину тог посла и за то добио 10 динара и лопту. Колико кошта лопта?



Слика уз задатак 534

532. Збир природних бројева a и b је 10. Колика је најмања, а колика највећа вредност израза $1996\cdot a+1997\cdot b$?

533. Права дели правоугаоник на два подударна квадрата. Ако је обим правоугаоника $60\,cm$, наћи обим једног од добијених квадрата?

534. Бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 распореди у поља магичног троугла (на слици) тако да је збир бројева на свакој страници троугла једнак.

535. Колико има троцифрених бројева који имају исту вредност било да се читају с лева на десно, било да се читају с десна на лево?

V разред

536. Одредити елементе скупа C, ако је $A\cup B\cup C=\{a,b,c,d,e\}$, $A\cap B\cap C=\{a,d\}$, $A\setminus C=\emptyset$ и $B\setminus C=\{b,e\}$.

537. Бошко и Сава су заједно имали 80 динара. Бошко је за $\frac{2}{7}$ свог новца купио часопис, а Сава је за $\frac{4}{9}$ свог новца купио слаткише. Колико новца је имао свако од њих пре куповине, ако су им после куповине остале једнаке суме новца?

538. У броју $M=\overline{a1997b}$ одредити цифре a и b, тако да шестоцифрени број M буде дељив са 45?

539. Угао α је за $1997'$ (минута) мањи од свог комплементног угла. За колико је угао α мањи од свог суплементног угла?

540. Како само помоћу судова од 3 литра и 5 литара са чесме донети тачно 4 литра воде?

VI разред

541. Драган првога дана поједе $\frac{1}{5}$ бомбона и још 3 бомбоне. Другога дана узме $\frac{1}{5}$ остатка и још 5 бомбона. Колико је било бомбона на почетку, ако је трећег дана Драган појео преосталих 15 бомбона?

542. Одредити све могуће вредности цифара a и b тако да је производ бројева $\overline{13a}$ и $\overline{26b1}$ дељив са 15.

543. У једнакокраком троуглу ABC ($AC=BC$) права p садржи теме C и сече страницу AB у тачки M, тако да су троуглови AMC и BMC такође једнакокраки. Одредити углове датог троугла ABC.

544. Дат је једнакостранични троугао ABC и тачка O која је центар круга описаног око троугла ABC. На страници AB дата је тачка M, а на страници AC тачка N, тако да је $AM + AN = AB$. Доказати да је $OM = ON$ и одредити угао MON.

545. Група од 15 дечака добила је 100 кликера. Могу ли их међусобно поделити тако да сваки од њих добије различит број кликера?

VII разред

546. Постоје ли природни бројеви x и y такви да је $x^2 + 5y = 1997$?

547. Одредити број n, ако је $8^{1996} \cdot 8^{1997} = (((8^n)^{11})^{11})^{11}$.

548. Дат је правоугли троугао чија је једна катета дата дуж x, а друга катета једнака дужи $2x$. Конструисати квадрат чија је површина три пута већа од површине датог правоуглог троугла.

549. Нека су P, Q, R и S редом средишта страница AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$. Дужи AR, BS, CP и DQ секу се и граде нови четвороугао $KLMN$. Ако је $AB = 10\,cm$, колика је површина четвороугла $KLMN$?

550. Група од 64 дечака поделила је 1997 кликера. Доказати да постоје бар два дечака који су добили једнак број кликера.

VIII разред

551. Ако је $(a+b+c+d) : (a-b+c+d) = (a+b-c-d) : (a-b-c+d)$, онда је $a : b = c : d$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$). Доказати.

552. Тачка A је од равни α удаљена $8\,cm$, а тачка B је од равни α удаљена $3\,cm$. Колико је растојање између тачака A и B, ако је нормална пројекција дужи AB на раван α, дуж $A'B'$, једнака $12\,cm$? Колико има решења?

553. У дати троугао ABC чија је основица $AB = c = 60\,cm$ и висина CC' која одговара основици $h = 30\,cm$ уписан је правоугаоник $MNPQ$ чија је једна страница два пута већа од друге. Колика је површина тог правоугаоника, ако тачке M и N леже на основици AB датог троугла?

554. Колико има целих бројева x који задовољавају неједначину: $||x| - 1| \leq 997$?

555. Израчунати запремину правилне шестостране призме, ако је мања дијагонала призме $8\sqrt{6}\,cm$ и са основом заклапа угао од $45°$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1997.

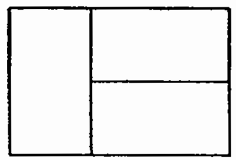
IV разред

556. Сада је 5. април 1997. године и тачно 9 сати и 15 минута. Који ће датум и колико ће сати бити за 1997 минута?

557. Мира и Вера имају укупно 1500 динара, Вера и Љубинка имају укупно 2500 динара, Љубинка и Борка имају укупно 3500 динара, а Борка има 1500 динара више од Мире. Колико новца има свака од њих?

558. Дешифровати одузимање $* * * * - 4 = * * *$ записујући одговарајуће цифре уместо звездица. Колико различитих решења има дати бројевни ребус?

559. Влада је свом сину Николи једнога дана поклонио један кликер. Сутрадан му је поклонио три кликера, трећег дана пет кликера и сваког следећег дана за два кликера више него претходног дана. Колико кликера је Никола добио тридесетог дана? Колико укупно кликера је Никола имао на крају тридесетог дана?



Слика уз задатак 560

560. Три мања подударна правоугаоника сложена су (као на слици) тако да граде нови већи правоугаоник. Ако је обим сваког од малих правоугаоника $60\,cm$, колика је површина квадрата који са великим правоугаоником има једнак обим?

V разред

561. Сада је 5. април 1997. године и тачно је 9 сати и 15 минута. Који је датум био и колико је сати било пре 1997 минута?

562. Наташа је имала известан број јабука и крушака. Од укупног броја $\frac{3}{7}$ су јабуке, а остало су крушке. Када је добила још 4 јабуке и појела 2 крушке онда је имала једнак број и јабука и крушака. Колико је на почетку Наташа имала јабука, а колико крушака?

563. Одредити збир свих природних бројева мањих од 100 који нису дељиви ни са 4 ни са 5?

564. Дата је права p, тачке M и N које припадају правој p и тачка K која не припада правој p. Конструисати кружницу која садржи дате тачке M, N и K.

565. Три брата располажу са 5 ћупова пуних меда, 5 празних ћупова и 5 ћупова који су до пола напуњени медом. Како да расподеле мед и ћупове, тако да сваки од њих добије једнаку количину меда и једнак број ћупова?

VI разред

566. Сада је тачно 9 сати и 16 минута. Колики угао заклапају казаљке на сату?

567. Решити по x једначину:

$$\frac{1996}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}=1997.$$

568. У разломку $\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 98\cdot 99\cdot 100}{6\cdot 6\cdot 6\cdots 6\cdot 6}$ (у имениоцу има тачно 100 шестица) извршена су сва могућа скраћивања. Одредити именилац датог разломка после свих могућих скраћивања.

569. Конструисати правоугли троугао ABC ($\sphericalangle C = 90°$), ако су дате тежишне дужи $t_c = CC_1 = 3\,cm$ и $t_a = AA_1 = 4.5\,cm$.

570. У оштроуглом троуглу ABC ($AC < BC$) висина $h_c = CC'$ и симетрала $s_\gamma = CM$ угла γ заклапају угао од $9°$, а симетрале спољашњих углова код темена A и B секу се под углом од $61°$. Одредити углове тог троугла.

VII разред

571. У правилном n-тоуглу $A_1A_2A_3\ldots A_{n-1}A_n$ угао $\sphericalangle A_3A_1A_4 = 6°$. Колико дијагонала има тај многоугао?

572. Дат је произвољан конвексан четвороугао $ABCD$. Тачке K и M су редом средишта страница AB и CD. Праве AM и KD секу се у тачки N, а праве BM и KC у тачки L. Доказати да је површина четвороугла $KLMN$ једнака збиру површина троуглова AND и BCL.

573. Тачка M је средиште странице BC квадрата $ABCD$. Нека је S тачка унутар квадрата са особином да је S једнако удаљено од тачака A, D и M. Ако је страница квадрата $AB = 40\,cm$, израчунати обим и површину четвороугла $ABMS$.

574. Ако је n природан број, онда је за свако n израз $11n^3 + n$ дељив са 6. Доказати.

575. Дате су цифре 0, 1 и 2. Колико има 1997-цифрених бројева који се могу написати помоћу датих цифара?

VIII разред

576. У координатној xOy равни дата је тачка $M\,(5,3)$. Кроз тачку M конструисана је права p која координатне осе сече у тачкама $A(a,0)$ и $B(0,b)$. Одредити све вредности a и b тако да су и a и b природни бројеви.

577. Доказати да између два узастопна поклапања казаљки на сату увек прође једнако време. Одредити колико износи то време.

578. Одредити сва реална решења следеће једначине:

$$\frac{x}{1997}+\frac{x+1}{1998}=\frac{x+2}{1999}+\frac{x+3}{2000}.$$

579. У правилној шестостраној пирамиди основна ивица једнака је висини пирамиде. Израчунај нормално растојање подножја висине пирамиде од бочне стране пирамиде, ако је основна ивица пирамиде $a = \sqrt{21}\,cm$.

580. У правилном шестоуглу чија је страница $a = 2\,cm$ на случајан начин је распоређена 51 тачка, од којих су неке обојене плавом, а неке црвеном бојом. Доказати да без обзира на распоред тачака и њихову обојеност, увек постоје две тачке исте боје чије је растојање мање од $1\,cm$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1997.

VI разред

581. Било је предвиђено да се извесна количина јабука прода по цени од 5 динара по килограму. Од те количине 25% је продато по предвиђеној цени, 35% по цени која је за 20% већа, а остатак је продат по цени која је за 10% мања од предвиђене. На тај начин је зарађено 300 динара више него да је цела количина јабука била продата по предвиђеној цени. Колико је килограма јабука продато?

582. Не вршећи множење $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11 = 399*6***$, у добијеном броју уместо звездица напиши одговарајуће цифре.

583. Дат је једнакостранични троугао ABC. Над страницама AB и BC конструисани су у спољашњој области троугла квадрати $ABMN$ и $BCPQ$. Дужи AQ и CM секу се у тачки S. Доказати да су дужи AQ и CM нормалне и да је $CQ = 2\cdot AS$.

584. У равни су дате праве s_α и s_β које се секу и ван њих тачка C. Конструисати троугао ABC, ако су дате праве s_α и s_β редом симетрале $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$, а дата тачка C теме траженог троугла ABC.

585. Правоугаоник чије странице имају дужине $5\,cm$ и $9\,cm$ подељен је на 10 мањих правоугаоника, тако да су мерни бројеви страница добијених правоугаоника природни бројеви. Доказати да међу добијеним правоугаоницима постоје бар два чије су површине једнаке.

VII разред

586. Доказати да је број $1991\cdot1993\cdot1995\cdot1997+16$ потпун квадрат неког природног броја. Ако је n природан број, да ли је тада и израз

$$(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16,$$

такође потпун квадрат?

587. У правоуглом троуглу ABC хипотенуза $c = 20\,cm$, полупречник круга уписаног у троуглу је r и полупречник круга описаног око троугла је R. Ако је $r : R = 2 : 5$, одредити обим и површину тог троугла.

588. На страници AB квадрата $ABCD$ дата је произвољна тачка E. Симетрала угла CDE сече страницу BC у тачки F. Доказати да је $AE + FC = DE$.

589. У круг је уписан конвексан четвороугао $ABCD$ чије дијагонале AC и BD се секу у тачки S. Ако је $\sphericalangle ABC = 76°$, $\sphericalangle BCD = 82°$ и $\sphericalangle ASD = 100°$, колики је $\sphericalangle ABD$?

590. Да ли међу природним бројевима мањим од 1000 има више оних чији је збир цифара 13, или је више оних чији је збир цифара 14?

VIII разред

591. На путу дугом $18\,m$ предњи точак трактора направи 10 обртаја више од задњег точка. Ако се обим предњег точка повећа за $6\,dm$, а обим задњег точка смањи за $6\,dm$, предњи точак на истом путу направи само 4 обртаја више од задњег точка. Колики су обими предњег и задњег точка?

592. Одредити све природне бројеве n за које је вредност израза $n^2+2n+1997$ потпун квадрат неког природног броја.

593. Колика је највећа вредност количника који се добије када се троцифрени број подели збиром својих цифара?

594. У кругу је уочена произвољна тачка M. Кроз тачку M је конструисана тетива PQ која са пречником који садржи тачку M заклапа угао од $45°$. Доказати да је вредност израза MP^2+MQ^2 константна и да не зависи од избора тачке M.

595. Квадрат странице a представља мрежу тростране пирамиде. Израчунати запремину те пирамиде у функцији од a.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1997.

VI разред

596. На једном острву постоји укупно 9 држава. Доказати да на овом острву постоји држава која међу њима има паран број пријатељских држава. Ако је држава A пријатељска са државом B, онда је и држава B пријатељска са државом A.

597. Прва четири члана једног низа су: 1, 9, 9, 7. Сваки наредни члан низа је последња цифра збира претходна четири члана. Дакле, имамо низ: 1, 9, 9, 7, 6, 1, 3, ... Да ли је на 1997. месту парна или непарна цифра?

598. У подруму се налази известан број мишева које чува неколико мачака. Прва мачка поједе једног миша и осмину преосталих мишева, и тако се засити. Затим, друга мачка поједе два миша и осмину преосталих, и тако се засити. Трећа мачка поједе три миша и осмину преосталих, па се и она засити, итд. Кад се и последња мачка заситила, у подруму више није остало мишева. Колико је најмање могло бити мачака и мишева, ако мачке једу само целе мишеве?

599. На крацима AB и AC једнакокраког троугла ABC изабране су тачке M и N, такве да права MN није паралелна са BC. Кроз средиште S дужи MN конструисана је права s, паралелна са BC, која сече краке у K и L. Ако су P и Q подножја нормала из M и N на s, доказати да је $PQ = KL$.

600. Дат је круг полупречника $r = 1$ и две произвољне тачке A и B у равни круга. Доказати да постоји тачка X на кругу, таква да је $XA + XB \geq 2$.

VII разред

601. Од квадратног листа хартије, шрафираног целим бројем квадратића, исечен је квадрат са целим бројем истих таквих квадратића. Број преосталих квадратића је 124. Колико је квадратића садржао првобитни лист хартије?

602. Ако је $n_1 + n_2 + \cdots + n_{1997}$ дељиво са 30, онда је и $n_1^5 + n_2^5 + \cdots + n_{1997}^5$ дељиво са 30, где су $n_1, n_2, \cdots, n_{1997}$ природни бројеви. Доказати.

603. Доказати да се раван не може покрити паркетним плочицама у облику правилних петоуглова и десетоуглова исте дужине странице.

604. Дат је полукруг над пречником AB, са центром S. На полукругу изаберемо тачке C и D, тако да је C тачка лука AD и угао CSD је прав. Праве AC и BD се секу у тачки E, а праве AD и BC у тачки F. Доказати да је $EF = AB$ и да је права EF нормална на праву AB.

605. У четвороуглу $ABCD$ је угао ABC од $102°$, угао ADC од $129°$ и $AB = BC = 1$. Израчунати дужину дијагонале BD.

VIII разред

606. Тространа пирамида има пет ивица дужине a и једну дужине b. Израчунати запремину пирамиде.

607. Полазећи из тачке O пуж најпре крене $1\,dm$ на север, па $1\,dm$ на запад, потом $2\,dm$ на југ, па $2\,dm$ на исток, затим $3\,dm$ на север, па $3\,dm$ на запад, даље $4\,dm$ на југ, па $4\,dm$ на исток, итд. (Свака наредна два праволинијска потеза су за по $1\,dm$ дужа од претходна два. Свако скретање се врши улево, под правим углом.) Колико најмање пута треба пуж да крене на север да би се од тачке O удаљио за више од 10 метара?

608. Могу ли два од целих бројева x, y, z бити једнака 1997, тако да израз $4^x + 4^y + 4^z$ буде потпун квадрат?

609. На произвољан начин из скупа $\{1, 2, \ldots, 25\}$ је одабрано 17 различитих бројева. Доказати да међу 17 одабраних бројева постоје два различита, таква да је њихов производ потпун квадрат.

610. Ако су a, b, c, d позитивни реални бројеви, такви да је $a + b + c + d = 1$, доказати да $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} + \sqrt{4d+1} < 6$.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 1. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

611. Доказати да је вредност израза

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots\, 1996+\cfrac{1}{1997}}}}}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots\, 1996+\cfrac{1}{1997}}}}}}$$

једнака 1.

612. Ако је p прост број, онда је $1997^p + p^{1997}$ сложен број. Доказати.

613. У једнакокраком троуглу ABC је $\sphericalangle ACB = 100°$. На продужетку странице CA преко темена A дата је тачка D тако да је $CD = AB$. Израчунати углове троугла BCD.

614. У једнакокрако-правоуглом троуглу ABC $(AC = BC)$ дата је тачка M, тако да је $AM = 2$, $BM = \sqrt{2}$ и $CM = 1$. Израчунати површину троугла ABC.

ПРВА ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА БАЛКАНИЈАДА

615. Девет тачака је распоређено у јединичном квадрату. Доказати да међу њима постоје три тачке такве да површина троугла коме су оне темена није већа од $\frac{1}{8}$.

616. Уколико је $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = k$, изразити $\dfrac{x^8+y^8}{x^8-y^8} + \dfrac{x^8-y^8}{x^8+y^8}$ у функцији од k.

617. Нека је I центар круга уписаног у дати троугао ABC, а D и E редом средишта страница AB и AC. Нека су, даље, K и L пресечне тачке праве DE редом са BI и CI. Доказати да је

$$AI + BI + CI > BC + KL.$$

618. Наћи углове троугла ABC, ако је $R(b+c) = a\sqrt{bc}$, при чему су a, b, c странице троугла ABC, а R је полупречник круга описаног око овог троугла.

619. Ако су $n_1, n_2, \ldots, n_{1997}, n_{1998}$ природни бројеви, такви да је

$$n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_{1997}^2 = n_{1998}^2,$$

доказати да су бар два од тих бројева парни.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

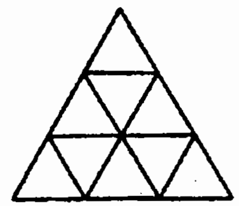
IV разред

620. За колико се трећина највећег четвороцифреног броја разликује од једанаестине најмањег непарног четвороцифреног броја?

621. Може ли збир два узастопна природна броја бити 19971998? Одговор образложити.

622. Одељење у коме је било 32 ученика купило је лопту која кошта 246 динара, при чему су дечаци за лопту дали по 9 динара, а девојчице по 6 динара. Колико у том одељењу има дечака, а колико девојчица?

623. Квадрат чија је страница $10\,cm$ пресечен је једном правом на два правоугаоника. Израчунати обиме тих правоугаоника, ако се зна да је двоструки обим једног од њих једнак троструком обиму другог правоугаоника.



Слика уз задатак 624

624. Колико троуглова има на датој слици?

V разред

625. Дати су следећи скупови бројева:
$A = \{1, 8, 9, 10\}$, $B = \{x | x - 3 \in A\}$ и $C = \{x | x + 2 \in B\}$.
Одредити скупове: $A \cap B$ и $(C/A) \cup (A/C)$.

626. Шта је веће: $\dfrac{71}{1998}$ или $\dfrac{8}{221}$?

627. Производ два броја је 1071. Ако се један од чинилаца повећа за 30, производ је 1701. О којим бројевима је реч?

628. Угао α једнак је $1998'$. Израчунати угао β који је комплементан са углом α и угао γ који је суплементан са углом α.

629. Најкраће растојање тачке A од датог круга k је $3\,cm$, а растојање тачке A од центра круга је $5\,cm$. Колико је највеће растојање тачке A од датог круга k?

VI разред

630. Израчунати вредност разломка $\dfrac{a+b}{1998}$ ако су бројеви a и b решења једначина:
$1000-(900-(98-a))=1998$ и $1000-(900-(98+b))=-1998$.

631. Одредити најмање природне бројеве m и n, тако да је $3888\cdot m$ потпун квадрат, а $3888\cdot n$ потпун куб неког природног броја.

632. Кречење стана Аца заврши за 10 сати. Ако би му Бора помогао 2 сата, онда би кречење завршили за 6 сати. За колико сати би самостално кречење стана обавио Бора?

633. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) тачке A_1 и C_1 су средишта страница BC и AB. Симетрале страница BC и AB секу се у тачки O, тако да је угао $A_1OC_1 = 121°$. Шта је веће: основица AB или крак AC?

634. У дати угао xOy уписан је круг k који краке датог угла додирује у тачкама A и B. Доказати да је $OA = OB$.

VII разред

635. Израчунати $x+y+z$ ако су x, y и z решења једначина:

$$\sqrt{3(x-1998)}=3,\ \sqrt{3y-1998}=3 \text{ и } \sqrt{3}(z-1998)=3.$$

636. Дата је једнакост $\dfrac{1998^{1998}+1998^{1999}}{1999^{1999}}=x^{1998}$. Колико је x?

637. У троуглу ABC углови α, β и γ задовољавају $\alpha-\beta=3\gamma$. Доказати да је дати троугао тупоугли.

638. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C и катетама $a = 6\,cm$ и $b = 8\,cm$. Ако су A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, AC и AB одредити полупречник кружнице која садржи тачке A_1, B_1 и C_1.

639. Дешифровати множење $*2*\cdot 45=(**)^2$.

VIII разред

640. Ако се између цифара датог двоцифреног природног броја напише нула добија се број који је 9 пута већи од датог. Одредити о којим бројевима је реч.

641. Решити једначину $|x-1|+\sqrt{x^2-6x+9}=1998$.

642. У унутрашњој области квадрата $ABCD$ дата је тачка M, тако да је угао AMB прав, а $BM = 9\,cm$. Права BM пресеца дуж CD у тачки K тако да је $CK : DK = 3:1$. Израчунати површину квадрата.

643. Израчунати површину и запремину коцке чија је дијагонала једнака дијагонали квадра чије су дужине ивица $1\,cm$, $5\,cm$ и $7\,cm$.

644. Израчунати збир свих производа у таблици на слици.

$11\cdot 11$	$11\cdot 12$	$11\cdot 13$	$11\cdot 14$	$11\cdot 15$
$12\cdot 11$	$12\cdot 12$	$12\cdot 13$	$12\cdot 14$	$12\cdot 15$
$13\cdot 11$	$13\cdot 12$	$13\cdot 13$	$13\cdot 14$	$13\cdot 15$
$14\cdot 11$	$14\cdot 12$	$14\cdot 13$	$14\cdot 14$	$14\cdot 15$
$15\cdot 11$	$15\cdot 12$	$15\cdot 13$	$15\cdot 14$	$15\cdot 15$

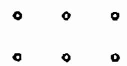
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

IV разред

645. Јесен је један дан дужа од зиме, 4 дана краћа од лета и 2 дана краћа од пролећа. Колико дана траје свако годишње доба, ако година није преступна?

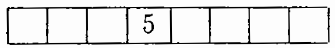
646. Производ два броја је 1998. Ако се један умањи за 24, а други остане исти, нови производ износи 1110. Одредити тражене бројеве.

647. Које све масе можемо измерити на теразијама са два таса ако располажемо само са теговима од $1\,kg$, $3\,kg$ и $9\,kg$?



Слика уз задатак 648

648. Колико има троуглова чија су темена у датим тачкама?



Слика уз задатак 649

649. У поља дате траке уписати природне бројеве тако да је производ свака три суседна броја једнак 30. Колико различитих решења има?

V разред

650. Дати су коцка ивице $6\,cm$ и квадар чије су ивице $9\,cm$, $12\,cm$ и $15\,cm$. На колико се највећих једнаких коцки они могу исећи? Да ли се, користећи све тако исечене коцке, може направити нова коцка?

651. Збир четири природна броја је 1998. Ако се први сабере са 2, од другог одузме 2, трећи помножи са 2, а четврти подели са 2, добијају се једнаки бројеви. О којим бројевима је реч?

652. Одредити све троцифрене природне бројеве који су дељиви са 4 и чији је производ цифара једнак 24.

653. Када се Раша родио његова мајка је имала 25 година. Године 1992. мајка је била 6 пута старија од Раше. Колико година сада има Раша, а колико његова мајка?

654. Колико се правоугаоника који се састоје од 12 поља може избројати на шаховској табли (8×8)?

VI разред

655. У уторак је број гледалаца у биоскопу био за једну трећину већи него у понедељак. У среду је број гледалаца био исти као у понедељак. За колико је број гледалаца у среду био смањен у односу на уторак?

656. Одредити најмањи четвороцифрен број који је дељив са 9 и чији је производ цифара једнак 180.

657. Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од његовог полуобима.

658. Дат је троугао ABC. Ако симетрала угла код темена C са симетралом странице AB образује угао једнак половини угла код темена C, онда је трогао ABC правоугли. Доказати.

659. Сваки од 30 ученика једног одељења поклонио је школској библиотеци по неку књигу. Највише, 8 књига, поклонио је Дуле. Доказати да постоји бар 5 ученика који су поклонили исти број књига.

VII разред

660. Децимални број $19.98199819981998\ldots$ написати у облику разломка.

661. Збир првих n природних бројева је троцифрен број са једнаким цифрама. Одредити n.

662. У паралелограму $ABCD$ страница $AB = 30\,cm$, а угао $\sphericalangle DAB = 60^\circ$. Симетрала угла DAB сече страницу CD у тачки E тако да важи $P_{ABCE} = 2 \cdot P_{\triangle AED}$. Колика је површина паралелограма $ABCD$?

663. Кружница $k(O, r = 3\,cm)$ уписана у троугао ABC додирује страницу BC у тачки T. Израчунати дужину странице BC, ако је $\sphericalangle BAC = 30^\circ$ и ако је $\sphericalangle BOT : \sphericalangle COT = 3 : 4$.

664. Десет ученика имају заједно 100 динара. Сваки учник има најмање један динар и сви имају различит, а цео, број динара. Доказати да међу њима постоји 6 ученика који заједно имају мање од 66 динара.

VIII разред

665. За које вредности реалног броја p једначина $3 - \dfrac{x-p}{2} = x$ има целобројна решења по x, која задовољавају услов $|x| < 2$?

666. У троуглу ABC мерни бројеви свих страница су природни бројеви, а највећа страница је $2\,cm$. Израчунати површину троугла ABC, ако је $h_c = h_a + h_b$.

667. У троуглу ABC угао ACB је $60°$. Ако су AK и BM висине и C_1 средиште странице AB, тада је троугао KMC_1 једнакостраничан. Доказати.

668. Једно теме коцке удаљено је од дијагонале коцке $7\,cm$. Израчунати површину и запремину коцке.

669. Коцку сира ивице $14\,m$ напало је 1998 мишева. Доказати да се непосредно после напада може исећи коцка сира ивице $1\,m$ (кубни метар) унутар које се не налази ниједан миш.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

IV разред

670. Ако у неком броју изоставимо 0 која се налази на месту јединица, онда је новодобијени број за 1998 мањи од првобитног. Који је то број?

671. Лека има три пута више новца од Жарка. Ако обојица потроше по 10 динара тада ће Лека имати четири пута више новаца од Жарка. Колико новца је имао свако од њих на почетку?

672. Дешифровати сабирање $**** + *** = 1998$ ако сваки од непознатих сабирака има једнаку вредност било да га читамо с лева у десно, било да га читамо с десна у лево.

673. Ако се једна страница квадрата повећа за $3\,cm$, а друга за $6\,cm$, онда новодобијени правоугаоник има површину која је за $1998\,cm^2$ већа од површине квадрата. Израчунати обим датог квадрата и обим добијеног правоугаоника.

674. Два оца и два сина играли су шах по систему да свако са сваким игра по једну партију. Колико је том приликом одиграно најмање партија, а колико највише партија?

V разред

675. Неки посао Душко би завршио за 12 дана, Ташко за 15 дана, а Рашко за 20 дана. Радили су заједно 4 дана, а потом је остатак посла завршио Ташко. Колико дана је укупно радио Ташко?

676. Одредити два разломка са двоцифреним имениоцима, тако да је њихов збир $\frac{145}{1998}$.

677. Дат је квадрат $ABCD$ странице $5\,cm$. Конструисати тачку M која је једнако удаљена од темена A и B и која је од темена C удаљена $3\,cm$. Колико има решења?

678. Одредити природан број ЈОВАН (једнаким словима одговарају једнаке цифре, различитим словима одговарају различите цифре) коме је збир цифара једнак 10, такав да збир петоцифрених бројева ЈОВАН и НАВОЈ представља петоцифрен број чије су све цифре једнаке. Колико решења има?

679. Дато је 8 на изглед једнаких златника од којих је 7 исправних једнаке масе, а осми, неисправан, је нешто лакши од осталих 7. Са два мерења на теразијама без тегова, одредити који је златник неисправан.

VI разред

680. У три цистерне је било 780 литара млека. Када из прве одлијемо једну четвртину, из друге једну петину, а из треће три седмине млека, у цистернама остану једнаке количине млека. Колико млека има у свакој од цистерни?

681. Дато је пет различитих целих бројева a, b, c, d и e таквих да је $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$. Одредити $a+b+c+d+e$.

682. Нека је тачка M средиште странице CD паралелограма $ABCD$. Права AM сече дијагоналу BD у тачки N. Ако права CN сече страницу AD у тачки P, онда је $AP = PD$. Доказати.

683. Дате су три различите, произвољне тачке A, B и C. Конструисати тачку M тако да добијени скуп тачака $\{A, B, C, M\}$ има особину да садржи два пара централно симетричних тачака. Испитати све могуће случајеве.

684. Дат је израз $12\frac{1}{2} \cdot 2 + 0.2 \cdot 25 : 5 - 5 \cdot 1\frac{8}{15} : \frac{2}{3} - 1.1$. Не мењајући поредак бројева у датом изразу, поставити неколико заграда тако да вредност добијеног израза буде 0.

VII разред

685. Ако је n природан број, онда је $n^3 + 1997\,n + 1998$ дељиво са 6. Доказати.

686. Дужина странице ромба је $9\,cm$, а дужина збира његових дијагонала је $24\,cm$. Одредити површину ромба.

687. Када се број страница конвексног многоугла удвостручи, онда се број његових дијагонала повећа за 1998. За колико се степени при том повећа збир његових унутрашњих углова?

688. Нека су тачке M и N редом средишта страница AB и BC троугла ABC и нека је права s симетрала $\sphericalangle BAC$. Ако се праве s и MN секу у тачки P, онда је $\sphericalangle APB$ прав. Доказати.

689. Колико се различитих четвороцифрених бројева може написати цифрама 1, 8 и 9 тако да се свака цифра употреби бар једном?

VIII разред

690. У xOy координатној равни дата је права $4x + 7y = 1998$. Колико тачака на датој правој имају обе координате целобројне и припадају првом квадранту координатне равни?

691. У троугаоној форми, ред за редом, поређани су златници и сребрњаци: у првом реду 1 златник; у другом реду 2 сребрњака; у трећем реду 3 златника; у четвртом реду 4 сребрњака, ... Колико има укупно сребрњака, ако је пребројано укупно 625 златника? Колико има могућих решења?

692. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ тако да је $AB + AD = 10\,cm$, $BC = CD$ и $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD = 90°$. Израчунати површину датог четвороугла.

693. У једнакокраком трапезу $ABCD$ ($AB \parallel CD$) основица $AB = 12\,a$ и основица $CD = 4\,a$. Тачке E и F су редом средишта основица CD и AB. Ако се праве AE и DF секу у тачки M, праве BE и CF секу у тачки N, израчунати дужину дужи MN у функцији од a.

694. Бочне стране ABS, BCS и CAS тростране пирамиде $ABCS$ су међусобно нормалне и имају редом површине $54\,cm^2$, $96\,cm^2$ и $72\,cm^2$. Израчунати запремину пирамиде и мерне бројеве сваке од ивица пирамиде.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

VI разред

695. Гоца и Нина имају једнак број јабука. Гоца своје јабуке продаје по цени 3 јабуке за 1 динар, а Нина 2 јабуке за 1 динар. Ако саставе јабуке и продају их по цени 5 јабука за 2 динара, онда ће зарадити 4 динара мање него да јабуке продају појединачно. Колико јабука су имале Гоца и Нина, ако и при појединачној и при заједничкој продаји не остане ниједна јабука?

696. Пеђа кружну стазу претрчи за 24 минута. Ако Дејан и Пеђа трче различитим смеровима, онда се на стази сусретну после 9 минута. Ако Дејан и Пеђа трче истим смером, после колико времена ће се први пут срести и када ће се први пут истовремено наћи у почетној тачки?

697. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена B. Кроз тачку A конструисана је права p паралелна са BC и на правој p изабрана тачка K, тако да су K и C са разних страна праве AB. Ако права CK сече страницу AB у тачки M и ако је $MK = 2 \cdot AC$, онда је $\sphericalangle ACB = 3\sphericalangle KCB$. Доказати.

698. Дат је трапез $ABCD$. Симетрале спољашњих углова трапеза код темена A и D секу се у тачки M, а симетрале спољашњих углова код темена B и C секу се у тачки N. Ако је $MN = 999\,cm$, колики је обим трапеза $ABCD$?

699. Трговац Миле је купио извесну количину пасуља по цени од 5 динара и 163 килограма пасуља по цени од 10 динара. Затим је обе количине пасуља помешао и добијену мешавину продавао за 8 динара по килограму. Када је распродао пасуљ, платио је 23% пореза на укупан промет пасуља. Потом је утврдио да сада има 1998 динара више него пре почетка посла. Колико килограма пасуља је продао трговац Миле?

VII разред

700. Доказати да збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити квадрат ниједног природног броја.

701. Збир четвороцифрених бројева $\overline{1abc}$ и $\overline{cba1}$ је број $\overline{bbdd}$. Дешифруј дато сабирање, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.

702. Најмања дијагонала правилног дванаестоугла је $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,cm$. Одредити обим и површину датог правилног дванаестоугла.

703. Кроз центар O_1 кружнице k_1 пролази кружница k_2. Дате кружнице се секу у тачкама A и B. Кроз тачку B конструисана је тангента t кружнице k_2 која кружницу k_1 пресеца у тачки C. Доказати да је $AB = BC$.

704. Дат је правоугли трапез $ABCD$, са правим углом код темена B, чије су основице $AB = 8\,cm$ и $CD = 4\,cm$, а крак $BC = 4\,cm$. У датом трапезу на случајан начин је изабрано 17 тачака. Доказати да међу изабраним тачкама постоје бар две тачке чије међусобно растојање није веће од $\sqrt{5}\,cm$.

VIII разред

705. Наћи решење система једначина

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y - 3,$$
$$y^2 + z^2 = 4y + 4z + 5,$$
$$z^2 + x^2 = 4z + 4x + 2,$$

у скупу реалних бројева.

706. Дато је пет било којих природних бројева. Доказати да се међу њима увек могу изабрати два природна броја m и n тако да је $m^4 - n^4$ дељиво са 15.

707. Збир основне ивице a и висине H правилне шестостране призме је $10\,cm$. Одредити a и H, тако да је дужа дијагонала призме најмања могућа. Израчунати површину и запремину те призме.

708. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки O, а подножје нормале из тачке B на дијагоналу AC је тачка M, при чему је $BM = 2k \cdot BO$, где је k реалан број. Ако је површина тог четвороугла P, онда је $P = k \cdot AC \cdot BD$. Доказати.

709. У квадрату $ABCD$ дијагонале AC и BD секу се у тачки O. На страницама BC и CD дате су редом тачке M и N тако да је $BM = CN$. Ако се праве AM и BN секу у тачки P, онда је права OP симетрала угла APN. Доказати.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

VI разред

710. Две јабуке теже колико 3 крушке, а 3 јабуке теже као 4 поморанџе. Сем тога 6 крушака кошта колико 5 поморанџи. Шта је скупље: килограм крушака или килограм поморанџи?

711. О четвороцифреним бројевима a, b, c знају се следећи подаци:

- две средње цифре броја a једнаке су као две одговарајуће средње цифре броја c;
- две средње цифре броја b међусобно су једнаке и једнаке су првој цифри броја c;
- прва цифра броја a једнака је последњој цифри броја c;
- обрнуто, прва цифра броја c једнака је последњој цифри броја a;
- прве цифре бројева a и b су међусобно једнаке;
- број c једнак је збиру бројева a и b;

(а) Одредити број b.

(б) Колико постоји различитих могућности за број a?

712. У неједнакокраком оштроуглом троуглу ABC из темена A конструисана је тежишна дуж, из темена B конструисана је симетрала угла β, а из темена C висина. Пресечне тачке датих правих су тачке P, Q и R. Доказати да добијени троугао PQR није једнакостраничан.

713. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека је тачка M средиште странице AB, а тачка N средиште странице CD.

(а) Доказати да је $AD + BC \geq 2 \cdot MN$.

(б) Какав је четвороугао $ABCD$, ако важи једнакост?

714. Једнакостранични троугао странице $8\,cm$, издељен је на једнакостраничне троуглове странице $1\,cm$ повлачењем правих паралелних са страницама датог троугла. Колико укупно једнакостраничних троуглова постоји на тако добијеној слици?

VII разред

715. Одреди цифре x, y и z тако да у декадном систему важи једнакост: $\dfrac{1}{x+y+z} = \overline{0.xyz}$.

716. Нека су a и b цели бројеви такви да је израз $a^2+9ab+b^2$ дељив са 11. Доказати да је тада израз a^2-b^2 дељив са 11.

717. У једнакокраком троуглу ABC је угао при врху $\sphericalangle CAB = 30°$, а висина из темена A је $2\,cm$. Одредити целе бројеве m, n и p, тако да је крак троугла $b = m\sqrt{2}(n\sqrt{3}+p)$.

718. Нека је m дужина средње линије, а h дужина висине трапеза чије су дијагонале нормалне. Доказати да је $m \geq h$.

719. Може ли на математичкој олимпијади присуствовати 1999 учесника (рачунајући и госте), ако сваки од њих има тачно 3 пријатеља међу учесницима?

VIII разред

720. Одредити најмањи природан број n, који има број делилаца једнак броју делилаца броја 1998, при чему се делиоцима природног броја сматрају и 1 и сам тај број.

721. Нека су n и k природни бројеви. Дати су искази:

1) $n+1$ је дељиво са k;

2) $n = 2k+5$;

3) $n+k$ је дељиво са 3;

4) $n+7k$ је прост броја.

Одредити све вредности за n и k, ако се зна да су три од четири дата исказа тачна, а један нетачан.

722. Права правилна четворострана пирамида $SABCD$ чија је висина $8\,cm$ и бочна ивица $10\,cm$, пресечена је са равни која садржи теме A и нормална је на бочну ивицу SC. Ова раван сече бочне ивице SB, SC и SD редом у тачкама K, L и M.

а) Доказати да је права KM паралелна са BD.

б) Израчунати површину четвороугла $AKLM$.

723. У произвољном конвексном петоуглу $ABCDE$ дужина странице AE је $4\,cm$. Нека су P, Q, S и T редом средишта дужи AB, CD, BC и DE, а M и N редом средишта дужи PQ и ST. Израчунати дужину дужи MN.

724. Квадрат је подељен на пет дисјунктних правоугаоника једнаких површина тако да темена квадрата припадају различитим правоугаоницима, а пети правоугаоник нема заједничких тачака са страницама квадрата. Доказати да је тај пети правоугаоник квадрат.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА ДРУГОЈ ЈУНИОРСКОЈ МАТЕМАТИЧКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

725. Разбојник је пронашао пећину са златом, дијамантима и сандуком са којим може изнети благо. Пун сандук злата тежи $200\,kg$, пун сандук дијаманата $40\,kg$. Килограм злата се може продати за 20 дуката, а килограма дијаманата за 60. Разбојник може одједном да подигне и изнесе терет не већи од $100\,kg$. Колико највише дуката може добити за благо које би изнео одједном?

726. На страницама BC и CD правоугаоника $ABCD$ дате су редом тачке E и F тако да је троугао AEF једнакостраничан. Ако је тачка M средиште дужи AE, онда је и троугао CDM једнакостраничан. Доказати.

727. Одреди најмањи природан број n за који је вредност израза

$$\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}}$$

природан број.

ДРУГА ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА БАЛКАНИЈАДА

728. Доказати да је број

$$\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5$$

потпун квадрат.

729. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$, такав да је $AB = AE = CD = 1$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEA = 90^\circ$ и $BC + DE = 1$. Наћи површину петоугла $ABCDE$.

730. Наћи све парове позитивних целих бројева (x, y) који задовољавају једначину $x^y = y^{x-y}$.

731. Да ли је могуће, користећи само три цифре, написати 16 троцифрених бројева, тако да међу њима не постоје два броја који имају исти остатак при дељењу са 16?

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1999.

IV разред

732. Разлици бројева 23 456 и 19 876 додај разлику највећег петоцифреног и најмањег троцифреног броја.

733. Син и ћерка имају заједно 29 година. Отац је старији од сина 25 година, а мајка од ћерке 22 године. Колики је збир година оца и мајке?

734. Ако 20. фебруара 1999. године у 17 часова у Ваљеву пада киша, може ли се очекивати да ће кроз 1999 сати бити сунчано време?

735. Колику дебљину би имала књига од 1 999 000 страница, ако 100 листова (200 страница) те књиге има дебљину $2\,mm$?

736. Шта је веће $43\,km^2$ и $5\,ha$ или $435\,768\,a$?

V разред

737. Уместо $*$ напиши одговарајуће цифре, тако да наведене операције буду тачно извршене

$$\begin{array}{rr} *23\cdot **= & 16*2 \\ + & \underline{***5} \\ & ***** \end{array}$$

738. Пресек скупова A и B има 6 елемената, а њихова унија 18 елемената. Колико елемената има скуп $B\setminus A$, ако скуп $A\setminus B$ има 4 елемената?

739. Мера угла $\alpha+\beta$ је за $38^\circ 41' 24''$ већа од мере угла $\alpha-\beta$. Одредити меру угла β.

740. Одредити најмањи и највећи шестоцифрен број с различитим цифрама који је дељив са 9.

741. Ако ивицу коцке повећамо за $1\,cm$ онда се њена површина повећа за $66\,cm^2$. За колико се повећала запремина коцке?

VI разред

742. Који знак има производ xyz ако је $xy > 0$, $xz < 0$ и $z < 0$? Одговор образложити.

743. Маса тела на Месецу износи $\frac{4}{25}$ масе тела на Земљи. Ако је човекова маса на Земљи $80.25\,kg$, колика би била на Месецу?

744. Дате су једначине: $1-999\cdot(x-1)=1999$ и $19-99\cdot(y-1)=1999$. Одредити збир решења датих једначина.

745. У једнакокраком троуглу ABC ($AC=BC$) крак AC је продужен преко темена C до тачке D, тако да је $CD=CA$. Доказати да је троугао ABD правоугли.

746. У троуглу ABC, страница AC је већа од странице BC, а симетрала угла γ сече страницу AB у тачки D. Који од углова $\sphericalangle ADC$ и $\sphericalangle BDC$ је већи?

VII разред

747. Шта је веће: $5+2\sqrt{7}$ или $3\sqrt{3}+2\sqrt{6}$?

748. Доказати да је израз 16^5+2^{15} дељив са 33.

749. Производ три узастопна парна природна броја је 13 728. Одредити те бројеве.

750. У полукруг полупречника r уписати квадрат. Израчунати површину квадрата у зависности од r.

751. Дат је троугао ABC чија је површина $1999\,cm^2$. Странице AB, BC и CA продужене су преко темена B, C и A за своју дужину тако да је $AB=BA_1$, $BC=CB_1$ и $CA=AC_1$. Израчунати површину добијеног троугла $A_1B_1C_1$.

VIII разред

752. На једној страни диедра чији је угао 60°, дата је тачка M. Њено одстојање од друге стране диедра је $8\sqrt{3}\,cm$. Колико је њено одстојање од ивице диедра?

753. Аутомобилиста једног дана пређе $\frac{4}{9}$ свог укупног пута, другог дана $\frac{9}{20}$ од преосталог дела пута, а трећег дана $330\,km$. Колики је био укупан пут овог аутомобилисте?

754. Решити једначину: $|2x-0.5|=0.2$.

755. Ако се основна ивица правилне четворостране призме висине $10\,cm$ повећа за $3\,cm$, онда се запремина призме повећа за $210\,cm^3$. Израчунати површину и запремину призме.

756. Дат је једнакокраки троугао чија је основица $10\,cm$, а крак $13\,cm$. Израчунати површину њему сличног троугла чија је дужа висина $24\,cm$.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1999.

IV разред

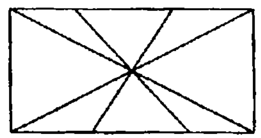
757. Помоћу цифара 0, 2, 3, 5, 6, 7 и 8 написати најмањи и највећи шестоцифрени број користећи сваку цифру:

а) само једанпут; б) највише три пута.

758. У првом сандуку има 1999 јабука више него у другом. У ком сандуку ће бити више јабука, и за колико, ако из првог сандука пренесемо у други 1000 јабука?

759. Колико је керамичких плочица облика квадрата, странице $15\,cm$, потребно за покривање пода правоугаоне просторије чије су димензије $12\,m$ и $27\,m$?

760. Бројеве 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 и 38 распореди у поља квадрата 3×3 тако да у сваком од 9 поља буде по један број, при чему се бројеви не смеју понављати и при чему је збир бројева у свакој хоризонтали, вертикали или дијагонали различит.



Слика уз задатак 761

761. Колико дужи и колико троуглова је нацртано на датој слици?

V разред

762. Дати су скупови: $A = \{1, 2, x, 5, 9\}$ и $B = \{2, y, 3\}$. Одредити све бројеве x и y, такве да скуп B има три различита елемента, при чему је $B \subset A$.

763. Колико има природних бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 4 ни са 6?

764. Одредити скуп природних бројева који су решења неједначине: $1 \leq \frac{x-2}{2} \leq 2$.

765. Два радника копају канал. Први за 6 сати ископа $\frac{12}{25}$ целе дужине канала, а други за 3 сата ископа $\frac{6}{23}$ целе дужине канала. Који радник има бољи учинак за један сат рада?

766. Разлика углова α и β је суплементна са њиховим збиром. Одредити углове α и β, ако је угао β једнак осмини угла α.

VI разред

767. Возећи између града A и града B бициклиста је првог дана прешао $\frac{1}{4}$, а другог дана 30% целог пута. До циља је преостало још $180\,km$. Колико је растојање између та два града?

768. Дат је број $p = -0.5$. Израчунати вредност израза $x^2 + y^2$, ако је $x = -|-1 + |-p||$ и $y = -|-1 - |p||$.

769. Дат је једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$) чији је $\sphericalangle ACB = 44°$. Симетрала крака AC сече крак BC у тачки D, а праву AB у тачки E. Упоредити дужи: DA, DB, DC и DE.

770. На страници CD квадрата $ABCD$ дате су тачке E и F тако да $CE = EF = FD$. Дужи AE и BF секу се у тачки M. Доказати тврђења:

а) $\triangle AED \cong \triangle BFC$.

б) Троугао EFM је једнакокраки.

771. На општинском такмичењу младих математичара учествује 123 ученика од IV до $VIII$ разреда. Доказати да је број такмичара бар из једног разреда већи од 24.

VII разред

772. После два снижења за исти број процената, цена робе се снизила са 25 хиљада на 16 хиљада динара. Колико процената је износило то снижење ?

773. Шта је веће: $\sqrt{6 + \sqrt{6}}$ или 3.00001?

774. Дат је конвексни четвороугао $ABCD$ ($ABCD$ није паралелограм). Нека су M, N, P и Q редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

775. Дат је троугао ABC тако да је $AB = 15\,cm$, $\sphericalangle BAC = 60°$ и $AC = 8\,cm$. Израчунати висине датог троугла.

776. Доказати једнакост: $|\frac{a^2+b^2}{2} - ab| + |\frac{a^2+b^2}{2} + ab| = a^2 + b^2$.

VIII разред

777. У једној цистерни има $540\,l$ воде, а у другој $360\,l$. Из прве се за један сат одлије 3 пута више воде него из друге. Кроз 6 сати у првој цистерни ће остати $60\,l$ воде мање него у другој. Колико литара воде се одлива сваког сата из прве, а колико из друге цистерне?

778. Решити неједначину $(x-3)^2 < x(x-3)$ и решења приказати на бројевној правој .

779. Дужине страница основе квадра су $6\,cm$ и $8\,cm$, а дијагонала квадра заклапа са основом квадра угао од 45°. Одредити површину и запремину квадра.

780. Дат је круг $k(O, r = 3\,cm)$ и тачка M изван круга тако да је $OM = 7\,cm$. Права p која садржи тачку M сече круг у тачкама C и D ($MD > MC$). Ако је $MC = 5\,cm$, израчунати дужину тетиве CD.

781. Дат је скуп тачака A, B, C, D, E које припадају правој p и ван праве p (у истој равни) тачке F, G, H. Колико је:

а) највише; б) најмање

троуглова одређено овим тачкама?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1999.

IV разред

782. Двојица моторциклиста кренули су истовремено из места A у место B, један другом у сусрет. Први се кретао брзином од $1\,km$ у минуту, а други брзином од $800\,m$ у минуту. Када су се срели, први моторциклиста је прешао $66\,km$ више од другог. Колико је растојање између места A и места B?

783. Површина једног винограда је $199900\,m^2$. Дужина баште је 4 пута мања од дужине винограда, а ширина баште је 5 пута мања од ширине винограда. Колика је површина баште?

784. У изразу $2 * 4 * 6 * 8 * 10 = 9 * 9$ заменити $*$ знацима рачунских операција и заграда, тако да добијена једнакост буде тачна. Урадити то на три начина.

785. Дата је једнакост $AAA \cdot B + C = 1999$. Дешифровати дату једнакост, тако што уместо слова A, B и C треба написати одговарајуће цифре, при чему једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре. Колико различитих решења има?

786. Миша је у забавном парку купио 5 жетона и започео игру против компјутера. У свакој партији у којој Миша победи компјутер, као награду, добија нових 5 наградних жетона. По завршетку игре Миша се хвалио да је одиграо 50 партија и 8 пута победио компјутер. Његов друг Горан је тврдио да је то немогуће. Ко је био у праву Миша или Горан?

V разред

787. Јоца је замислио један број. Затим га је повећао 4.5 пута, а потом га умањио за 12.3 и добио 5.7. Који број је замислио Јоца?

788. Један канап пресечен је на два дела, тако да је један део једнак половини канапа увећаној за $0.5\,m$. Ако се други део канапа подели тако да његов већи део буде једнак половини канапа увећаној за $0.5\,m$, онда је преостали део канапа $1.5\,m$. Колика је укупна дужина канапа?

789. Одредити најмањи седмоцифрен природан број који је дељив са 36 и чије су све цифре различите.

790. Дата је права p и две тачке A, B са исте стране праве p (права AB није ни паралелна са правом p, ни нормална на праву p). Конструисати концентричне кружнице k_1 и k_2 тако да кружница k_1 додирује праве p и AB, а кружница k_2 садржи тачке A и B.

791. Распоредити 14 тачака на 7 правих тако да на свакој правој буду по 4 тачке.

VI разред

792. Нека су α, β и γ углови троугла ABC. Израчунати углове α, β и γ, ако је $\alpha = 0.4\,\beta$ и $\gamma = 4\,\alpha$.

793. Два друга Јанко и Марко добили су једнаке суме новца. Марко је купио бомбоне чија је цена 40 динара за килограм, а Јанко друге бомбоне чија је цена 60 динара за килограм. Затим су те бомбоне помешали. Колика је цена једног килограма мешавине купљених бомбона?

794. Конструисати троугао ABC, ако су дати следећи елементи: страница $AB = 4\,cm$, тежишна дуж $BB_1 = 5\,cm$ и угао $\sphericalangle ABC = \beta = 60°$.

795. Из темена B и D паралелограма $ABCD$ конструисане су нормале BE и DF на дијагоналу AC. Доказати да је $BEDF$ паралелограм.

796. Збир 1999 различитих простих природних бројева је паран број.
а) Да ли је производ тих 1999 простих бројева паран или непаран број?
б) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир паран број.
в) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир непаран.

VII разред

797. Ако су краци неједнакокраког трапеза међусобно нормални, онда је збир квадрата његових основица једнак збиру квадрата његових дијагонала. Доказати.

798. Израчунати површину правилног дванаестоугла, ако је полупречник круга описаног око дванаестоугла једнак $6\,cm$.

799. Одредити вредност полинома $P(x,y) = x^{1998} + 1999y$ ако је $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$.

800. Дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ са оштрим углом код темена A, секу се у тачки O. Тачка M је на правој AB, при чему је $\sphericalangle AMO = \sphericalangle MAD$. Доказати да је тачка M једнако удаљена од тачака C и D.

801. Доказати да међу 26 различитих непарних бројева мањих од 100 постоје бар два чији збир је једнак 100.

VIII разред

802. У координатној xOy равни дате су тачке $O(0,0)$, $M(3,4)$ и $N(x,0)$. Одредити једначине правих OM и MN, ако је површина троугла OMN једнака 14.

803. Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде чија је висина $17\,cm$, а површина дијагоналног пресека $204\,cm^2$.

804. Доказати да број чији декадни запис садржи једино цифре 2 и 6 није разлика квадрата два природна броја.

805. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине P. Доказати да је $AB \cdot BC + CD \cdot DA \geq 2P$.

806. Дата је шаховска табла 8×8 и 3 топа различите боје. На колико се начина могу разместити 3 топа тако да се они међусобно не „нападају“. (Топови се „нападају“ ако се налазе у истој хоризонтали или вертикали.)

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 3. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

807. Дате су једначине $x^2 - y^2 = 4^n$ и $x^2 - y^2 = 5^{1999}$, при чему су непознате x и y природни бројеви. Одредити природан број n, тако да дате једначине имају једнак број решења.

808. На табли је написан деветоцифрен број чије су све цифре различите и различите од нуле. Доказати да је за ма који распоред цифара могуће избрисати неке од датих цифара, тако да преостали број буде потпун квадрат који је најмање двоцифрен број.

809. Дат је скуп бројева $S = \{1, 3, 5, 7, -8, -12, 13, -14, -16, 21\}$. Иван и Јелена играју следећу игру: наизменично узимају по један број из скупа S. Победник је играч који на крају има већу апсолутну вредност збира изабраних бројева. Ако Јелена игра прва, може ли изабрати такву стратегију да обавезно побеђује?

810. Дат је трапез $ABCD$ $(AB > CD)$. Продужеци кракова AD и BC секу се у тачки E, а средишта дужи AB и CD су редом тачке M и N. Одредити угао AEB, ако је $MN = \frac{1}{2}(AB - CD)$.

811. У равни α је дато n кругова једнаких полупречника, при чему је центар сваког круга изван преосталих $n-1$ кругова. Ако је M унутрашња тачка свих кругова, доказати да је $n \leq 5$.

ТРЕЋА ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА БАЛКАНИЈАДА

812. Нека су a, b, c, x, y реални бројеви, такви да је $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ и $c^3 + cx + y = 0$. Ако је $a \neq b \neq c \neq a$, доказати да је $a + b + c = 0$.

813. За сваки број $n = 0, 1, \ldots, 1999$ број A_n је дефинисан са $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Наћи највећи заједнички делилац бројева $A_0, A_1, \ldots, A_{1999}$.

814. Дат је квадрат S дужине странице 20. Нека је M скуп чији су елементи четири темена квадрата S и 1999 произвољних унутрашњих тачака квадрата S. Доказати да постоји троугао са теменима из скупа M чија површина је мања или једнака $\frac{1}{10}$.

815. Дат је једнакокраки троугао ABC, $AB = AC$. Нека је D произвољна тачка дужи BC таква да је $BC > BD > DC > 0$. Нека су редом k_1 и k_2 описани кругови троуглова ABD и ADC. Нека су редом BB' и CC' дијаметри кругова k_1 и k_2, и M средиште дужи $B'C'$. Доказати да је површина троугла MBC константна, односно не зависи од положаја тачке D.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

IV разред

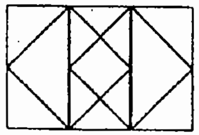
816. При сабирању неколико бројева ученик је направио следеће грешке: у једном сабирку цифру јединица 2, заменио је са 9, цифру десетица 4 са 7 и цифру стотина 8 са 3. За колико је промењен тачан збир?

817. За три месеца Нада је потрошила 1350 динара. Првог и другог месеца је потрошила 856 динара, а другог и трећег 800 динара. Колико динара је потрошила Нада првог и трећег месеца заједно?

818. Одредити решење једначине $10^5 - x = 2000$.

819. Збир обима три једнака правоугаоника износи $360\,cm$. Израчунати дужину и ширину једног од ових правоугаоника ако је дужина за $1\,dm$ већа од ширине.

820. Колико троуглова има на датој слици?



V разред

821. Скупови A и B дати су следећим једнакостима: $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$ и $B \setminus A = \{4,5\}$. Одредити скупове: $A \setminus (A \cap B)$ и $(A \cup B) \setminus B$.

822. Дате су кружнице $k_1(M, 3\,cm)$ и $k_2(N, 2\,cm)$ које се додирују: (а) споља; (б) изнутра.
Конструисати дате кружнице и израчунати растојање MN.

823. Доказати да је збир свих природних бројева од 1 до 1000 дељив са 7.

824. Углови α и β су суплементни, а пет шестина угла α и трећина угла β су комплементни углови. Одредити углове α и β.

825. Дешифровати сабирање: $AB + ABC + ABCD = 2000$, ако једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре.

VI разред

826. Троуглови ABC и $A'B'C'$ су подударни. На страницама AB и $A'B'$ редом су изабране тачке M и M' такве да је $\sphericalangle BCM = \sphericalangle B'C'M'$. Доказати да је $AM = A'M'$.

827. Одредити цифре a и b тако да број $\overline{a2000b}$ буде дељив са 36.

828. На правој AB, одређеној хипотенузом правоуглог троугла ABC дате су тачке D и E. Ако тачке D и E не припадају страници AB и ако је $AD = AC$, а $BE = BC$, израчунати $\sphericalangle DCE$.

829. Одредити све природне бројеве који не задовољавају неједначину $|x+2|(5x-15) > 0$.

830. У правоуглом троуглу један од углова једнак је $40°$. Доказати да симетрала правог угла полови угао који образују висина и тежишна дуж из темена правог угла.

VII разред

831. Шта је веће: $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5} + 7$?

832. Конструисати квадрат чија је површина $20\,cm^2$.

833. У једној школи је 35% девојчица, а дечака је за 252 више него девојчица. Колико у школи има дечака, а колико девојчица?

834. Израчунати обим троугла чија је једна страница дужине $24\,cm$, а одговарајућа висина и тежишна дуж $8\,cm$, односно $10\,cm$.

835. Славина A пуни базен за 12 часова, а славина B за 15 часова. Одводна цев C празни базен за 10 часова. За које време ће се напунити базен ако су истовремено отворене славине A и B и одводна цев C?

VIII разред

836. Колико је равни одређено са 2000 правих које се секу у једној тачки и од којих по три не припадају истој равни?

837. Лека и Жарко су поделили 1416 динара. Када је Лека потрошио $\frac{4}{7}$ свога дела, а Жарко $\frac{3}{8}$ свога, имали су једнаке износе. Колико новца је свако од њих добио приликом поделе?

838. Ако се свака ивица коцке повећа за 30%, за колико процената се повећа површина, а за колико запремина коцке?

839. У троуглу ABC је $\sphericalangle BAC = 36°$. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла BAC секу праву BC редом у тачкама M и N, тако да је $AM = AN$. Ирачунати остале углове троугла ABC.

840. Одредити све природне бројеве n такве да је $n^2 + 2n + 2000$ потпун квадрат.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

IV разред

841. Из два пристаништа кренула су истовремено, један другом у сусрет, два брода. Први брод се кретао брзином од $22\,km/h$, а други брод брзином $28\,km/h$. Колико је растојање између пристаништа, ако су се бродови срели после 40 часова путовања?

842. Пера, Васа и Огњен имају заједно 160 кликера. Ако Пера да Огњену 17 кликера, а Васа поклони Огњену 12 кликера, онда ће Пера и Васа имати једнак број кликера, а Огњен колико и Пера и Васа заједно. Колико кликера је имао сваки дечак?

843. Ако се једна страница квадрата повећа два пута, а друга за $22\,mm$, добије се правоугаоник чији је обим за $2000\,mm$ већи од обима датог квадрата. Колика је страница датог квадрата?

844. Дат је двоцифрени број. Ако му се са десне стране допише исти тај број добија се четвороцифрен број. Колико пута је добијени број већи од датог броја?

845. Конструисати магични квадрат чији су елементи бројеви: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 и 27.

V разред

846. Дати су скупови: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Одредити скуп X ако је $X \subset (A \cup B)$, $X \cap A = A \setminus B$ и $X \cap B = B \setminus A$.

847. Весна са 77 корака једнаке дужине пређе $67\,m$, а Иван са 88 корака једнаке дужине пређе $78\,m$. Чији корак је дужи и за колико?

848. Дат је збир бројева $\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a}$. Коју цифру треба написати уместо слова a тако да добијени збир буде дељив са 9?

849. Углови a и b су суплементни, а углови b и c комплементни. Израчунати углове a, b и c, ако је збир углова a и c једнак $142°$.

850. За учвршћивање једне коњске потковице, потковач употреби 5 минута. Колико најмање времена треба да 48 потковача поткују 60 коња, ако приликом потковања коњ мора стајати на три ноге?

VI разред

851. Одредити све целе бројеве x за које је $6 < -(-x) < 10$ и $|x| < 8$.

852. Три друга Жарко, Лека и Пеђа деле извесну суму новца. Жарко је добио трећину, Лека четвртину остатка, а Пеђа 100 динара више од Жарка. Колико новца је било и колико је свако од њих добио?

853. На страницама AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$, дате су редом тачке M, N, P и Q, тако да је $AM = BN = CP = DQ$. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ такође квадрат.

854. Унутрашњи углови троугла ABC односе се као $9 : 16 : 20$. Одредити угао између симетрале угла и висине из темена највећег угла троугла.

855. Раша има шуму облика правоугаоника димензија $30\,m$ и $70\,m$, у којој се налази 34 стабла. Може ли Раша у својој шуми наћи правоугаоно парче земље димензије $6\,m$ са $10\,m$, на коме нема ниједног стабла?

VII разред

856. Поређати по величини бројеве: $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$ и $d = 5^{18}$.

857. Одредити бројевну вредност израза:

$$0.4 \cdot \sqrt{6\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} - 12\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

858. Израчунати површину трапеза ако су основице трапеза $a = 30\,cm$ и $b = 16\,cm$, а краци $c = 15\,cm$ и $d = 13\,cm$.

859. Нека су P, Q, R, S средишта страница ромба $ABCD$ чија је страница $a = 5\,cm$, а једна дијагонала $d_1 = 8\,cm$. Доказати да је четвороугао $PQRS$ правоугаоник и израчунати његову површину.

860. Аца, Богдан и Цеца треба да поделе 2000 динара тако да се делови које добију Аца и Богдан односе као 2 : 3, а делови које добију Богдан и Цеца као 9 : 5. Одредити колико ће свако од њих добити новца.

VIII разред

861. На излет није пошло 174 ученика једне школе, а остали ученици су отпутовали у 18 једнаких аутобуса, при чему је у сваки аутобус ушло по 5 ученика више него што је у аутобусу било седишта. Да је у сваки аутобус ушло онолико ученика колико има седишта, била би потребна још три аутобуса, а у једном од њих би остало 6 празних места. Колико има ученика у тој школи?

862. Решити једначину: $||||x| + x| + x| + x| + x| = 2000$.

863. Нека су α и β две паралелне равни међусобно удаљене $12\,cm$. У равни α дате су тачке A и C, а у равни β тачке B и D. Одредити угао који права одређена тачкама C и D заклапа са равни α, ако права одређена тачкама A и B заклапа са равни α угао од 30° и ако је $AB + CD = 48\,cm$.

864. Око круга са центром O описан је четвороугао $ABCD$. Доказати да су $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle COD$ суплементни.

865. Кроз теме A паралелограма $ABCD$ конструисана је права p која дијагоналу BD сече у тачки E, праву DC у тачки K и страницу BC у тачки F. Доказати да је $AE^2 = EF \cdot EK$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

IV разред

866. Колико ће се тона сена добити са ливаде дужине $750\,m$ и ширине $200\,m$, ако се са сваког ара просечно накоси $240\,kg$ траве и ако се зна да маса сена чини четвртину масе траве?

867. Трећина збира три броја је 2 000. Ако је други број три пута већи од првог, а трећи за 5 мањи од првог, израчунај те бројеве.

868. Дешифровати одузимање $**** - *** = 2\,000$, ако се и умањеник и умањилац читају једнако с лева у десно и с десна у лево.

869. После одређеног броја радних дана зидари су одлучили да убрзају изградњу, па су свака 3 дана посла скратили на 2 дана. Ако је цео посао завршен за 55, уместо за 70 дана, колико се дана радило пре убрзавања посла?

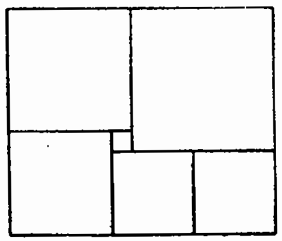
870. Петар, Ана, Марко, Бојан и Гордана су хтели да поделе бомбоне. Свако је редом узимао по једну бомбону док није остало мање него што је њих, а онолико колико је добио свако од њих. Колико је могло бити бомбона? Одредити сва решења.

V разред

871. Аутомобилиста је за 4 сата прешао $360\,km$. Првог сата је прешао $\frac{4}{15}$ целог пута; другог сата $\frac{7}{8}$ пута који је прешао првог сата; трећег сата два пута мање него што је прешао у прва два сата заједно, а четвртог сата преостали део пута. Колико километара је аутомобилиста прешао четвртог сата?

872. Три пекара су, равномерним радом, за два сата умесили 67 хлебова. Колико хлебова би умесила 4 пекара за 3 сата? За колико сати би 5 пекара умесило 335 хлебова?

873. Одредити просте бројеве p и q, ако је $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.



874. На једном конгресу било је 2 000 учесника, од којих је сваки био филозоф или математичар, а један број учесника се бавио и филозофијом и математиком. Колико је било учесника у свакој од три категорије, ако је међу филозофима сваки осми и математичар, а међу математичарима сваки тринаести и филозоф?

875. Правоугаоник (на слици) је састављен од шест квадрата. Израчунати обим и површину правоугаоника, ако је страница најмањег квадрата $1\,cm$.

VI разред

876. У три продавнице је било укупно 2 000 kg јабука. Када је из прве продавнице продата шестина јабука, из друге $\frac{3}{13}$ јабука, а из треће трећина јабука, у све три продавнице је остала иста количина јабука. Колико јабука је било у свакој продавници?

877. Ако се број 1 000 подели неким бројем остатак је 8, а ако се број 900 подели истим бројем остатак је 1. Колики количник је у првом, а колики у другом дељењу?

878. Конструисати троугао ABC, ако су дате тачке A_1, B_1 и C', при чему је A_1 средиште странице BC, B_1 средиште странице AC, а C' подножје висине из темена C.

879. Нека су тачке P, Q, R, S, редом средишта страница AB, BC, CD и DA паралелограма $ABCD$. Даље, нека је $AQ \cap PD = \{K\}$, $AQ \cap RB = \{L\}$, $SC \cap RB = \{M\}$ и $PD \cap SC = \{N\}$. Доказати да је четвороугао $KLMN$ паралелограм и да је $KL = \frac{2}{5}AQ$.

880. Четири дечака су поделили све кликере којима располажу. Први је добио половину кликера и још један кликер. Други је добио половину преосталих кликера и још један кликер. Трећи је добио половину преосталих кликера и још један кликер. Четврти је добио половину преосталих кликера и још један кликер. Колико кликера је добио сваки дечак?

VII разред

881. Да ли је вредност израза $1.494949\cdots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ рационалан или ирационалан број?

882. Нека су a, b, c и d реални бројеви. Ако је $(ab+cd)^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)$, онда је $ad = bc$. Доказати.

883. Дат је произвољан троугао ABC. Нека је P пресечна тачка симетрале $\sphericalangle BAC$ и праве која полови дужи AC и BC. Доказати да је $\sphericalangle APC$ прав.

884. Дата су два паралелограма $ABCD$ и $DEFG$, таква да дуж AB садржи тачку E, а дуж FG садржи тачку C. Доказати да ова два паралелограма имају једнаке површине.

885. Дат је конвексан седмоугао $ABCDEFG$. Чега има више: троуглова или четвороуглова чија су темена- темена датог седмоугла?

VIII разред

886. Кифла кошта пола динара, погачица 2 динара, а ђеврек 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 пецива?

887. Одредити за које вредности реалног броја m једначина $\frac{mx}{2} - 3 = 2(x-m)$ има негативно решење.

888. Нека је AB тетива датог круга $K(O, r = 4\,cm)$ и нека је C подножје нормале из тачке A на тангенту круга у тачки B. Израчунати $AB^2 : AC$.

889. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од $60°$. Одредити x, ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине.

890. Дванаест ученика улази у биоскопску салу у којој су места нумерисана и у којој су слободна само прва два реда са по 6 слободних места. Пет ученика жели да седи у првом реду, док је осталима свеједно где ће седети. На колико начина је могуће испунити жеље свим ученицима?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

VI разред

891. Решити једначину: $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}$.

892. Међу учесницима републичког такмичења сваки такмичар навија или за „Црвену звезду“ или за „Партизан“. Сви такмичари који навијају за „Црвену звезду“ највише воле математику. Међу онима који навијају за „Партизан“ 10% такође највише воли математику, а преостали су опредељени између физике и информатике. Колико процената учесника навија за „Црвену звезду“, ако 46% такмичара највише воли математику?

893. Један оштар угао датог правоуглог троугла је пет пута већи од другог. Доказати да је хипотенуза четири пута већа од своје висине.

894. У ромбу $ABCD$ оштар угао је $60°$. Дате су тачке: M на страници AB и N на страници BC, такве да је $MB + BN = AB$. Доказати да је троугао MND једнакостраничан.

895. На циљу трке првих шест места су заузели: Ана, Дана, Жана, Горан, Зоран и Милан. Судија трке је записао следеће податке о њиховом пласману: а) Прва два места заузеле су особе истог пола; б) Жана се пласирала између Милана и једне девојке; в) Између Милана и Зорана кроз циљ су прошле три особе; г) Горан и Ана су се пласирали непосредно испред девојке. Одредити редослед првих шест такмичара на циљу ове трке.

VII разред

896. Доказати да је број $\underbrace{111\dots111}_{2000}-\underbrace{222\dots222}_{1000}$ потпун квадрат неког природног броја.

897. Решити једначину: $\dfrac{x(x^2-1)(x^2-4)}{x+|x|}=0.$

898. У конвексном четвороуглу $ABCD$, $\sphericalangle ACB = 20°$, $\sphericalangle ACD = 30°$ и $\sphericalangle ADB = 40°$. Одредити $\sphericalangle BAC$, ако је $AD = BD$.

899. Оштри углови неједнакокраког трапеза су комплементни. Израчунати обим и површину трапеза, ако је један крак $15\,cm$, мања основица $14\,cm$ и висина $12\,cm$.

900. Породица Математиковић има само један фењер и треба да по ноћи, трошним мостом, пређе преко набујале реке. Отац мост пређе за 1 минут, мајка за 2 минута, дечак за 5 минута, а бака за 10 минута. Колико је најмање времена потребно да сви пређу преко моста ако се на мосту истовремено могу наћи највише две особе; ако оне морају са собом имати фењер; ако бржа особа иде брзином спорије и ако ношење преко моста није могуће?

VIII разред

901. Одредити сва реална решења једначине:
$\sqrt{4-(x+1)^2(x-2)^2}=x^2+2x+3.$

902. Да ли је тачна једнакост: $\left(\dfrac{8}{11}\right)^2+\dfrac{3}{11}=\dfrac{8}{11}+\left(\dfrac{3}{11}\right)^2$? Одредити релације које важе између природних бројева a, b и c тако да је увек испуњена једнакост: $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\dfrac{b}{c}=\dfrac{a}{c}+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2$.

903. Дијагонала AC квадрата $ABCD$ је висина која одговара основици једнакокраког троугла AEF. Ако је $AB = 3a$ и ако квадрат $ABCD$ и троугао AEF имају једнаке површине израчунати обим и површину четвороугла који је пресек квадрата $ABCD$ и троугла AEF.

904. Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$ ивице $3\,cm$ и на ивицама AB, BC и CC' редом тачке M, N и P такве да је $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$ и $CP : PC' = 1 : 2$. Одредити обим и површину фигуре која се добија у пресеку коцке и равни одређене такама M, N и P.

905. Може ли се и како једнакостранични троугао странице $30\,cm$ прекрити дисјунктним једнакокраким трапезима чије су странице $2\,cm$, $1\,cm$, $1\,cm$ и $1\,cm$?

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

VI разред

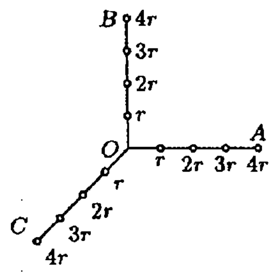
906. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y, таквих да је $x^2+\dfrac{6}{y}=10$.

907. Одредити најмањи природан број m за који постоји природан број n тако да је $0<\dfrac{m}{17}-\dfrac{n}{7}<0.01$.

908. У равни су дате три произвољне тачке A, B и C. Конструисати у тој равни три међусобно паралелне праве p, q и r које садрже дате тачке A, B и C, редом, тако да је једна од тих правих једнако удаљена од остале две.

909. На страници AB паралелограма $ABCD$ дата је тачка K таква да је $\sphericalangle AKD = \sphericalangle DKC$. Права p која садржи средиште P странице BC, паралелна правој AB, сече дуж KD у тачки M, а нормала из K на AB сече праву CM у тачки N. Доказати да је права DN нормална на праву CK.

910. Из једне раскрснице полазе три улице $OA = OB = OC = 4r$ (слика), из којих су сви излази затворени. Инспектор се налази у тачки O (раскрсници) и јури преступника који се налази у једној од улица. Инспектор може да види преступника само ако њихово међусобно растојање није веће од r. Максимална брзина инспектора је два пута већа од максималне брзине преступника. У почетном моменту инспектор не види преступника. Доказати да инспектор може да ухвати преступника.



VII разред

911. Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, таквих да је $p^2 - 2q^2 = 1$.

912. За реалне бројеве a и b важи неједнакост $\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$. Доказати да је апсолутна вредност једног од бројева a и b мања од 1, а другог већа од 1.

913. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је средиште странице BC. Нека тачка E дели дуж AD, тако да је $AE : ED = m : n$ и нека права BE сече страницу AC у тачки F. Одредити однос површина троуглова ABF и BCF.

914. Права p паралелна страници AB датог троугла ABC, полови страницу BC и сече симетралу $\sphericalangle CAB$ у тачки T. Ако је O центар уписаног круга троугла ABC, доказати да је $\sphericalangle ABC = 2\sphericalangle OCT$.

915. У координатној равни дате су тачке M, N, A и B са целобројним координатама. Описати најкраће путеве између тачака M и N ако су дозвољене само три врсте кретања:

(а) дуж правих са једначином облика $x = i$, $i \in Z$;
(б) дуж правих са једначином облика $y = j$, $j \in Z$;
(в) дуж дужи AB.

VIII разред

916. Одредити три проста броја таква да је њихов производ седам пута већи од њиховог збира.

917. Производ првих n природних бројева $1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-1)n$ назива се „n факторијел" и обележава са $n!$. Да ли се из производа сто бројева $1!, 2!, \ldots 99!, 100!$ може изоставити само један број тако да производ преосталих 99 бројева буде потпун квадрат?

918. Сва темена конвексног многоугла налазе се у унутрашњости квадрата чија је страница дужине 1. Доказати да је збир квадрата дужина страница тог многоугла мањи од 4.

919. У троуглу ABC тачка D припада страници AB, а тачка E је пресек симетрале $\sphericalangle BAC$ и странице BC. Ако је $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ACD$ и $AC = BD$, онда је права DE паралелна са правом AC. Доказати.

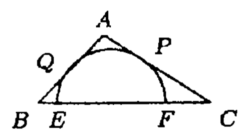
920. Укупна маса неколико сандука је 10 тона, при чему је маса сваког сандука мања од једне тоне. Колико најмање камиона носивости 3 тоне треба узети, тако да се цео терет од 10 тона може превести одједном?

ЧЕТВРТА ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА БАЛКАНИЈАДА

921. Нека су x и y цели бројеви такви да је задовољена следећа једнакост $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$. Доказати да је $x + y = 10$.

922. Наћи све целе бројеве n, $n \geq 1$, за које је $n^2 + 3^n$ квадрат целог броја.

923. Полукруг чији пречник EF припада страници BC троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама Q и P, као што је показано на слици. Доказати да пресечна тачка K дужи EP и FQ припада висини троугла ABC конструисаној из темена A.



924. На тениском турниру који је одржан на летњем кампу учествовало је два пута више дечака од девојчица. Сваки пар учесника је одиграо тачно једну партију (ниједна партија није завршена нерешено). Однос броја победа девојчица према броју победа дечака био је $7:5$. Колико је учесника било на турниру?

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

IV разред

925. Плстеном жицом треба оградити башту чије су странице $46\,m$ и $54\,m$. При томе се на свака $2\,m$ стављају стубови. Колико је потребно стубова и колико метара жице ако се по један стуб налази у сваком углу баште?

926. Површина школског дворишта је $3\,975\,m^2$, а површина игралишта је $24\,a$. За колико квадратних метара је површина школског дворишта већа од површине игралишта?

927. Један од два сабирка је повећан за 222. Како треба променити други сабирак:
(а) да би се збир повећао за 150;
(б) да би се збир смањио за 50?

928. Од следбеника најмањег парног четвороцифреног броја одузети претходник највећег непарног троцифреног броја.

929. Написати најмањи и највећи седмоцифрени број чији је производ цифара једнак 96.

V разред

930. Нека је скуп $P = \{1, \{2,3\}, 3\}$. Која тврђења су тачна: $\{1\} \in P$, $1 \in P$, $\{3,2\} \in P$, $\{2,3\} \subset P$, $\{\{2,3\}\} \subset P$, $2 \in P$, $3 \in P$?

931. У равни је дато пет тачака од којих никоје три не припадају једној правој. Колико има дужи са крајевима у тим тачкама, а колико има троуглова са теменима у тим тачкама?

932. Мера угла α је $20°1'$, а мера угла β је $2001'$. Који од тих углова је већи и за колико?

933. Одредити цифру x тако да израз $13\cdot\overline{16x}+2\,001\cdot 2\,000$ буде дељив са 12.

934. Одредити три узастопна природна броја тако да је њихов производ једнак 60.

VI разред

935. Ако је $x = -8$, $y = 3$ одредити вредност израза: $|xy - (-(-y))|$.

936. Висина куће је $11.2\,m$, а тополе $9\frac{3}{4}\,m$. За колико треба да нарасте топола да би била виша од куће за $2\frac{1}{2}\,m$?

937. На страницама AB, BC и CA једнакостраничног троугла ABC дате су тачке A_1, B_1 и C_1, тако да је $AA_1 = BB_1 = CC_1$, и при чему је $AA_1 > A_1B$, $BB_1 > B_1C$, $CC_1 > C_1A$. Доказати да је $\triangle A_1B_1C_1$ такође једнакостраничан.

938. Одредити цифре a и b тако да број $\overline{20ab}$ буде дељив са 3 и 29, а да не буде дељив са 6.

939. За зимовање се пријавило $\frac{2}{9}$ ученика више него што је планирано. Пред полазак, због болести, $\frac{3}{11}$ пријављених је морало да одустане од пута, тако да је на зимовање отишло 8 ученика мање него што је планирано. Колико је планирано, а колико је ученика отишло на зимовање?

VII разред

940. Конструисати тачке бројевне праве којима се придружују бројеви: $3 + \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} - 3$.

941. Који је број већи: 54^4 или 21^{12}?

942. Правоугаоник $ABCD$ чије су странице $a = 6\,cm$, $b = 3\,cm$ и једнакостранични троугао ABE имају заједничку страницу $AB = a$ и налазе се са исте стране те странице. Израчунати обим и површину заједничког дела правоугаоника и једнакостраничног троугла.

943. Дата је једнакост $a\sqrt{2} + b = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 3$. Одредити целе бројеве a и b тако да дата једнакост буде тачна.

944. Једнакокраки троугао има крак дужине $6\,cm$. а угао између кракова је $135°$. Израчунати површину тог троугла.

VIII разред

945. У три џака има укупно $64.2\,kg$ шећера. Ако у првом џаку има $\frac{4}{5}$ од количине шећера из другог џака, а у трећем џаку 42.5% од количине из првог џака, колика је маса шећера у првом џаку?

946. На колико начина три дечака и три девојчице могу да седну у један ред тако да особе истог пола не буду једна до друге?

947. Нека је CD висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла ABC. Показати да је $CD^2 = AD \cdot BD$.

948. Дужине страница основе квадра су $7\,cm$ и $24\,cm$, а дијагонала квадра захвата са основом квадра угао од $60°$. Израчунати површину и запремину квадра.

949. Над сваком страницом правоугаоника $ABCD$, као над пречником, конструисани су споља полукругови, а око правоугаоника је описан круг. Збир површина тако добијених полумесеца једнак је површини правоугаоника. Доказати.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

IV разред

950. Умањилац је смањен за 4 567. Како треба променити умањеник да би се разлика повећала за 1 234?

951. У павиљонима је смештено 430 излетника. У првом је било 12 излетника више него у трећем, а у другом 14 излетника мање него у трећем, док је у четвртом био једнак број излетника као у трећем павиљону. Колико излетника је смештено у сваком павиљону?

952. Цртањем четири праве у равни круга, поделити дати круг на највећи могући број делова. Колико је то делова?

953. У „једнакости“ $5 \cdot 4 + 26 : 2 + 1926 = 2001$ поставити заграде тако да се добије тачна једнакост.

954. Допунити магични квадрат тако да збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали буде једнак.

		16
13		17
	19	

Слика уз задатак 954

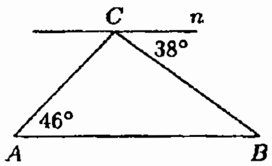
V разред

955. Нека је M скуп слова која чине реч МАТЕМАТИКА, а T скуп слова која чине реч ТАКМИЧЕЊЕ. Колико двочланих подскупова има пресек скупова M и T?

956. Одредити колико природних бројева x испуњава услове $\frac{2}{29} < \frac{5x}{2001} < \frac{3}{23}$.

957. Одредити просте бројеве p и q ако је $2p + 3q = 100$.

958. У равни је дат троугао ABC и права n, паралелна правој AB, која садржи теме C. На основу података са слике одредити угао ACB.



Слика уз задатак 958

959. Марија је имала 3, а Петар 5 чоколада. Њих двоје, заједно са Јеленом, поделили су све чоколаде на равне делове. Јелена је дала 80 динара Марији и Петру и на тај начин платила свој део чоколаде. Како ће Марија и Петар поделити 80 динара?

VI разред

960. Група од 18 дечака је добила 150 кликера. Могу ли поделити кликере тако да сваком од њих припадне различит број кликера?

961. Описати речима конструкцију којом би се дати угао од $19°$, поделио на деветнаест једнаких делова. (Напомена: конструктивни поступак дозвољава употребу само шестара и лењира.)

962. Одредити вредност променљиве x у скупу целих бројева, тако да израз $\frac{3x-6}{9}$ има вредност мању од 1 и већу од 0.

963. У троуглу ABC са угловима $\sphericalangle ABC = 30°$ и $\sphericalangle ACB = 15°$, из темена A конструисана је нормала на страницу AC која сече страницу BC у тачки D. Доказати да је $CD = 2\,AB$.

964. Ђорђе је купио пун џеп чоколадица. Најпре је срео Ану и дао јој половину свих чоколадица и још пола од једне чоколадице. Затим је срео Бану и дао јој половину преосталих чоколадица и још пола од једне. На крају, када је срео Јелену и дао јој половину чоколадица које су му преостале и још пола од једне, џеп му је био празан. Колико је чоколадица купио Ђорђе?

VII разред

965. Израчунати вредност израза $\frac{3m^2 - 6m + 2}{m^2 + 3m + 2}$ за $m = -\frac{2}{3}$.

966. Конструисати квадрат K странице $3\,cm$ и квадрат K_1, тако да за њихове површине P и P_1 важи: $P = \frac{3}{4}P_1$.

967. Поређати по величини бројеве: $-\frac{666}{667}$, $-\frac{1333}{1334}$, $-\frac{1998}{2001}$.

968. Низ од девет бројева се формира тако што је трећи број једнак први минус други, четврти је други минус трећи, пети је трећи минус четврти, итд. (Од трећег броја па надаље, сваки члан низа једнак је разлици двају претходних.) Зна се да је први члан број 40, а девети број 100. Исписати све чланове низа који недостају.

969. Израчунати обим ромба који има површину $\sqrt{8}\,cm^2$ и чији се углови односе као $3:1$.

VIII разред

970. Решити једначину $x + |x-1| = 2 - |x|$, а затим израчунати производ квадрата разлике и збира квадрата њених решења.

971. За које вредности променљиве x, израз $\dfrac{\frac{2}{3} - 3x}{-x + \frac{1}{2}}$ има вредност већу од 1?

972. Кругови k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Заједничка тангента их додирује у тачкама M и N. Израчунати збир углова $\sphericalangle MAN$ и $\sphericalangle MBN$ (углови садрже дуж MN).

973. Ако су a и b дужине основица трапеза, одредити дужину дужи паралелне основицама, која дели трапез на два дела једнаких површина.

974. Коцка ивице a пресечена је равни која садржи дијагоналу једне стране коцке и средишта двеју ивица супротне стране. Израчунати површину тог пресека.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

IV разред

975. Колико цифара се употреби за нумерацију парних страница књиге која има 111 страница ?

976. Када се једна страница правоугаоника смањи за $5\,cm$, а друга повећа за $4\,cm$, онда се добија квадрат чија је површина једнака површини правоугаоника. За колико је обим правоугаоника већи од обима квадрата?

977. Одредити најмањи паран природни број чији је збир цифара 60.

978. Једна тона обичне воде садржи $40\,g$ соли, а у једној тони морске воде има $35\,kg$ соли. Која количина обичне воде садржи онолико соли колико се добија испаравањем $200\,g$ морске воде?

979. Дешифровати множење $** \cdot * \cdot *9 = 2\,001$, тако што ће се уместо звездица ставити одговарајуће цифре. Колико различитих решења има?

V разред

980. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15 и код кога је збир цифара 15.

981. Један канап пресечен је на два дела, тако да је један његов део половина канапа увећан за $0.5\,m$. Затим је мањи део опет подељен тако да је одмерена његова половина и још $0.5\,m$, а преостали део канапа износи $1.5\,m$. Колика је укупна дужина тог канапа?

982. Дат је правоугаоник $ABCD$ $(AB > BC)$. Нека је s симетрала $\sphericalangle BAD$, а D_1 тачка осносиметрична темену D у односу на праву s. Ако је $AD_1 = 4\,cm$ и $D_1B = 7\,cm$, израчунати обим правоугаоника $ABCD$.

983. Неке стране дрвене коцке ивице $a\,cm$ $(a \in N)$ су обојене плавом бојом, а затим је коцка исечена на коцкице ивице $1\,cm$. Ако 14 коцкица

има по две обојене стране и не постоји ниједна коцкица са три обојене стране, колико коцкица нема обојену ниједну страну?

984. На рођендану је укупно 20 гостију, дечака и девојчица. Ана од раније познаје седморицу дечака, Весна осморицу, Тања деветорицу и тако даље све до последње, Лидије која познаје све присутне дечаке. Колико је дечака на рођендану?

VI разред

985. Решити једначину $||x| - 1| - 2\,000 = 0$.

986. Дат је оштроугли троугао ABC. Из темена A конструисане су дужи AD и AE тако да је $AD \perp AC$, $AD = AC$, $AE \perp AB$ и $AE = AB$, при чему су тачке D и E, као и тачке B и D са разних страна праве AC. Доказати да је $BD = CE$.

987. Одредити све могуће вредности цифара a и b тако да је производ бројева $\overline{54a}$ и $\overline{63b1}$ дељив са 12.

988. Нека је D произвољна тачка у унутрашњости оштроуглог троугла ABC и нека су M, N, P, Q редом средишта дужи AB, BC, CD, DA. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

989. Које године је рођен човек који је ове године напунио толико година колики је збир цифара године његовог рођења?

VII разред

990. Дат је израз $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$. Да ли је алгебарска вредност датог израза рационалан или ирационалан број?

991. Колико има четвороцифрених природних бројева са различитим цифрама таквих да им је збир цифара једнак 10?

992. Правилан многоугао M има унутрашњи угао који је један и по пут већи од унутрашњег угла правилног многоугла M_1. Одредити све парове таквих многоуглова M и M_1.

993. Дат је правилан осмоугао $ABCDEFGH$ чија страница је $2\,cm$. Одредити површину шестоугла $ABCDEF$.

994. Дијагонале AC и BD једнакокраког трапеза $ABCD$ ($AB \parallel CD$) секу се у тачки S тако да је $\sphericalangle ASB = 60°$. Ако је M средиште дужи AS, N средиште дужи DS и P средиште дужи BC, доказати да је троугао MNP једнакостраничан.

VIII разред

995. Тест се састоји од 20 задатака. Сваки тачно решен задатак ученику доноси 8 поена, сваки погрешно решен задатак -5 поена, а сваки задатак који није решаван 0 поена. По завршетку теста ученик је сакупио 13 поена. Колико задатака је ученик тачно, а колико погрешно решио?

996. Дате су линеарне функције $f(x) = (2m - 0.5)x - 3$ и $g(x) = (7m + 2)x - 4$. Одредити вредности реалног броја m тако:
а) да графици функција буду паралелни;
б) да је $f(x)$ опадајућа, а $g(x)$ растућа функција.

997. Из тачке A која је $120\,m$ удаљена од подножја вертикалног торња BC, врх торња C се види под углом α. Из тачке D, која је за $90\,m$ ближа подножју торња B, врх торња се види под углом $90° - \alpha$. Колика је висина торња?

998. Дата је тространа једнакоивична пирамида $SABC$. Нека је SS' висина пирамиде, а M средиште висине SS'. Доказати да је $\sphericalangle AMB = 90°$.

999. Од 3 ученика шестог, 4 ученика седмог и 5 ученика осмог разреда треба формирати екипу од 4 члана коју чине тачно један ученик шестог разреда и бар један ученик седмог разреда. Колико има таквих екипа?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

VI разред

1000. Маса пшенице је $4\,250\,kg$, а њена влажност је 20%. После сушења пшенице, маса пшенице је смањена за $250\,kg$. Колика је (у процентима) влажност пшенице после сушења?

1001. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, при дељењу са 5 даје остатак b, а при дељењу са 7 даје остатак c. Доказати да је израз $70 \cdot a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - n$ дељив са 105.

1002. У троуглу ABC симетрала угла α сече страницу BC у тачки A_1, а симетрала угла β сече страницу AC у тачки B_1. Ако се дужи AA_1 и BB_1 секу у тачки S и ако је угао $\gamma = 60°$, онда је троугао A_1SB_1 једнакокрак. Доказати.

1003. Конструисати трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) ако су дати: збир основица $AB+CD$ једнак датој дужи s; висина трапеза која одговара основици једнака датој дужи h_a; оштри углови на основици трапеза једнаки редом α и β.

1004. Мајка је за излет својој деци спремила три врсте воћа: крушке, јабуке и брескве. Сваком детету је на непрозирној корпици коју је добио залепила и налепницу са његовим именом. Потом је деци саопштила да је Ђорђу спремила 2 крушке и 3 јабуке, Рајку 3 јабуке и 1 бресكву, а Пери 3 брескве. Док се Пера купао на реци, Ђорђе и Рајко су заменили налепнице на корпама, тако да ниједна налепница није остала на свом месту. Колико најмање воћа и из којих корпи треба да извуче Пера не завирујући у корпе, да би налепнице потпуно тачно вратио на своја места?

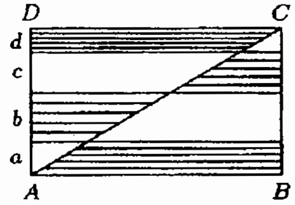
VII разред

1005. Најмањи заједнички садржалац два броја је за 20 већи од њиховог највећег заједничког делиоца. Одредити та два броја.

1006. Дат је израз $\dfrac{2^{17} + 2^{16} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1}{2^8 + 2^7 + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1} : 3^3$. Доказати да је вредност датог израза цео број.

1007. Дат је једнакостранични троугао ABC и тачка M на страници AB. Над дужи CM конструисан је једнакостранични троугао CMN, при чему су тачке M и N са разних страна дужи BC. Доказати да су дужи AC и BN паралелне.

1008. Дат је правоугаоник $ABCD$ (видети слику). Ако је на слици $a + c = b + d$, онда је збир белих површина са леве стране дијагонале AC једнак збиру белих површина са десне стране дијагонале AC. Доказати.



Слика уз задатак 1008

1009. Лека је на табли написао 55 различитих двоцифрених природних бројева, тврдећи да међу њима не постоје два чији је збир 100. Жарко је, не проверовајући, рекао да је то немогуће. Ко је у праву Лека или Жарко?

VIII разред

1010. Наставница је поређала у врсту 20 ученика и поделила им 800 бомбона. Сваки ученик је добио задатак да израчуна количник $\frac{x}{x+2k-1}$, где је x број бомбона које је добио, а k редни број свог места у врсти. Испоставило се да су ти количници за свих 20 ученика били једнаки. Колико бомбона је добио ученик који је био дванаести у врсти?

1011. На шаховском турниру свако игра са сваким по једну партију. Такмичари су мајстори и велемајстори. На крају турнира се испоставило да су сви велемајстори победили све мајсторе и у тим партијама сакупили половину поена који се могу добити на целом турниру. Ако у свакој партији победник добија 1 поен, поражени 0 поена, а у случају ремија (нерешеног исхода) оба играча добијају по пола поена, доказати да је број учесника турнира квадрат неког природног броја.

1012. Правилна тространа пирамида $ABCS$, основне ивице a и висине H пресечена је са равни која садржи средишта основних ивица AB и AC и паралелна је са бочном ивицом AS. Израчунати обим и површину пресека.

1013. Дата је четвртина круга одређена међусобно нормалним полупречницима OA и OB. Права p паралелна са тетивом AB сече лук AB у тачки C (тачка C је једна од две пресечне тачке), а продужетке дужи OA и OB у тачкама P и Q. Доказати да је $AB^2 = PC^2 + QC^2$.

1014. По кругу треба распоредити цифре $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9. Да ли је могуће направити такав распоред да збир сваке три узастопне цифре:
(а) није већи од 14; (б)није већи од 15?
Ако је могуће, навести по један пример таквих распореда.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

VI разред

1015. Ако се прва цифра природног броја a премести на последње место добија се природан број b који је три пута мањи од a. Доказати да је број a дељив са 27.

1016. Колико пута ће се од поноћи до подне поклопити велика и мала казаљка на сату, не рачунајући поноћ, а рачунајући подне? Израчунати времена тих поклапања.

1017. У оштроуглом троуглу ABC, са $\sphericalangle ACB = 60°$, тачке A' и B' су редом подножја висина троугла из темена A и B, а тачка C_1 је средиште странице AB. Доказати да је троугао $A'B'C_1$ једнакостраничан.

1018. Нека су P, Q, R и S редом средишта страница AB, BC, CD и DA конвексног четвороугла $ABCD$. Тачка M је унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Доказати да је тада и $MQCR$ такође паралелограм.

1019. Брачни пар Мирко и Љубица позову на вечеру своје пријатеље, три брачна пара. Пошто су сви стигли истовремено, почели су да се рукују, при чему се свако руковао са неколико људи, а нико се није руковао са својим брачним другом. Када су завршили са руковањем, Мирко је питао сваког (и Љубицу) колико пута се руковао. Добио је седам различитих одговора. Са колико се људи руковала Љубица?

VII разред

1020. Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

1021. Постоје ли природни бројеви m и n, такви да су бројеви m^2+n и n^2+m квадрати природних бројева?

1022. Страница AB конвексног четвороугла $ABCD$ је два пута већа од странице CD. Дијагонала AC нормална је на страницу BC, а дијагонала BD нормална је на страницу AD. Одредити угао између дијагонала четвороугла.

1023. Дат је правоугли троугао ABC, где је C теме правог угла, а D подножје хипотенузине висине. Нека су r, r_1 и r_2 редом полупречници кругова уписаних у троуглове ABC, ACD и BCD. Доказати да је $r + r_1 + r_2 = CD$.

1024. Грађани града A увек говоре истину, грађани града B увек говоре лажи, а сваки грађанин града C наизменично говори истину и лаж. Дежурни ватрогасац је телефоном примио поруку из једног од ових градова: „Код нас је пожар", јавио је један грађанин. „Где?"-питао је дежурни ватрогасац. „У граду C", одговорио је исти грађанин. У који град треба да оде ватрогасна екипа?

VIII разред

1025. Дато је 2001 различитих бројева таквих да ако се сваки од њих замени са збиром осталих добија се исти скуп бројева. Одредити производ датих бројева.

1026. Дат је скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$. Овај скуп је разбијен на два подскупа, тако да први подскуп садржи тачно три елемента, означимо их са a, b и c, а сви остали елементи чине други подскуп. Да ли је могуће да вредност израза $ab+bc+ca$ буде једнака разлици производа елемената првог подскупа и збира елемената другог подскупа, ако је:
а) $n = 12$; б) $n = 17$?

1027. Дат је једнакостранични троугао ABC чија је површина $7\,cm^2$. На страницама AB, BC и CA дате су редом тачке P, M и N, тако да је $AP : PB = BM : MC = CN : NA = 2 : 1$. Праве AM, BN и CP секу се у тачкама Q, R и S. Одредити површину троугла QRS.

1028. Обим троугла ABC је $2s$. Тангента на кружницу уписану у дати троугао, која је паралелна страници AB, сече странице AC и BC редом у тачкама D и E. Колику највећу вредност може имати дужина дужи DE?

1029. Темена коцке нумерисана су са осам различитих бројева из скупа $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Збирови бројева којима су нумерисана темена на истој страни коцке су међусобно једнаки и нису дељиви бројем из скупа S, који не учествује у нумерацији. Одредити број из скупа S који не учествује у нумерацији.

ПЕТА ЈУНИОРСКА МАТЕМАТИЧКА БАЛКАНИЈАДА

1030. Наћи све природне бројеве a, b, c такве да је $a^3+b^3+c^3 = 2001$.

1031. Дат је $\triangle ABC$, код кога је $\sphericalangle ACB = 90°$, $AC \neq BC$, а тачке L и H су на страници AB такве да је $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB$, а CH је висина на AB. Доказати:
(а) за сваку тачку X на дужи CL важи $\sphericalangle XAC \neq \sphericalangle XBC$;
(б) за сваку тачку X на дужи CH важи $\sphericalangle XAC \neq \sphericalangle XBC$.

1032. Дат је једнакостранични $\triangle ABC$. Нека су D и E произвољне тачке на страницама AB и AC, редом. Ако су DF и EG симетрале углова $\triangle ADE$, где је $F \in AE$ и $G \in AD$, докажи да је збир површина $\triangle DEF$ и $\triangle DEG$ не већи од површине $\triangle ABC$. Објаснити када важи једнакост.

1033. Дат је конвексан многоугао са 1415 страница и обимом од $2001\,cm$. Доказати да постоје три темена овог многоугла, која образују троугао чија је површина мања од $1\,cm^2$.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1992. година

1. После 12 дана пуж се попео на висину од $12\cdot(3-2)=12\,\mathrm{m}$. Тринаестог дана биће на врху дрвета.

2. Децимални запис ових бројева је $\overline{aba}$, $a\neq 0$. Има 9 могућности за цифру a и 10 могућности за цифру b, па има 90 таквих бројева.

3. Има 8 правих и на свакој по 3 дужи, укупно 24.

4. Једна свеска кошта $9+9=18$ динара, а Милан има $4\cdot 18+9=81$ динар.

5. После 24 године број година сина и ћерке ће се увећати за 48, оца за 24, па ће се разлика смањити за 24 (и тиме нестати). Како је та разлика једнака троструком збиру дечјих година, то је збир њихових година 8, а отац има $4\cdot 8=32$ године.

6. Како је $70=2\cdot 5\cdot 7$, то су кандидати бројеви 257, 275, 527, 572, 725 и 752. Када се одбаце парни, дељиви са 5 и 527, због $527=17\cdot 31$, остаје само број 257 који је прост.

7. Врсте магичног квадрата су $\left(\frac{1}{6},\frac{7}{12},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{12},\frac{1}{12}\right)$ и $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)$.

8. $(MN\cup NP)\setminus(PQ\setminus MP)=MP$.

9. Не могу, јер је збир цифара добијеног броја једнак $3\cdot *+17$ и није дељив са 3.

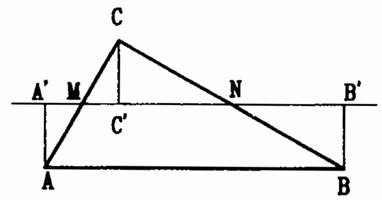
10. Како је $\alpha-\gamma=90°$ и $\alpha=5\gamma$, то је $\gamma=22°30'$, $\alpha=112°30'$, $\beta=67°30'$.

11. $1350=15\cdot 15\cdot 2\cdot 3$, па су тражени парови 15, $15\cdot 6=90$ и $15\cdot 2=30$, $15\cdot 3=45$.

12. Како је $\measuredangle ASB=180°-(\measuredangle SAB+\measuredangle SBA)$ и $\measuredangle ASC=180°-(\measuredangle SAC+\measuredangle SCA)$, $\measuredangle SAB=\measuredangle SAC$, $\measuredangle SBA=\frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle SCA=\frac{\gamma}{2}$, то је $30°=\measuredangle ASB-\measuredangle ASC=\frac{1}{2}(\gamma-\beta)$. Због $\beta+\gamma=90°$, закључујемо $\beta=15°$, $\gamma=75°$.

13. Нека је прва сума x, друга y, трећа z. Тада је $y=20+x$, $x=50+z$ и $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=280+\frac{z}{2}$. Одавде добијамо $x=2980$, $y=3000$, $z=2930$.

14. Ако саберемо број познаника првог детета са бројем познаника другог, ... и бројем познаника деветог детета, добија се паран број јер се свако познанство рачуна два пута (за сваког од та два познаника по једном). Ако би свако дете имало тачно по три познаника, онда би исти тај број био $9\cdot 3$, дакле непаран, па закључујемо да наша претпоставка није тачна.



Слика уз задатак 15

15. В. слику.

16. Умањеник је $\frac{13}{8}$ умањиоца. Разлика је $\frac{5}{13}$ умањеника, дакле $\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{8}=\frac{5}{8}=62{,}5\%$ умањиоца.

17. $31^{13}<32^{13}=2^{65}<2^{66}=64^{11}<65^{11}$.

18. Број дијагонала n-тоугла је $\frac{n(n-3)}{2}$, па изједначавањем са $8n$, добијамо $n=19$. Збир унутрашњих углова 19-тоугла је $(19-2)\cdot 180°=3060°$.

19. Како се датуми две суседне суботе истог месеца разликују за 7, то је овај месец имао 5 субота, по једну непарног датума између субота са парним датумом. Прва субота у месецу је била са парним датумом, и то 2-гог у месецу јер би у случају 4-ог или 6-ог, последња субота била 32-ог, односно 34-ог. Стога је 4. и $4+3\cdot 7=25$. био понедељак.

20. Нека је у правоуглом троуглу ABC угао код темена C прав, $CA=21$ и $CB=28$. Нека је у њега уписан квадрат $CDEF$, $D\in CB$, $E\in BA$, $F\in CA$. Ако је страница квадрата x, тада је површина троугла ABC једнака збиру површина квадрата и два правоугла троугла са катетама x и $21-x$, односно x и $28-x$. Дакле, $x^2+\frac{x(21-x)}{2}+\frac{x(28-x)}{2}=\frac{21\cdot 28}{2}$, одакле је $x=12$. Одсечци су $\sqrt{(21-12)^2+12^2}=15$ и $\sqrt{(28-12)^2+12^2}=20$.

21. n тачака „у општем положају“ одређује $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ равни, па изједначавањем са $35n$ добијамо $(n-1)(n-2)=15\cdot 14$, одакле је $n=16$.

22. Како је $(2m+1)^2-(2n+1)^2=4(m+n+1)(m-n)$, а бројеви $m+n+1$ и $m-n$ су различите парности, то је $(2m+1)^2-(2n+1)^2$ дељиво са 8.

23. За $x\geqslant\frac{1}{2}$ једначина постаје $2x-1+2x=3$, одакле је $x=1$. За $x<\frac{1}{2}$ једначина постаје $1-2x+2x=3$, па у том случају нема решења.

24. То је број $\frac{81}{100-1}=\frac{9}{11}$.

25. Нека је $ABCD$ дати трапез са већом основицом AB, нека је DD' његова висина, O центар описаног круга и r његов полупречник. По услову задатка је $DD' = \frac{1}{2}(10+24) = 17\,\mathrm{cm}$, $AD' = \frac{24-10}{2} = 7\,\mathrm{cm}$ и $D'B = 24-7 = 17\,\mathrm{cm}$. Како је $D'B = D'D$, то је $\measuredangle DBA = 45^\circ$ и централни угао $\measuredangle DOA$ описаног круга над краком DA једнак је 90°. Стога је $r = DA\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$. Најзад је $DA = \sqrt{DD'^2 + AD'^2} = 13\sqrt{2}$, $r = 13$, површина описаног круга је $169\pi \approx 530{,}66\,\mathrm{cm}^2$, па је површина трапеза ($17\cdot 17 = 289\,\mathrm{cm}^2$) приближно 54,46% површине круга.

26. Из $a = 2b$ и $a + b = 36$ добијамо $a = 24$, $b = 12$. Дужи које спајају средишта наспрамних страница правоугаоника деле тражену површину на четири једнака дела, сваки по $1/8$ прваоугаоника. Стога је тражена површина $\frac{ab}{2} = \frac{24\cdot 12}{2} = 144\,\mathrm{cm}^2$.

27. На страницама највећег троугла има по 3 дужи, а на осталим правим по 6. Тако има $3\cdot 3 + 3\cdot 6 = 27$ дужи. Када би сваке три праве образовале троугао, било би 20 троуглова. Како тројке правих које се секу у теменима највећег троугла не образују троугао, то има $20 - 3 = 17$ троуглова.

28. $156+162+170 = 2(a+b+c) = 488$, $c = (a+b+c)-(a+b) = 244-156 = 88$, $b = 244-162 = 82$, $a = 244-170 = 74$.

29. Централни број је $\frac{1}{9}(0+2+4+6+8+10+12+14+16) = 8$, па су редови магичног квадрата $2, 16, 6$; $12, 8, 4$; $10, 0, 14$. Напомена: централни број, а тиме и остатак магичног квадрата одређен је првим редом по формули $x = \frac{1}{3}(2+16+6)$.

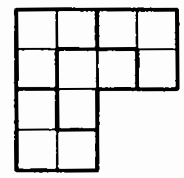
30. $a + b = 100$, $a - b = 50 - 20 = 30$, па је $a = 65$ и $b = 35$.

31. $S = (A\setminus(B\cup C))\cup(B\setminus(C\cup A))\cup(C\setminus(A\cup B))$.

32. $\frac{2}{7}$ воде је тешко $\frac{1}{4}\,\mathrm{kg}$, па је вода тешка $\frac{7}{8}\,\mathrm{kg} = 875\,\mathrm{g}$, а посуда $125\,\mathrm{g}$.

33. Проширивањем разломака до истих бројилаца добијамо $\frac{30}{160} < \frac{30}{6p} < \frac{30}{105}$, па је $105 < 6p < 160$. Стога је $17 < p < 27$, одакле закључујемо да је $p = 19$ или $p = 23$.

34. Сваки од делова има површину $\frac{3}{16}$ површине квадрата $ABCD$, тј. 3 „коцкице“ чија је страница $\frac{1}{4}$ странице квадрата $ABCD$ (слика).



Слика уз задатак 34

35. $\alpha + \beta + \gamma = 133^\circ 30'$, па је $x = 180^\circ - 133^\circ 30' = 46^\circ 30'$.

36. Ако углове $\measuredangle OAB$, $\measuredangle OBC$ и $\measuredangle OCA$ означимо са α, β и γ, тада је $2(\alpha+\beta+\gamma) = 180^\circ$, па је $\measuredangle BOC = 180^\circ - 2\beta = 2(\alpha+\gamma) = 2\measuredangle A$.

37. Ако би, напротив, бар 16 ученика урадило не више од 2 задатка, број урађених задатака не би могао бити већи од $16\cdot 2 + 2\cdot 5 = 42$.

38. $\measuredangle ADE = 90^\circ - \measuredangle B$, $\measuredangle AED = \measuredangle NEC = 90^\circ - \measuredangle C$.

39. $540 = 3^3\cdot 2^2\cdot 5$, па је тражени број $2\cdot 5^2$.

40. $(A+B)+(B+C)+(C+A) = 2(A+B+C) = \frac{5}{6}+\frac{17}{10}+\frac{83}{15} = \frac{121}{15}$, па је $C = \frac{121}{30} - \frac{5}{6} = \frac{16}{5}$, $A = \frac{121}{30} - \frac{17}{10} = \frac{7}{3}$, $B = \frac{121}{30} - \frac{83}{15} = -\frac{3}{2}$.

41. Троцифрени парни кубови (кандидати за последње три цифре) су $8^3 = 512$ и $6^3 = 216$. Број кога чине прве три цифре завршава се дакле цифром 5 или цифром 2. Квадрат се не може завршавати цифром 2, па су последње три цифре траженог броја 512. Највећи број чији квадрат је троцифрен и завршава се цифром 5 је 25. Како је $25^2 = 625$, то је $x = 62512$.

42. Ако се праве одређене крацима трапеза $ABCD$ (са основицама AB и CD) секу у тачки O, тада је $AC^2 + BD^2 = AO^2 + OC^2 + BO^2 + OD^2$. С друге стране је $AB^2 + CD^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$.

43. $6 - \sqrt{6} > 2 + \sqrt{2}$ јер $4 > \sqrt{2} + \sqrt{6}$, а ово јер $16 > 2 + 6 + 4\sqrt{3}$, односно јер $2 > \sqrt{3}$.

44. Бројеви 43^{4k+3} и 37^{4k+1} се завршавају цифром 7, па је њихова разлика дељива са 10.

45. Нека симетрала угла $\measuredangle A$ троугла ABC сече страницу BC у тачки E. Угао $\measuredangle BEA$ је већи од несуседног унутрашњег угла $\measuredangle CAE$ троугла CAE, а углови $\measuredangle CAE$ и $\measuredangle BAE$ су подударни. Сада $\measuredangle BEA > \measuredangle BAE$ повлачи $AB > BE$. Слично је и $AC > EC$.

46. Сва три правоугаоника, који чине бочне стране призме, имају за једну страницу висину призме. Стога се странице основе призме односе као површине одговарајућих бочних страна, дакле као $26 : 28 : 30$, па њихове дужине износе $26x$, $28x$ и $30x$. Ако висина троугла основе која одговара страници дужине $28x$ дели ту страницу на одсечке дужине m и $28x - m$, тада имамо једначину $(30x)^2 - m^2 = (26x)^2 - (28x - m)^2$, одакле је $m = 18x$. Сада је висина која одговара страници дужине $28x$ једнака $\sqrt{(30x)^2 - m^2} = 24x$, а површина основе једнака $\frac{28x \cdot 24x}{2} = 336x^2 = 21$. Дакле, $x = \frac{1}{4}$, странице основе су $\frac{13}{2}$, 7 и $\frac{15}{2}$, висина призме 4, а запремина $4 \cdot 21 = 84$.

47. Ако мајстор уради дати посао за x сати, шегрт га уради за $2x$ сати, а за један сат ураде $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$ делова посла. Из услова задатка знамо да је то $\frac{1}{4}$ посла, одакле је $x = 6$.

48. Природни број који се завршава цифром 5 може се записати као $10x+5$. Његов квадрат је $100x^2 + 100x + 25 = 100x(x+1) + 25$, па број који се од овог квадрата добија одбацивањем последње две цифре (2 и 5) јесте број $x(x+1)$ који је паран.

49. Тврђење је еквивалентно тврђењу $\measuredangle AS_1C = \measuredangle AS_2D$. Како је $\measuredangle ABC + \measuredangle ABD = 180°$, то је један од ових углова, на пример $\measuredangle ABC$, оштар, а други туп. Тада је $\measuredangle AS_1C = 2\measuredangle ABC$ и $\measuredangle AS_2D = 2(180° - \measuredangle ABD)$, одакле следи тврђење.

50. Једначина је еквивалентна са ($1 - |x| = 2$ или $1 - |x| = -2$), при чему само једначина $1 - |x| = -2$ може имати решења. Дакле, $|x| = 3$, тј. $x = \pm 3$.

51. Прво је $C = 1$, а потом $A = 9$ због $A + B + C = 10 + B$. Даље је $B = A - 1 = 8$ због $A + B + C + 1 = A + 10$, и $D = 0$ због $A + 1 = \overline{CD}$.

52. $10x - x = 27405$, па је $x = 3045$ и тражени број је 30450.

53. Једно решење је $(0,9)$, $(4,5)$, $(0,5)$, $(4,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,9)$, $(4,6)$, $(0,6)$.

54. $O_{ABCD} = 18\,\mathrm{cm}$, $O_{AMND} + O_{MBCN} = O_{ABCD} + 2\,MN = 28\,\mathrm{cm}$, па је $MN = 5\,\mathrm{cm}$.

55. Коцкице са три обојене стране су у теменима коцке, са две обојене стране су на ивицама коцке, а са једном на странама коцке. Стога 8 коцкица има обојене три стране, $12(4-2) = 24$ коцкице две, $6(16 - 4 - 4 \cdot 2) = 24$ коцкице има једну обојену страну, а $64 - 8 - 24 - 24 = 8$ коцкица нема ниједну обојену страну.

56. Дељивих са 3 има 333, дељивих са 5 има 199, а дељивих са 15 има 66. Дакле има $999 - [(333 + 199) - 66] = 533$ броја који нису дељиви ни са 3 ни са 5.

57. Једно решење је $\{1,8,9,16,17,24,25,32\}$, $\{2,7,10,15,18,23,26,31\}$, $\{3,6,11,14,19,22,27,30\}$, $\{4,5,12,13,20,21,28,29\}$.

58. Ако су A' и B' тачке симетричне тачкама A и B у односу на странице PQ, односно QM, тада су тачке A', X, Y и B' колинеарне због $\measuredangle PXA' = \measuredangle PXA = \measuredangle QXY$ и $\measuredangle MYB' = \measuredangle MYB = \measuredangle QYX$. Дакле, тачке X и Y се добијају у пресеку правца $A'B'$ са ивицама PQ и QM.

59. Нека су то тачке A, B, C, D и E. Ако су четири тачке на истој правој којој не припада пета, тада има $1 + 4 = 5$ правих. Ако су две тројке тачака колинеарне, рецимо A, B, C и A, D, E, тада има $2 + 2 \cdot 2 = 6$ правих. Ако постоји само једна тројка колинеарних тачака, тада има $1 + 1 + 3 \cdot 2 = 8$ правих. Ако нема тројки колинеарних тачака, тада има $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ правих.

60. $\frac{2}{3}V = \frac{3}{4}N = \frac{4}{5}J$ и $V + N + J = 2450$ даје $V = 900$, $N = 800$, $J = 750$.

61. Међу првих 150 бројева има 30 бројева дељивих са 5, од којих је 6 дељиво са 25 и један са 125. Стога њихов призвод има $30 + 6 + 1 = 37$ нула.

62. Ако је s растојање од куће до школе, брзина старијег брата је $\frac{s}{30}\,\mathrm{min}$, а млађег $\frac{s}{40}\,\mathrm{min}$. Ако је после x минута старији брат стигао млађег, тада је $\frac{s}{30}X = \frac{s}{40}(X+5)$, па је $X = 15\,\mathrm{min}$.

63. Како постоји 7 различитих остатака при дељењу са 7, и како је $100 = 7 \cdot 14 + 2$, то бар 15 од датих 100 бројева имају исти остатак при дељењу са 7. Разлика свака два од њих дељива је са 7.

64. Ако је S центар уписаног круга троугла ABC и $\alpha \geqslant \beta, \gamma$, тада је $\alpha/2 \geqslant \beta/2, \gamma/2$, паје у трогловима ASB и ASC, $BS \geqslant AS$ и $CS \geqslant AS$.

65. Нека је $ABCD$ правоугаоник у коме је $AB = 10\,\mathrm{cm}$ и $AC + BC = 15\,\mathrm{cm}$. Нека је E тачка праве BC таква да је $BE = 15\,\mathrm{cm}$ и $C \in BE$. Тада је због $CE = BE - BC = AC$, тачка C на симетрали дужи AE. Дакле, конструишемо најпре правоугли троугао ABE, а потом тачку C одредимо као пресек праве BE и симетрале дужи AE.

66. Сваки природан број је дељив са 3, има остатак 1 при дељењу са 3, или има остатак 2 при дељењу са 3. За $n = 3k$ је n дељиво са 3, за $n = 3k+1$ је $n^2 + 2 = 3(3k^2 + 2k + 1)$, а за $n = 3k+2$ је $n^2 + 2 = 3(3k^2 + k4 + 2)$.

67. $x + y + z + t = 396$ и $x + 5 = y - 5 = z \cdot 5 = \frac{t}{5}$ даје $x = 50$, $y = 60$, $z = 11$, $t = 275$.

68. Квадратну мрежу 8×8 образује 9 вертикалних и 9 хоризонталних линија. Две хоризонталне и две вертикалне линије образују правоугаоник. Дакле, има $\frac{9 \cdot 8}{2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{2} = 1296$ правоугаоника. Има 8 могућности за избор „доње" и 8 могућности за избор „леве" ивице квадрата странице 1, 7 могућности за избор „доње" и 7 могућности за избор „леве" ивице квадрата странице 2, ... 1 могућност за избор „доње" и 1 могућност за избор „леве" ивице квадрата странице 8. Стога има $8^2 + 7^2 + \cdots + 2^2 + 1^2 = 204$ квадрата.

69. Ако дати троугао „дуплирамо" симетријом у односу на катету која образује угао од $22°30'$, добијамо једнакокраки троугао са крацима 2 cm и углом између њих 45°. Висина која одговара краку је $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, па је површина „дуплираног" троугла $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$, а тражена површина $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

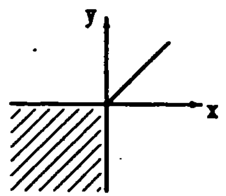
70. Нека је ABC троугао, A_1, B_1, C_1 средишта његових страница BC, CA, AB, и D подножје висине из темена A. Четвороугао $B_1C_1DA_1$ је трапез јер је B_1C_1 средња линија троугла ABC и стога паралелна страници BC. Из истог разлога је $B_1A_1 = \frac{1}{2}AB$. $C_1D = \frac{1}{2}AB$ јер је C_1 центар описаног круга правоуглог троугла ABD.

71. $2+2^2+\cdots+2^{1991}+2^{1992} = 2(1+2+2^2+2^3)+2^5(1+2+2^2+2^3)+\cdots+2^{1989}(1+2+2^2+2^3) = 2(1+2+2^2+2^3)(1+2^4+2^8+\cdots+2^{1988}) = 30k$.

72. Најпре $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1992=2^3\cdot 3\cdot 83$. Како су бројеви $x-y$ и $x+y$ исте парности, а у производу дају 1992, то је један од њих дељив са 2, а други са 4. Већи од њих, а то је $x+y$, дељив је са 83, па је $x-y\in\{2,4,6,12\}$, а $x+y\in\{2^2\cdot 3\cdot 83, 2\cdot 3\cdot 83, 2^2\cdot 83, 2\cdot 83\}$. Сада је

$$(x,y)\in\{(89,77),(169,163),(251,247),(499,497)\}.$$

73. У првом квадранту ($x,y\geqslant 0$) тачке су на правој $x+x=y+y$, тј. на правој $y=x$, у другом квадранту ($x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$) су на правој $y=0$, у четвртом квадранту ($y\leqslant 0$, $x\geqslant 0$) су на правој $x=0$, а у трећем квадранту ($x,y\leqslant 0$) су то све тачке тог квадранта (слика)!



Слика уз задатак 73

74. Док син направи 6 корака, отац направи 4 који су по дужини једнаки 7 синовљевих, што смањи њихово растојање за један синовљев корак. Дакле потребно је $60\cdot 4=240$ очевих корака.

75. Нека су $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ две стране коцке и нека су AA_1, ..., DD_1 њене ивице. Ивице пирамиде које полазе из темена, рецимо A, једнаке су половини дијагонале стране коцке, дакле $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ивица пирамиде која је настала спајањем центара страна $ABCD$ и ABB_1A_1 средња је линија троугла ACB_1, па је и она једнака половини дијагонале стране коцке. Стога је пирамида правилни тетраедар странице $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ и запремине $\frac{1}{12}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3\sqrt{2}=\frac{a^3}{24}$.

76. Из $a\cdot b=\frac{a}{b}$ закључујемо $b=\pm 1$. Како је $b=1$ немогуће због $a+1\neq a$, то је $b=-1$ и $a=\frac{1}{2}$.

77. Са k, $1000+k$, $2000+k$, ..., $1\leqslant k\leqslant 1000$, означићемо исти број k када преко њега пређемо у првом, другом, трећем, ... обиласку. Прецртавају се бројеви k, такви да је за неко n број $n\cdot 1000+k$ облика $15x+1$, тј. такви да је за неко n број $n\cdot 1000+k-1$ дељив са 15. Стога се број k мора завршавати цифром 1 или 6. С друге стране, ако се k завршава цифром 1 или 6, тада је један од бројева $k+1$, $1000+k-1$, $2000+k-1$ дељив са 3, тиме и са 15, па бива прецртан у првом, другом или трећем обиласку. Биће прецртано 200, а остаје 800 бројева.

78. Нека је првобитна цена злата била x. После једног дана рада берзе цена злата ће износити $1{,}1\cdot 0{,}9=0{,}99$ своје почетне цене тог дана, тј. опашће за 1% почетне цене за тај дан. Стога ће цена x_k злата после k, $0\leqslant k\leqslant 49$, дана рада берзе бити $x_0=x$, $x_{k+1}=x_k-1\%\,x_k>x_k-1\%\,x$. Дакле, $x_{50}>x_{49}-1\%\,x>x_{48}-2\%\,x>\cdots>50\%\,x$.

79. Конструишемо најпре правоугли троугао $AA'A_1$. Потом одредимо тежиште T троугла ABC које дели тежишну дуж AA_1 у односу $2:1$. Тачку B добијамо у пресеку праве $A'A_1$ и круга са центром T и полупречником $\frac{2}{3}BB_1$.

80. Ако са E означимо средиште дужи BD, биће $ED=EB=EC$ због $\angle BCD=90^\circ$. Стога је $\angle EBC=\angle ECB$, па је $\angle DEC=\angle EBC+\angle ECB=30^\circ$ и $\angle AEC=\angle EAC\,(=30^\circ)$ даје за последицу $AC=EC=\frac{1}{2}DB$.

81. Број $n^3-n=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ је производ три узастопна природна броја, па је дељив са 3. Стога број n^3-n+2^n није дељив са 3, а тиме ни са $1992=3\cdot 664$.

82. Сваки природан број већи од 7 је облика $8+3k$, $9+3k$ или $10+3k$, $k=0,1,\ldots$. Стога је довољно представити бројеве 8, 9 и 10 на тражени начин, тј. $8=3+5$, $9=3\cdot 3$ и $10=2\cdot 5$ доказује тврђење задатка.

83. Ако се сви међусобно познају, тврђење је доказано. У противном, два човека који се не познају поставићемо за столом један наспрам другог. Назовимо их лице A и лице B. Међу преосталих двадесетчетворо људи има 13 познаника лица A и 13 познаника лица B, па су бар два познаника заједнчка. Два заједничка познаника лица A и B сместићемо између њих.

84. Углови $\angle ABF$ и $\angle ADF$ су једнаки као периферијски углови круга над заједничком тетивом, а исто важи и за углове $\angle BFC$ и $\angle BDC$. Како је $\angle ADF=\angle BEC$, то је $\angle ABF=\angle BFC$, па су праве AB и CF паралелне.

85. Претпоставимо да је задатак решен и да је ABC тражени троугао. Нека је T тежиште троугла ABC и C_1 средиште хипотенузе AB. Тада тачка T дели тежишну линију BB_1 у односу $2:1$ и важи $TC=\frac{2}{3}CC_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AB=$

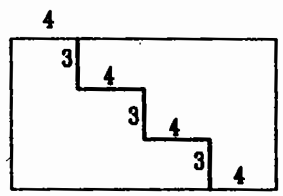
$\frac{1}{3}AB$. Стога се тачка C налази у пресеку круга над пречником BB_1 и круга са центром у тачки T и полупречником $\frac{1}{3}AB$.

86. Означимо са x и y количине сока узетог из прве и друге чаше. Тада се у трећој чаши налази $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y$ сока и $\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y$ воде, па је

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{17}=\frac{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}{27},\quad \frac{5x+6y}{10x+9y}=\frac{17}{27},\quad \frac{x}{y}=\frac{9}{35}.$$

87. Из услова задатка је $\frac{a}{b}=k$ природан број. Даље је $245=a+b+a\cdot b+a-b+\frac{a}{b}=2bk+b^2k+k=k(b^2+2b+1)=k(b+1)^2$. Како је $245=5\cdot 7^2$, то је $k=5$, $b=6$ и $a=5\cdot 6=30$.

88. В. слику.



Слика уз задатак 88

89. Нека су O и S центри кругова полупречника R, односно r, и T тачка њиховог додира. Тачке O, S и додири круга полупречника r са крацима правог угла су темена квадрата странице r, па је $OS=r\sqrt{2}$. Тачке O, S и T су колинеарне, па је $R=r\sqrt{2}+r$. Стога је $P=\frac{1}{4}R^2\pi-\left(\frac{R}{\sqrt{2}+1}\right)^2\pi$.

90. а) Површина основе базена је $1{,}5\cdot 4=6\,\mathrm{m}^2$, па је висина воде била $\frac{4{,}5}{6}=0{,}75\,\mathrm{m}$. Укупна запремина воде и коцке је $5{,}5\,\mathrm{m}^3<6\,\mathrm{m}^3$, па је након спуштања коцке ниво воде нижи од $1\,\mathrm{m}$ и коцка „вири“ изван воде. Стога вода образује „призму“ површине основе $6-1=5\,\mathrm{m}^2$ и висине $\frac{4{,}5}{5}=0{,}9\,\mathrm{m}$. Дакле, ниво воде се подигао за $15\,\mathrm{cm}$.

б) Сада је укупна запремина $4{,}5+3=7{,}5\,\mathrm{m}^3$, па вода покрива коцке. Ниво воде је $\frac{7{,}5}{6}=1{,}25\,\mathrm{m}$ и подигнут је за $35\,\mathrm{cm}$.

91. Из $a:b=2:3$, $a:d=3:5$ и $b:c=6:5$ следи да је $b=\frac{3a}{2}$, $d=\frac{5a}{3}$ и $c=\frac{5b}{6}=\frac{5a}{4}$. Дакле, $2d-a-c=\frac{10a}{3}-a-\frac{5a}{4}=26$, па је $\frac{40-12-15}{12}a=26$, односно $13a=12\cdot 26$. Коначно добијамо да је $a=24$, $b=36$, $c=30$ и $d=40$.

92. Нека су a и b дужине страница правоугаоника. Тада је $ab=2(a+b)$ или $ab-2a-2b=0$. Значи $ab-2a-2b+4=4$, тј. $a(b-2)-2(b-2)=4$, па следи да је $(a-2)(b-2)=4$. Нека је $b\leqslant a$. Тада постоје следеће могућности:

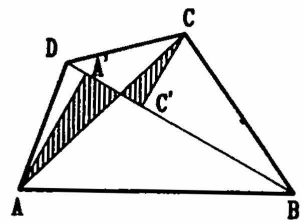
(1) $a-2=1$, $b-2=4$. Тада је $a=3$, $b=6$.

(2) $a-2=2$, $b-2=2$. Тада је $a=4$, $b=4$.

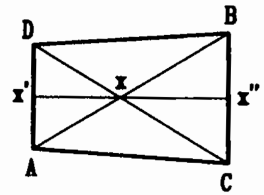
93. Нека је дат четвороугао $ABCD$ и нека је $AC\cap BD=\{S\}$, слика. Како је

$$P_{\triangle ABD}=\frac{BD\cdot AA'}{2}=P_{\triangle BCD}=\frac{BD\cdot CC'}{2},$$

следи да је $AA'=CC'$. Даље је $\measuredangle A'SA=\measuredangle CSC'$, па је $\triangle AA'S\cong\triangle CC'S$ ($\measuredangle A'=\measuredangle C'=90°$, $\measuredangle A'AS=\measuredangle C'CS$). Из подударности следи да је $AS=CS$. Слично се доказује и да је $BS=DS$. Како се дијагонале четвороугла полове, дати четвороугао је паралелограм.



Слика уз задатак 93



Слика уз задатак 94

94. Како је $AX=DX$, $\measuredangle AXC=\measuredangle BXD=120°$ и $BX=DX$, то следи да је $\triangle AXC\cong\triangle BXD$, слика. Из ове подударности добијамо $AC=BD$. Како је $\measuredangle DAB=\measuredangle ABC=60°$, то је $AD\parallel BC$. Даље добијамо:

$$\begin{aligned}P_{ACBD}&=\frac{AD+BC}{2}\cdot X'X"=\frac{AX+BX}{2}\cdot(XX'+XX")\\&=\frac{d}{2}\cdot\left(\frac{AX\sqrt{3}}{2}+\frac{BX\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{d\sqrt{3}}{4}(AX+BX)=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}.\end{aligned}$$

95. Нека 16 кивија вреди колико x лимунова. Тада x кивија вреди колико 36 лимунова. Значи $16:x=x:36$, па следи да је $x^2=16\cdot 36$, тј. $x=4\cdot 6=24$. Дакле, 16 кивија вреди колико 24 лимуна, па туце лимунова вреди колико и 8 кивија.

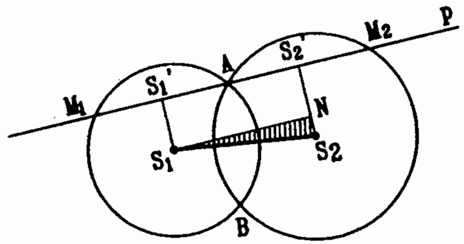
96. Дату једначину еквивалентно трансформишемо на следећи начин:

$$\frac{a+b-x}{c}+1+\frac{a+c-x}{b}+1+\frac{b+c-x}{a}+1+\frac{4x}{a+b+c}=4,$$
$$\frac{a+b+c-x}{c}+\frac{a+b+c-x}{b}+\frac{a+b+c-x}{a}=4\cdot\frac{a+b+c-x}{a+b+c},$$
$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0.$$

Размотримо два случаја:

(1) Ако је $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{4}{a+b+c}$, једначина је еквивалентна са $(a+b+c-x)\cdot 0=0$, па следи да је сваки реалан број x решење једначине.

(2) Ако је $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\neq\frac{4}{a+b+c}$, онда је $x=a+b+c$ једино решење једначине.

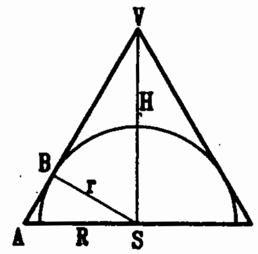


Слика уз задатак 97

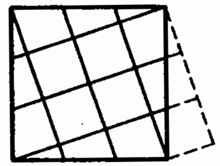
97. Нека су S_1' и S_2' подножја нормала из S_1 и S_2 на p, слика. Како су тачке S_1' и S_2' редом средишта дужи AM_1 и AM_2, то следи да је $M_1M_2=2\cdot S_1'S_2'$. Даље је $M_1M_2=2\cdot S_1'S_2'=2\cdot S_1N\leq 2\cdot S_1S_2$, јер је катета S_1N мања од хипотенузе S_1S_2 правоуглог троугла S_1S_2N. Једнакост важи ако и само ако се троугао S_1S_2N „дегенерише" у дуж, тј. ако је $S_1S_2 \parallel S_1'S_2'$.

98. Троуглови ASB и AVS су слични, јер је $\measuredangle A=\measuredangle A$, $\measuredangle B=\measuredangle S=90°$, слика. Из сличности следи $AS:BS=AV:SV$, тј. $R:r=\sqrt{H^2+R^2}:H$. Даље добијамо $R\cdot H=r\cdot\sqrt{H^2+R^2}$, тј. $R^2H^2=r^2H^2+r^2R^2$, одакле следи да је $R^2=\frac{r^2H^2}{H^2-r^2}$. Запремина купе је

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2H^2H}{H^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi\frac{r^2H^3}{H^2-r^2}.$$



Слика уз задатак 98



Слика уз задатак 99

99. Решење је приказано на слици.

100. До момента сусрета возова протекне време које је једнако

$$t=\frac{300}{v_1+v_2}=\frac{300}{120}=2.5\,\mathrm{h}.$$

За то време ласта је прелетела пут $s=120\cdot 2{,}5=300\,\mathrm{km}$.

1993. година

101. $a+b=7$, $(a,b)\in\{(6,1),(5,2),(4,3)\}$, $P_{max}=4\cdot 3=12$.

102. Пре друге размене $\frac{2}{3}$ Мићиног новца било је 80 динара, тј. Мића је имао 120 динара, а Аца 40. Како је Аца у првој размени дао половину свог новца, то значи да је на почетку имао 80 динара.

103. У низу има 9 једноцифрених, 90 двоцифрених и $(1993-189):3=601\,(1)$ троцифрених бројева. 602. троцифрен број је 701, па је на 1993. месту цифра 7.

104. $6\cdot b=2250-1800=450$, $b=75$, $a=30$.

105. Број дужи је $5\cdot(3+2+1)=30$, а број троуглова је $5+5=10$.

106. $X\in\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$.

107. $a=3\cdot b+4$, $4\cdot b+4=24$, $b=5$, $a=19$.

108. $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=\dots 3$, $7^4=\dots 1$, $7^5=\dots 7,\dots,7^8=\dots 1,\dots,7^{12}=\dots 1,\dots,7^{1992}=\dots 1$, $7^{1993}=\dots 7$.

109. $a\in\{1,\dots,9\}$, $b\in\{0,5\}$. За $b=5$ је $a=9$, а за $b=0$ је $a=5$.

110. $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$, па је $7\alpha=5\beta$, $\alpha+\beta=180^\circ$. Дакле, $\alpha=75^\circ$, $\beta=105^\circ$.

111. Има их 18: $567, 576, 657, 675, 756, 765, 1567, 1576, 1657, 1675, 1756, 1765, 2357, 2375, 2537, 2573, 2735, 2753$.

112. $-\frac{43}{12}<x<-\frac{8}{12}$, тј. $x\in\{-1,-2,-3\}$.

113. $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{11}{5}$, па $x\in\left\{-\frac{17}{10},\frac{27}{10}\right\}$.

114. Нека је $\measuredangle C=90^\circ$, $\measuredangle A\geqslant\measuredangle B$, D подножје висине из темена C и M средиште странице AB. Тада је $\measuredangle BCM=\measuredangle CBM=90^\circ-\measuredangle A=\measuredangle ACD$, па је p симетрала угла $\measuredangle C$.

115. Како је $\measuredangle CDA=\measuredangle B+\measuredangle BCD$ и $\measuredangle CDA=\measuredangle A=\measuredangle B+37^\circ$, то је $\measuredangle BCD=37^\circ$.

116. Треба конструисати дуж $\sqrt{3}\cdot AB=\sqrt{AB^2+AC^2}$.

117. Нова површина је $0.8\cdot 1.2=0.96$ старе, дакле умањена је за 4 процента.

118. $(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$.

119. Број партија које је свако од ученика одиграо у неком тренутку је елемент скупа $\{1,2,\dots,7\}$ уколико постоји бар један ученик који је играо са свима, или елемент скупа $\{0,1,\dots,6\}$ у противном. Како оба скупа имају по седам елемената у сваком тренутку постоје бар два ученика са једнаким бројем до тада одиграних партија.

120. Брат има 36 година, а сестра 27.

121. $2+3$ равни је одређено једном од правих p, q и једном од тачака са друге, 2 равни одређују ове праве са тачком F, а 6 равни одређује тачка F са по једном тачком датих правих. Дакле, укупно је одређено 13 равни.

122. $\frac{8-5x}{x-1}>0$, тј. $x\in\left(1,\frac{8}{5}\right)$.

123. ΔBO_1A и ΔBO_2C су једнакокраки, и $\measuredangle O_1BA=\measuredangle O_2BC$ (унакрсни), па је $O_1A\parallel O_2C$ због $\measuredangle O_1AB=\measuredangle O_2CB$. Тангенте су паралелне јер су нормалне на O_1A и O_2C.

124. $8^n+8^n\cdot 8^1+8^n\cdot 8^2=8^n\cdot(1+8+64)=73\cdot 8^n=584\cdot 8^{n-1}$.

125. Висина одсеченог дела једнака је висини коцке, па је површина основе $\frac{2}{3}$ површине основе коцке. Дакле $x=\frac{20}{3}$, $y=\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^2+10^2}=\frac{10}{3}\cdot\sqrt{13}$.

126. Прва, четврта и седма колона су једнаке, а исто важи за другу, пету, осму, као и за трећу и шесту колону. Слично су прва и четврта врста једнаке. Прву врсту попуњавамо бројевима: 2,5,5,2,5,5,2,5; другу 4,7,1,4,7,1,4,7; трећу 6,0,6,6,0,6,6,0; четврту 2,5,5,2,5,5,2,5.

127. Бројеви дечака, девојчица и наставника се односе као $10:15:1$, па има $312:26=12$ наставника, $15\cdot 12=180$ девојчица и $10\cdot 12=120$ дечака.

128. Ја имам четири прабабе, па оне имају $4\cdot 4=16$ прабаба.

129. Централни број магичног квадрата је аритметичка средина било које врсте, колоне или дијагонале. Дакле, врсте магичног квадрата су 16,15,20; 21,17,13 и 14,19,18.

130. Тражени бројеви су 1110, 1101, 1011, 1200, 1020, 1002, 2100, 2010, 2001 и 3000.

131. $\frac{3}{4}=\frac{15}{20}=\frac{90}{120}$, $\frac{4}{5}=\frac{16}{20}=\frac{96}{120}$, па је једно решење

$$\left\{\frac{91}{120},\frac{92}{120},\frac{93}{120},\frac{94}{120},\frac{95}{120}\right\}.$$

132. Белић није црнокос, па је жутокос. Црнковић стога није жутокос, па му је коса беле боје, а Жутићу преостаје црна боја косе.

133. Производи количника q са 144 и 143 разликују се за 24. Стога је $q = 24$, а $x = 24 \cdot 144 + 108 = 3564$.

134. Тражени скупови су $A = \{1, 3, 5, 6\}$, $B = \{6\}$, $C = \{2, 4\}$.

135. Како је $\alpha + \beta = 180°$ и $\alpha - \beta = 36°$, то је $\alpha = 108°$, $\beta = 72°$ и $\gamma = 18°$.

136. $\frac{6}{5}$ девојчица и $\frac{6}{7}$ дечака чини укупан број ученика школе, па је $\frac{1}{5}$ девојчица исто што и $\frac{1}{7}$ дечака, односно бројеви девојчица и дечака се односе као $5 : 7$. Девојчица има $\frac{5}{12} \cdot 240 = 100$, а дечака $240 - 100 = 140$.

137. Врста, колона и дијагонала има 8, а могућих збирова 7 (од $1+1+1 = 3$ до $3+3+3 = 9$). Стога је тражени распоред немогућ.

138. $c = 1993$, $d = 0$, $e = 997 \cdot 1993$, $|c - d| = 1993$, $|d - e| = 997 \cdot 1993$ и $|e - c| = 996 \cdot 1993$.

139. Троугао MBC је једнакокрак, па је $\measuredangle BMC = \measuredangle BCM$. Угао $\measuredangle ABC$ је спољашњи угао троугла MBC, па је $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BMC$. Дакле, симетрала s_B угла $\measuredangle ABC$ и права MC са правом AB образују једнаке углове, што повлачи $s_B \parallel MC$.

140. Нека је ABC правоугли троугао са правим углом у темену C, $\measuredangle CAB = 36°$, M средиште дужи AB и C' подножје висине из темена C на AB. Тада је $MA = MC$, па је $\measuredangle ACM = 36°$, $\measuredangle ACC' = 90° - 36° = 54°$, одакле је тражени угао $54° - 36° = 18°$.

141. $65^{333} > 64^{333} = (2^6)^{333} = 2^{1998} > 2^{1993}$.

142. $t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, $t_c^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2$, па је $t_a^2 + t_b^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2+b^2}{4} = 5 \cdot \frac{a^2+b^2}{4} = 5 \cdot t_c^2$.

143. Ако би $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ био рационалан број и једнак $\frac{p}{q}$, где је $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ и $(p, q) = 1$, тада би $\sqrt{21}$ био рационалан због $10 - 2\sqrt{21} = \frac{p^2}{q^2}$. Ако би било $\sqrt{21} = \frac{r}{s}$, где је $r \in \mathbf{Z}$, $s \in \mathbf{N}$ и $(r, s) = 1$, тада би било $21 \cdot s^2 = r^2$, што је немогуће, јер број на левој страни има прост број 3 на непарном степену, а број на десној страни на парном.

144. $\frac{1}{4} \cdot 115\% + \frac{1}{2} \cdot 90\% + \frac{1}{4} \cdot (100 + x)\% = 1$, па је $x = 5$.

145. Ако је $MN = 12\,\text{cm}$ и $NP = b$, тада је $P_{ABC} = 216\,\text{cm}^2 = (P_{AMQ} + P_{NBP}) + P_{MNPQ} + P_{QPC} = (24-12) \cdot \frac{b}{2} + 12 \cdot b + 12 \cdot (18 - b)$. Одатле је $b = 9\,\text{cm}$ и $P_{MNPQ} = 108\,\text{cm}^2$. Ако је $MN = a$ и $NP = 12\,\text{cm}$, тада је $P_{ABC} = 216\,\text{cm}^2 = (P_{AMQ} + P_{NBP}) + P_{MNPQ} + P_{QPC} = (24 - a) \cdot \frac{12}{2} + 12 \cdot a + a \cdot (18 - 12)$. Одатле је $a = 8\,\text{cm}$ и $P_{MNPQ} = 96\,\text{cm}^2$.

146. После x часова растојање између бродова је

$$\sqrt{(300 - 40x)^2 + (100 - 30x)^2} = 50 \cdot \sqrt{(x-6)^2 + 4}.$$

Растојање је најмање после 6 часова и износи $50 \cdot 2 = 100\,\text{km}$.

147. У мешавини има $40 \cdot \frac{60}{100} + 60 \cdot \frac{40}{100} = 48\,\text{l}$ алкохола и $100 - 48 = 52\,\text{l}$ воде. За 25% раствор треба укупно $48 \cdot 3 = 144\,\text{l}$ воде, па треба сипати $92\,\text{l}$ воде.

148. Због $x - 1 \mid 2$ је $(x - 1) \in \{\pm 1, \pm 2\}$. Како је x негативан цео број, то је $x = -1$, а тада је $a = -4$.

149. Нека је b крак једнакокраког троугла базе и h_a висина која одговара основици. Тада висина базе из темена угла од $120°$ разлаже троугао на два подударна троугла са угловима од $60°$ и $30°$, па је $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$ и $h_a = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Тада је $B = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$, $M = \frac{a^2}{2\sqrt{3}} = H\left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right)$, одакле је $H = \frac{a}{2\sqrt{3}+4}$. Дакле, $V = B \cdot H = \frac{a^3}{6 + 4\sqrt{3}}$.

150. Нека су O_1 и O_2 центри ових кругова. Тада је $\measuredangle CBD = 180° - (\measuredangle BCA + \measuredangle BDA) = 180° - \frac{1}{2}(\measuredangle BO_1A + \measuredangle BO_2A) = 180° - (\measuredangle BEA + \measuredangle BFA) = \measuredangle EBF$.

151. Ако су димензије правоугаоника x и y, тада је $x \cdot y = 100$, па је $x \in \{1, 2, 4, 5, 10\}$. Обими ових правоуганика су $202, 104, 58, 50, 40$. Највећи обим има правоугаоник димензија 1×100, а најмањи 10×10.

152. Најпре је $A = 1$. Како се сабирањем задње колоне „памти“ 1 или 2, то је $1 + A + B + C = 10 + C$, или $2 + A + B + C = 10 + C$, па је $A + B = 9$, или $A + B = 8$. Случај $A + B = 9$ је немогућ, јер је због друге колоне $C = A + B + 1$. Дакле, $B = 7$, $C = 9$ и $D = 6$.

153. Ако има k кокошака и p прасића, тада је $k + p = 40$ и $2k + 4p = 130$, тј $k + p = 40$ и $k + 2p = 65$. Дакле, $p = 65 - 40 = 25$ и $k = 40 - 25 = 15$.

154. Прво прелазе реку два дечака, потом се један дечак врати назад, па реку пређе прва одрасла особа. Сада се и други дечак врати назад, а друга одрасла особа пређе реку на исти начин као прва. Тако ће се на другој страни реке наћи две одрасле особе и један дечак. Овај дечак се враћа по друга и у задњем преласку су њих двојица у чамцу. (Укупно има девет прелазака.)

155. Ако је страница квадрата x, тада је квадрату одузет правоугаоник површине $5 \cdot x$ и додат правоугаоник површине $2 \cdot (x-5)$. Дакле, $3x+10=46$, $x=12$.

156. Ако има x девојчица и y дечака, тада је $x+y<15$ и $5x<2y<6x$. Стога је $7x<2x+2y<30$, па је $x \in \{1,2,3,4\}$. Број x не може бити 1 или 2 јер не постоји паран број између $5 \cdot 1$ и $6 \cdot 1$, нити постоји паран број између $5 \cdot 2$ и $6 \cdot 2$. Број x не може бити ни 4 јер из $20<2y<24$ следи $y=11$, па је $x+y=15$, што не може бити, јер дечака и девојчица има мање од 15. Решење је, дакле, $x=3$, $y=8$.

157. Тачка A' симетрична тачки A у односу на праву s је на полуправој q. Стога конструишемо прво тачку A', потом праву $q_1 = A'B$, па тачку $O = q_1 \cap s$ и најзад полуправе $p = OA$ и $q = OB$.

158. Ако Јорданов син не би био Славко, тада би њих четворица, по услову задатка, уловили $2x+4y$, тј. укупно паран број риба. Како 35 није паран број, то је Јорданов син Славко. Уловили су: Јордан 21, Славко 7 и Никола 7 риба.

159. Са 10 корака напред и 2 назад, затим 10 напред и 1 назад дечак направи 23 корака и помери се 17 корака. После $\left[\frac{1000}{17}\right]=58$ оваквих циклуса дечак се померио за 986 корака направивши $58 \cdot 23 = 1334$ корака. Преостало растојање од 14 корака прећи ће употребивши $10+2+6=18$ корака. Дакле, укупно ће направити 1352 корака.

160. Нека је t тангента кружнице k у тачки M. Сада тражена кружница додирује праву p и праву t у тачки M. Стога се њен центар налази на оси симетрије за праве p и t и на нормали на праву t у тачки M. Ако се праве p и t секу, оне имају две осе симетрије и задатак има два решења, а ако су паралелне, имају једну осу симетрије и задатак има једно решење.

161. Средње линије троугла деле троугао на четири једнакостранична троугла странице 0.5 cm. Бар две од ових пет тачака се налазе у истом троуглу странице 0.5 cm и оне су на растојању $\geqslant 0.5$ cm.

162. Због $\measuredangle CPD = \measuredangle APD = \measuredangle PDC$ је $PC = CD = 2BC$, па је $\measuredangle BPC = 30°$. Стога је $\measuredangle APD = 75°$.

163. Збир бројиоца и имениоца се не мења ако се од једног одузме, а другом дода исти број. Стога је $28*3+4276$ дељиво са $2+7=9$, одакле је $*=4$. Даље, $\frac{2843-x}{4276+x}=\frac{2}{7}$ повлачи $x=1261$.

164. Нека је E тачка праве AB, таква да је иза B у односу на A и $BE=DC=3$ cm. Тада је $BECD$ паралелограм и $EC=BD=6$ cm. Конструишемо прво троугао AEC, а потом одредимо тачке B и D на дужи AE и на правој кроз C паралелној са AB тако да је $EB=CD=3$ cm.

165. $\frac{2}{7}=0,285714285714\ldots$, $1993:6=332$ са остатком 1. Дакле, тражена цифра је 2.

166. Централни угао многоугла је $2 \cdot (90° - 67°30') = 45°$, па је многоугао осмоугао $A_1A_2\ldots A_8$. Конструишемо најпре круг над пречником $A_1A_5 = 4$ cm, затим тачке A_2 и A_6, A_3 и A_7, A_4 и A_8 добијамо у пресеку овог круга и правих које пролазе кроз средиште дужи A_1A_5 и са правом A_1A_5 граде углове од 45° и 90°.

167. а) Столице „бирају" ђаке на $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$ начина. б) Ђаци бирају столице на $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 181440$ начина.

168. Нека је $ABCD$ дати трапез, M_1 и N_1 средишта основица AB и CD. Нека су M_2 и M_3 тачке дужи AB такве да је $M_1M_2 = M_1M_3 = 2$ cm. Права M_1N_1 дели трапез на два трапеза једнаких површина, а праве кроз M_2 и M_3 њој паралелне деле ове трапезе на по два дела једнаких површина. Заиста, добијени паралелограми имају исту висину као и трапези, а основицу једнаку половини полузбира основица.

169. Нека је $ABCD$ дати трапез, $AB=24$ cm, $CD=10$ cm, O центар описаног круга, P средиште основице AB и Q средиште основице CD. Тада је $PQ=\sqrt{(13\sqrt{2})^2-(12-5)^2}=17$ cm. Ако OP означимо са x, тада је $r^2=OB^2=x^2+12^2=(17-x)^2+5^2=OC^2$, одакле је $x=5$ cm, $r=13$ cm, $\mathcal{P}=169\pi$ cm^2.

170. Израз $a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2$ има најмању вредност за $a=b=c=d$.

171. По услову задатка је $5 \cdot \overline{abcde7} = \overline{7abcde}$. Ако број $\overline{abcde}$ означимо са x, тада је $5 \cdot (10x+7) = 700000+x$, одакле је $x=14285$.

172. Нека је $A_1A_2\ldots A_n$ основа пирамиде, V врх, V' његова нормална пројекција на раван основе, а $M_1, M_2, \ldots, M_n$ нека су нормалне пројекције врха на праве A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_nA_1$. Тада су $VM_1 = VM_2 = \cdots = VM_n = h$ висине бочних страна, а $V'M_1, V'M_2, \ldots, V'M_n$ висине троуглова $V'A_1A_2, V'A_2A_3, \ldots, V'A_nA_1$. Из подударности дужи $VM_1, VM_2, \ldots, VM_n$ следи подударност правоуглих троуглова $V'VM_1, V'VM_2, \ldots, V'VM_n$, а одавде је $V'M_1 = V'M_2 = \cdots = V'M_n = h'$. Најзад, $\mathcal{M} = 2\mathcal{B}$ повлачи $(A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_1)\cdot\frac{h}{2} = 2\cdot(A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nA_1)\cdot\frac{h'}{2}$, одакле је $h'=\frac{h}{2}$. Стога су углови $\measuredangle VM_1V'$, $\measuredangle VM_2V', \ldots, \measuredangle VM_nV'$ бочних страна према основици једнаки 60°.

173. Нека је $x+2=a^2$ и $x-7=b^2$. Тада је $a^2-b^2=(a-b)(a+b)=9$, одакле је $a-b=1$ и $a+b=9$, или $a-b=a+b=3$. Дакле, $a=5$, $b=4$ и $x=23$, или $a=3$, $b=0$ и $x=7$.

174. Нека је O центар описаног круга и S центар уписаног круга. Тачка S је унутрашња тачка троугла ABC, па је због симетрије у односу на BC тачка O ван троугла ABC и $\angle BOC = 2\cdot(180^\circ - \angle A)$. Даље је $\angle BSC = 180^\circ - \frac{\angle B + \angle C}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$. Даље, због симетрије у односу на праву BC је $\angle BOC = \angle BSC$, па добијамо $90^\circ + \frac{\angle A}{2} = 360^\circ - 2\angle A$, одакле је $\angle A = 108^\circ$. Како је $OB = OC$, то је и $SB = SC$, па је $\angle B = \angle C = 36^\circ$.

175. Ако је туриста дневно прелазио $x\,\mathrm{km}$, тада је $\frac{105}{x-6} - \frac{105}{x} = 2$, одакле добијамо $x\cdot(x-6) = 315 = 21\cdot 15$, па је $x = 21\,\mathrm{km}$.

176. Одливена вода има масу $\frac{12}{100}\cdot 2000 = 240\,\mathrm{g}$. Како је то 20% њене масе, то је маса воде $240\cdot\frac{100}{20} = 1200\,\mathrm{g}$ и маса посуде $800\,\mathrm{g}$.

177. Ако је $p = 2$, тада се $2^{1992} = 2^{4\cdot 498}$ завршава цифром 6 ($2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^{4+1}, \ldots$ се завршавају редом цифрама $2, 4, 8, 6, 2, \ldots$), а 1993^2 цифром 9. Стога је $2^{1992} + 1993^2$ дељиво са 5. Ако је $p > 2$, тада је p непаран, па је број $p^{1992} + 1993^p$ паран.

178. Нека је било x дуката. Први брат је добио $100 + \frac{1}{6}(x - 100)$, а други $200 + \frac{1}{6}(x - 200 - 100 - \frac{1}{6}(x - 100))$ дуката. Како су ова два броја једнака, то је $x = 2500$. Први брат је добио 500 дуката, па их је могло бити петорица. Лако се проверава да се на описани начин 2500 дуката може поделити на петорицу браће.

179. Права BP сече полуправу AC у тачки B', таквој да је $AB' = AB = c$, јер је AP истовремено висина и симетрала угла $\angle A$ троугла ABB'. Ако је $b > c$, тачка B' је на дужи AC и $B'C = AC - AB' = b - c$. Тачка P је подножје висине на основицу једнакокраког троугла ABB', па је P средиште дужи BB'. Одатле је PA_1 средња линија троугла $BB'C$, па је $PA_1 = \frac{b-c}{2}$. Ако је $b = c$, тада је $P = A_1$, па је $PA_1 = 0$. Ако је $c < b$, тада је $PA_1 = \frac{c-b}{2}$.

180. Нека је $ABCD$ тражени квадрат. Нека су M' и N' тачке праве AC такве да је распоред $M' - A - C - N'$ и да је $M'A = N'C = AB$. Тада је $M'N' = MN = 6cm$, $\angle M'N'B = \angle CBN' = 22^\circ 30'$ ($\angle ACB$ је спољашњи угао троугла CBN') и слично $\angle N'M'B = 22^\circ 30'$. Стога, најпре конструишемо троугао $M'N'B$, а тачке A и C добијамо у пресеку дужи $M'N'$ и симетрала дужи $M'B$ и $N'B$.

181. Ако број n има остатак $0, 1, 2, 3, 4$ при дељењу са 5, тада $n^2 + n$ има остатак $0, 2, 1, 2, 0$ при дељењу са 5. Стога је број $3(n^2 + n) + 7$ дељив са 5 ако и само ако n при дељењу са 5 има остатак 2.

182. Прво решење: Ако би 0 могла бити на почетку, тада блок парних цифара и непарне цифре можемо поређати на 4! начина, при чему сваком од тих распореда одговара 3! распореда парних цифара, тј. било би $4!\cdot 3! = 144$ распореда. Како 0 не може бити на почетку, треба одузети $2!\cdot 3! = 12$ распореда, па је тражени број распореда 132.
Друго решење: Кад распоредимо парне цифре, непарне цифре се на преостала три места могу распоредити на $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ начина. Имамо $2\cdot 2\cdot 1 = 4$ могућности да распоредимо парне цифре на прва три места (0 не може бити на првом месту), а по $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ могућности да их распоредимо од другог до четвртог, трећег до петог, или четвртог до шестог места. Стога је тражени број $6(4 + 6 + 6 + 6) = 132$.

183. Збир пет бројева из скупа $\{-1, 0, 1\}$ може бити цео број S такав да је $-5 \leqslant S \leqslant 5$. Како ових бројева има 11, а врста, колона и дијагонала 12, то бар два збира морају бити једнака.

184. Нека је S центар уписаног круга троугла ABC полупречника r. Нека су N и P тачке додира уписаног круга са страницама AC и AB. Тада је $CN = n$, $BP = m$, $AP = AN = r$ (једнакост тангентних дужи). Ако је $\mathcal{P}$ површина троугла ABC, тада је $2\mathcal{P} = (m + r)(n + r) = mn + mr + nr + r^2$. Троуглови PSB, BSM, MSC, CSN, NSA, ASP имају висину r и основице редом m, m, n, n, r, r. Стога је збир њихових површина $\mathcal{P} = m\cdot r + n\cdot r + r^2$, одакле је и $mn = \mathcal{P}$.

185. а) Троуглови BCM и CDN су подударни, па је $\angle MBC = \angle NCD$. Како је $\angle NCD + \angle NCB = 90^\circ$, то је $\angle MBC + \angle NCB = 90^\circ$, одакле је $\angle BEC = 90^\circ$.
б) Прво решење: Ако је P средиште странице BC, тада је $AP \parallel NC$, па је $AP \perp BE$. Права AP полови дуж BE, јер садржи средиште странице BC и паралелна је са EC, па је ABE једнакокраки троугао, тј. $AE = a$.
б) Друго решење: четвороугао $ABEN$ је тетиван, па је $\angle AEB = \angle ANB$. Како је $\angle ANB = \angle CMB = \angle MBA$, то је троугао ABE једнакокрак.

186. Сабирањем једначина система добијамо једначину: $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 + (t-1)^2 = 0$, чије је једино решење: $x = y = z = t = 1$.

187. $x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2) = \underbrace{1\ldots 1}_{20}11\cdot\underbrace{1\ldots 1}_{19}12\cdot\underbrace{1\ldots 1}_{18}09$. Први број је дељив са 11, други број са 4 и 3, а трећи са 9, па је њихов производ дељив са $11\cdot 4\cdot 3\cdot 9 = 1188$.

188. Ако је v брзина, а d дужина воза, тада је $d = (v + 6)\cdot\frac{12.6}{3600}\,\mathrm{km} = (v - 3.6)\cdot\frac{15}{3600}\,\mathrm{km}$. Одатле је $v = 54\,\mathrm{km/h}$ и $d = 210\,\mathrm{m}$.

189. На основу једнакости углова над истим луком кружнице k је $\angle CAD = \angle DBC = 45^\circ$ и $\angle ACD = \angle DBA = 60^\circ$. Ако је E подножје нормале из D

на AC, тада је $\measuredangle ADE = 45^\circ$ и $\measuredangle CDE = 30^\circ$. Стога је $AE = AD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $EC = CD \cdot \frac{1}{2}$. Како је $AD = BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ и $CD = 12\frac{\sqrt{2}}{2}$, то је $AC = AE + EC = 3\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$.

190. $\mathcal{V} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot AD}{6} = \dfrac{1}{6}\sqrt{8\dfrac{AB\cdot AC}{2}\cdot\dfrac{AC\cdot AD}{2}\cdot\dfrac{AD\cdot AB}{2}} = \dfrac{1}{6}\sqrt{8\cdot 3\cdot 4\cdot 6} = 4\,\mathrm{cm}^3$.

191. Петоцифрених бројева има $2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 162$. (0 не може бити на првом месту.) Пребројмо оне бројеве којима су суседне цифре различите: за место десетохиљада имамо две могућности (1 или 3), за свaку од њих за место хиљада имамо две могућности, ... Дакле, бројева са различитим суседним цифрама има $2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$, па тражених бројева има 130.

192. Нека је Миле имао укупно x марака. Решење даје једначина $\frac{x}{5} + \frac{xy}{7} + 303 = x$. Одавде је $x = \frac{35\cdot 303}{28-5y}$. Очигледно је y непаран број и мањи је од 7. Од кандидата 1, 3, 5, целобројно решење за x даје само $y = 5$. Тада је $x = 3535$.

193. Квадрирањем $a - b \geqslant 2$ добијамо $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 4$. Ову једнакост саберемо са неједнакошћу $(a+b)^2 \geqslant 0$, односно $a^2+2ab+b^2 \geqslant 0$. Збир даје неједнакост $2a^2 + 2b^2 \geqslant 4$, тј. $a^2 + b^2 \geqslant 2$. Квадрирањем ове неједнакости и сабирањем са $(a^2-b^2)^2 \geqslant 0$, односно $a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geqslant 0$, добијамо $a^4 + b^4 \geqslant 2$.

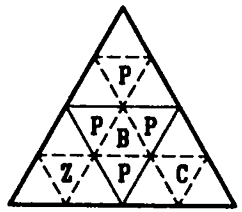
194. Права CM је симетрала угла $\measuredangle ACB$, па је $S \in CM$. Једноставно показујемо $MA = MB$. Докажимо стога само $MA = MS$. У троуглу ACS са унутрашњим угловима $\measuredangle SAC = \frac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle ACS = \frac{\gamma}{2}$, угао $\measuredangle ASM$ је спољашњи, па је $\measuredangle ASM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Даље је $\measuredangle SAM = \measuredangle SAB + \measuredangle BAM$, па како је $\measuredangle SAB = \frac{\alpha}{2}$, а $\measuredangle BAM = \measuredangle BCM = \frac{\gamma}{2}$ (периферијски углови над истим луком), то је и $\measuredangle SAM = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Дакле, $\measuredangle ASM = \measuredangle SAM$, па је и $SM = AM$.

195. Према услову задатка је $\measuredangle ABD = \measuredangle CBD$. Троугао BDE је једнакокрак и $\measuredangle BDE = \measuredangle DBE$. За троугао BCD је $\measuredangle BDE$ спољашњи угао, па је $\gamma = \measuredangle BDE - \measuredangle CBD$. Сем тога је: $\measuredangle ABE = \measuredangle DBE - \measuredangle DBA = \measuredangle BDE - \measuredangle CBD = \gamma$. Дакле, $\triangle ABE \sim \triangle BCE$ (заједнички $\measuredangle BEC$), па је $BE : CE = AE : BE$ и због $DE = BE$ је $DE : CE = AE : DE$, одакле је $DE^2 = AE \cdot CE$.

196. Велика казаљка обиђе пун круг док мала пређе $\frac{1}{12}$ круга (5 min). Ако са x означимо број минута које је Милан провео у путу, закључујемо да је за то време мала казаљка прешла $\frac{x}{12}$ минутних подеока, па је $x - 120 + \frac{x}{12} = 60$.

Одавде је $x = \frac{12}{13}\cdot 180 = 2^h 46\frac{2}{13}\,\mathrm{min}$. Ако је Милан кренуо у y минута до 9, тада ће до 9^h велика казаљка прећи y минутних подеока, а мала $\frac{y}{12}$ минутних подеока. Како је растојање између казаљки $\frac{180}{13}$ минутних подеока, то је $\frac{180}{13} - \frac{y}{12} + y = 15$, одакле је $y = \frac{12}{11}\cdot\frac{15}{13}$.

197. Нека је $P(x) = x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$. За $x < 0$ су сви сабирци позитивни, па је $P(x) > 0$. Даље је $P(0) = 1 > 0$. Како је $P(x) = x^5(x^3-1) + x(x-1) + 1$, то за $x \geqslant 1$ је $x^3 - 1 \geqslant 0$ и $x - 1 \geqslant 0$, па је $P(x) > 0$. Осим тога је $P(x) = x^8 + x^2(1-x^3) + (1-x)$, па за $0 < x < 1$ је $1 - x^3 > 0$, $1 - x > 0$ и $x^8 > 0$, па је и $P(x) > 0$.



Слика уз задатак 198

198. На слици је омотач овог тетраедра. Нека је средњи троугао „база" тела. Очигледно, на свакој страни је централни троугао обојен једном бојом, а остала три другом бојом. (На слици је база обојена са B и три пута P.) За базу, чији је централни троугао B, постоје укупно три могућности. За сваку од њих за централне троуглове осталих страна тада имамо по две могућности: PCZ (као на слици) или PZC. За сваку од ових шест могућности, постоје три различита бојења осталих страна (за случај са слике то су: (PB, CZ, ZC) или (PC, CZ, ZP) или (PZ, CP, ZC)). Стога укупно постоји $3\cdot 2\cdot 3 = 18$ различитих бојења.

199. Нека је S средиште тетиве EF. Тада је $OS \perp EF$. Међутим, OS је средња линија трапеза $CDFE$, па је $CE \parallel OS \parallel DF$ и отуда $CE \perp EF$ и $DF \perp EF$.

200. Од запремине дате призме ($\mathcal{V} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot H = 3\,\mathrm{cm}^3$) треба одузети запремину четворостране пирамиде $BACC'A'$, са базом $ACC'A'$ и висином $AB = 1\,\mathrm{cm}$. Површина базе (трапеза) $ACC'A'$ је $\mathcal{B} = \frac{2+4}{2}\cdot 1 = 3\,\mathrm{cm}^2$, па је запремина пирамиде $\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}\mathcal{B}\cdot AB = 1\,\mathrm{cm}^3$. Запремина преосталог дела призме је $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = 2\,\mathrm{cm}^3$.

1994. година

201. (а) 3418502; (б) 9618502. **202.** 90.

203. 21 (5,14,23,32,41,50,104,113,122,131,140,203,212,221,230,302,311,320, 401, 410,500).

204. $997 = (1994 - 1993) + (1992 - 1991) + \cdots + (6-5) + (4-3) + (2-1)$.

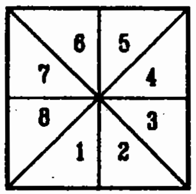
205. 10 дужи и 8 троуглова.

206. $\{3,4,6\}$; $\{3,4,5,6\}$; $\{1,3,4,6\}$; $\{1,3,4,5,6\}$.

207. $\alpha = \frac{1}{2}(180° - \alpha) + 18°$. $\alpha = 72°$.

208. $246 \cdot 15 = 3690$.

209. Најпре напунимо суд од 51 и из њега напунимо суд од 31. У великом суду остаје 21. Сада вратимо 31 у буре, а у суд од 31 сипамо 21. Потом поново напунимо суд од 51 и допунимо суд од 31 са 11. У суду од 51 остаје 41.



Слика уз задатак 210

210. На свакој од 8 дужи има по три дужи. Дакле дужи је $8 \cdot 3 = 24$. Троуглова је укупно 16 (1,2,3,4,5,6,7,8,12,34,56,78,1234,3456,5678,7812, слика).

211. $x = 1$.

212. Ако дозволимо да „предње“ цифре буду нуле, тада има по пет могућности за прву и другу цифру, а три за трећу (0,4,8). Одговор: $5 \cdot 5 \cdot 3 - 1 = 74$.

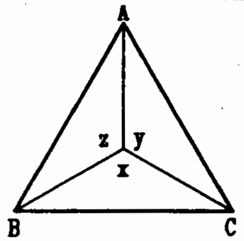
213. $\frac{x}{10} = \frac{y}{9}$, $\frac{9}{10}x = \frac{10}{9}y - 17$. $x = 170$, $y = 153$.

214. $x = 180° - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, $y = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}$, $z = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$, $x = y = z$ $\Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma$, слика.

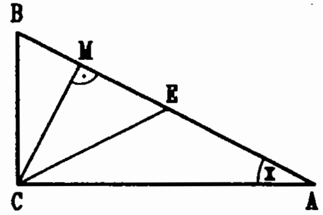
215. Ако је $\measuredangle CAB = x$, онда је $\measuredangle ACM = 90° - x = \measuredangle BCE$, слика.

216. Ако је x број редова, односно број столица у реду, онда је $2x^2 = 578$ и $x = 17$.

217. У 24 kg сувог грожђа има 82% суве материје, што је $24 \cdot 0{,}82 = 19{,}68$ kg, а то чини 30% од укупне количине свежег грожђа, па је потребно $19{,}68 : 0{,}3 = 65{,}6$ kg свежег грожђа.



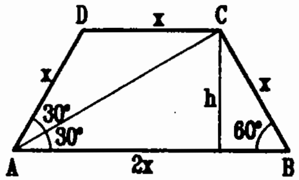
Слика уз задатак 214



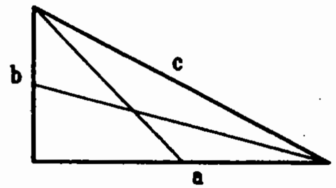
Слика уз задатак 215

218. $a^4 + b^4 + 1 = P^2 + 2a^2 + 2b^2 - 2a^2b^2 \Longrightarrow P^2 = (a^2 + b^2 - 1)^2 \Longrightarrow P = a^2 + b^2 - 1$ или $P = 1 - a^2 - b^2$.

219. Како AC полови $\measuredangle A$, трапез је једнакокрак (слика). Обим је тада $5x = 200$ cm, $x = 40$ cm, $AB = 80$ cm, $h = 20\sqrt{3}$ cm, $P = 1200\sqrt{3}$ cm^2.



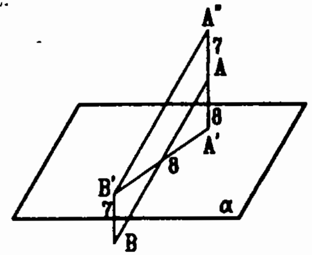
Слика уз задатак 219



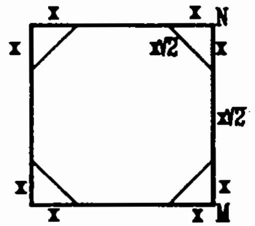
Слика уз задатак 220

220. Како је $a^2 + (b/2)^2 = 16$ и $(a/2)^2 + b^2 = 49$, то је $a^2 + b^2 = 52$, одакле је $c = 2\sqrt{13}$ cm (слика).

221. $AB^2 = (A''B')^2 = (A'A'')^2 + (A'B')^2 = 15^2 + 8^2 = 289$, $AB = 17$ cm, слика.



Слика уз задатак 221



Слика уз задатак 222

222. Из $MN = 2x + x\sqrt{2}$ добијамо $x = 3(2 - \sqrt{2})$ (слика). Збир површина четири одсечена једнакокрака троугла једнак је површини квадрата странице $x\sqrt{2}$. $V = 6\left[6^2 - \left(3\sqrt{2}(2 - \sqrt{2})\right)^2\right] = 432(\sqrt{2} - 1)$ cm^3.

223. Из $(34 + x)/(53 + x) = 4/5$ добијамо $x = 42$.

224. $\frac{1}{4}v = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{20}\right)(v-6)$, $v = 36\,\text{km/h}$ и $AB = 18\,\text{km}$.

225. Срећивањем једначину сводимо на $x\cdot(1/2)=10$, одакле је $x=20$.

226. $9\cdot 1+90\cdot 2+(789-99)\cdot 3 = 2159$.

227.

5	10	3
4	6	8
9	2	7

Слика уз задатак 227

228. Тражени правоугаоници су $(1,36)$; $(2,18)$; $(3,12)$; $(4,9)$ и $(6,6)$. Највећи обим је $2(1+36)=74\,\text{cm}$, а најмањи $2(6+6)=24\,\text{cm}$. Правоугаоника има 5.

229. Нека наредне године Јагода има x, а Нада $x+7$ година. Тада је $2x = x+7$, $x=7$. Јагода има 6, а Нада 13 година.

230. Нека од могућих решења су: $(4\cdot 4+4)\cdot(4+4:4)=100$, $(444-44):4=100$.

231. $\frac{1}{181}=\frac{11}{181\cdot 11}=\frac{11}{1991}>\frac{11}{1994}$.

232. $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{2,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$ — укупно 16.

233. $\alpha+\frac{180^\circ-\alpha}{3}=90^\circ$, па је $2\alpha=90^\circ$, односно $\alpha=45^\circ$, $\beta=135^\circ$.

234. Има пет решења: $(0,8)$, $(2,6)$, $(4,4)$, $(6,2)$, $(8,9)$.

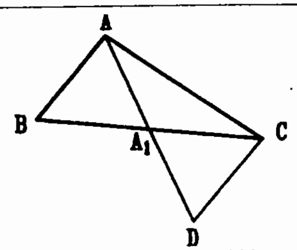
235. $x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100$, $\frac{11x}{4}=99$, $x=36$.

236. Уписано је $\frac{8}{7}x=\frac{24}{21}x$, напустило $\frac{1}{21}x$, остало $\frac{23}{21}x$ ученика. $\frac{2}{21}x=10$, $x=105$.

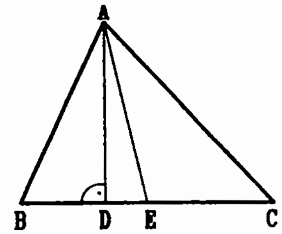
237. Ако би ученици говорили највише по 2 језика, било би $17+17+17\leqslant 2\cdot 25$.

238. Ако је x цена цигле, а y цена црепа, онда је $\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}y+1$ и $1+2x=3y$, што даје $y=5$, $x=7$.

239. $\measuredangle BAE=\frac{1}{2}\measuredangle A$, $\measuredangle BAD=90^\circ-\measuredangle B$, $\measuredangle DAE=\frac{1}{2}\measuredangle A-(90^\circ-\measuredangle B)=\frac{\measuredangle B-\measuredangle C}{2}$, слика.



Слика уз задатак 239



Слика уз задатак 240

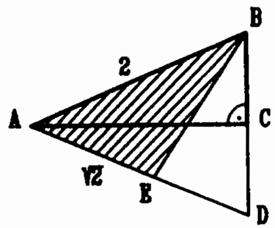
240. Нека је D тачка праве AA_1 тако да је A_1 средиште дужи AD (слика). Тада је $\Delta AA_1B\cong\Delta DA_1C$, па је $AB=DC$. Сада је у троуглу ADC, $2\,AA_1=AD<AC+DC=AC+AB$.

241. $\sqrt{10}-\sqrt{6}=\sqrt{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{2}\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}\sqrt{8-2\sqrt{15}}=2\sqrt{4-\sqrt{15}}$. $A=(4+\sqrt{15})\cdot 2\sqrt{4-\sqrt{15}}\sqrt{4-\sqrt{15}}=2(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=2$.

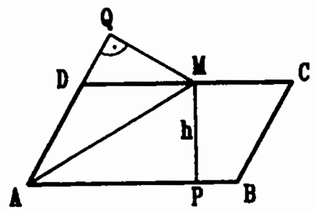
242.
$$\begin{aligned}1991\cdot 1992\cdot 1993\cdot 1994+1&=(1993-2)(1993+1)\cdot 1993\cdot(1993-1)+1\\&=(1993^2-1993-2)(1993^2-1993)+1\\&=(1993^2-1993)^2-2(1993^2-1993)+1=(1993^2-1994)^2.\end{aligned}$$

243. Производ два двоцифрена броја је између бројева $10\cdot 10=100$ и $99\cdot 99=9801$, па у обзир долазе бројеви 444 и 4444. Како је $444=2^2\cdot 3\cdot 37=12\cdot 37$, то је једно решење. Како је $4444=4\cdot 11\cdot 101$ и како је 101 прост број, то број 4444 не можемо написати као производ два двоцифрена броја.

244. Како је $\measuredangle BAE=2\cdot 22^\circ 30'=45^\circ$, то је $AE=BE=\sqrt{2}$, слика. Тада је $DE=2-\sqrt{2}$, па је $BD^2=BE^2+DE^2=(\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2=8-4\sqrt{2}$. Дакле, $BD=2\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $BC=\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $AC^2=AB^2-BC^2=2+\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.



Слика уз задатак 244

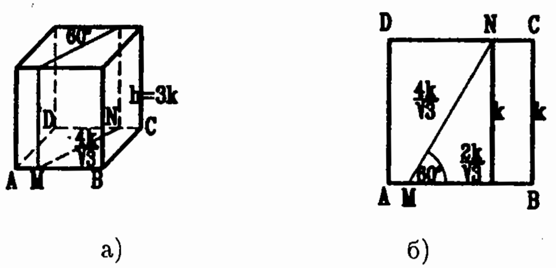


Слика уз задатак 245

245. Како је $MP=MQ=h$, то је $P_{ABCD}=7h\,\text{cm}^2$ и $P_{AMD}=\frac{1}{2}\cdot 4h=2h\,\text{cm}^2$. Дакле, $P_{ABCM}=5h\,\text{cm}^2$, па је тражени однос $2:5$ (слика).

246. На слици б) је показано како се изражава дужина дужи MN помоћу странице квадрата. Према услову, дуж MN полови квадрат $ABCD$, па је збир површина база одсеченог тела једнак површини квадрата. Сем тога, збир површина предње и задње стране омотача једнак је површини леве стране омотача (слика а), па је површина тела:

$$P = 2B + M = k^2 + 2kh + MN \cdot h$$
$$= k^2 + 6k^2 + \frac{2k}{\sqrt{3}} \cdot 3k = 7k^2 + 2k^2\sqrt{3} = k^2(7 + 2\sqrt{3}).$$

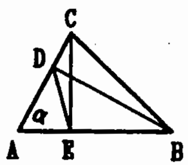


Слика уз задатак 246

247. Права a са сваком од тачака B_1, B_2, B_3, B_4, C одређује по једну раван и права b са сваком од тачака A_1, A_2, A_3, C одређује по једну раван. То је заједно 9 равни. Затим, тројке тачака C, A_1, B_1, C, A_1, B_2 итд. одређују још 12 равни, па имамо укупно 21 раван.

248. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \implies x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 9 \implies \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$, па је $x + \frac{1}{x} = 3$ или $x + \frac{1}{x} = -3$.

249. $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ јер имају заједнички угао α и $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ (нормални краци). Следи да је $AB : AC = AD : AE$. Сада закључујемо да је $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (имају заједнички угао α и пропорционалне странице које тај угао захватају). Отуда следи да је $\measuredangle ADE = \measuredangle ABC$.



Слика уз задатак 249

250. Дата једначина је еквивалентна са

$$\frac{2x-5}{3} + |x-4| = \frac{2}{3} + \frac{x-2}{6} - \frac{x-4}{2}.$$

За $x \geqslant 4$ она се своди на $x = 4$, што је једно решење једначине. За $x < 4$ она се своди на $0 = 0$, што значи да је свако $x < 4$ решење једначине. Од ових решења скупу природних бројева припадају 1, 2 и 3. Тражена решења су $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

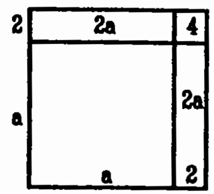
251. Ако је број ученика једнак x, онда јабука има $2x + 19$ или $100 - x$, па је $2x + 19 = 100 - x$. Дакле, $3x = 81$, што значи да ученика има 27, а јабука $100 - 27 = 73$.

252. Једно од решења је $1 + 19 + 199 + 1994 = 2213$.

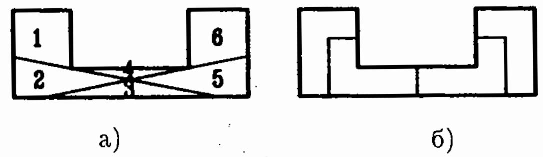
253. Ако би у сваком чамцу било по 6 путника, онда би се преко реке превезло $6 \cdot 9 = 54$ путника. Значи да је $58 - 54 = 4$ путника превезено у чамцима са 8 особа, дакле таквих чамаца има $4 : 2 = 2$. Дакле, чамаца са 6 особа је $9 - 2 = 7$.

254. Површина која је додата је $2 \cdot a + 2 \cdot a + 4 = 144$, па је $4a = 140$, слика. Дакле, $a = 35\,\mathrm{cm}$, па је $O = 4 \cdot 35 = 140\,\mathrm{cm}$, а $P = a \cdot a = 1225\,\mathrm{cm}^2$.

255. В. слике.



Слика уз задатак 254



Слика уз задатак 255

256. Осам оловки и 20 свезака кошта 44 динара. Значи да $20 - 2 = 18$ свезака кошта $44 - 8 = 36$ динара, па једна свеска кошта $36 : 18 = 2$ динара. Дакле, 2 оловке коштају $11 - 10 = 1$ динар, па оловка кошта пола динара.

257. Како је $1994 = 1 \cdot 1994 = 2 \cdot 997$, то је

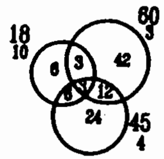
$$\frac{999}{1994} = \frac{a}{1} + \frac{b}{1994} = \frac{c}{2} + \frac{d}{997}.$$

Прва релација је немогућа јер ако је $a = 1$, онда је $\frac{a}{1} + \frac{b}{1994} > 1$, а $\frac{999}{1994} < 1$. Слично је $c \leqslant 1$, па је и $d = 1$. Дакле $\frac{1}{2} + \frac{1}{997} = \frac{997+2}{1994} = \frac{999}{1994}$.

258.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Слика уз задатак 258



Слика уз задатак 259

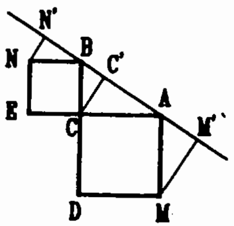
259. Избрисано је укупно $18+42+24+12=96$ бројева (слика). Остало је $180-96=84$ броја.

260. Квадрата 1×1 има 10, а 2×2 — 3. Значи, укупно 13 квадрата. Правоугаоника је: 1×2 — 12, 1×3 — 6, 1×4 — 2, 2×3 — 2. Дакле, укупно 22 правоугаоника.

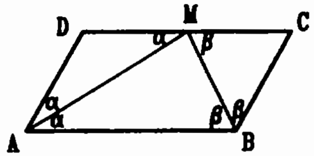
261. Ако $\frac{4}{9}$ крушака и $\frac{3}{5}$ јабука износи 49 килограма, онда $\frac{8}{9}$ крушака и $\frac{6}{5}$ јабука износи 98 kg, колико и све крушке и све јабуке. Дакле, $\frac{1}{9}$ крушака једнако је $\frac{1}{5}$ јабука, па крушака има $9x$, а јабука $5x$. Значи, $14x=98$, или $x=7$. Крушака има 63 kg, а јабука 35 kg.

262. Како је $\frac{665}{1995}<\frac{665}{1993}<\frac{5}{p}<\frac{997}{1994}$, то је $\frac{1}{3}<\frac{5}{p}<\frac{1}{2}$. Тада је $2<\frac{p}{5}<3$, или $10<p<15$. Дакле, $p\in\{11,13\}$.

263. Нека је CC' висина која одговара хипотенузи, слика. Тада је $\Delta AMM'\cong\Delta ACC'$ (зашто?) и $\Delta BNN'\cong\Delta BCC'$, па је $MM'=AC'$ и $NN'=BC'$. Значи, $MM'+NN'=AC'+BC'=AB$.



Слика уз задатак 263

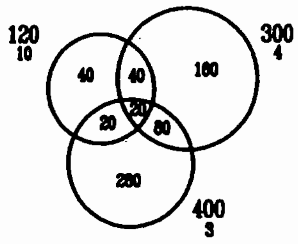


Слика уз задатак 264

264. Ако је $\measuredangle BAM=\alpha$, онда је и $\measuredangle AMD=\alpha$, јер има с њим паралелне краке (слика). Слично, ако је $\measuredangle ABM=\beta$, онда је и $\measuredangle BMC=\beta$. Како је $AD=\frac{1}{2}CD$, то је $AD=DM=MC=BC$, па су троуглови ΔADM и

ΔBCM једнакокраки. Значи, $2\alpha+2\beta=180^\circ$, па је $\alpha+\beta=90^\circ$. Тражени угао $\measuredangle AMB=180^\circ-(\alpha+\beta)=90^\circ$.

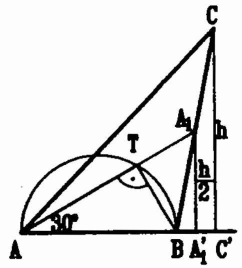
265. Избрисано је $400+160+40+40=640$ бројева, слика. Остало је $1200-640=560$ бројева.



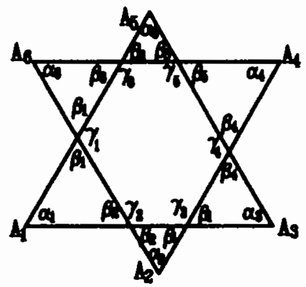
Слика уз задатак 265

266. У ΔABT је $AB=12$, $\measuredangle TAB=30^\circ$ и $\measuredangle ATB=90^\circ$, па је $AT=\frac{12\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$, слика. Како је T тежиште, то је $TA_1=\frac{1}{2}AT=3\sqrt{3}$, па је $AA_1=AT+TA_1=9\sqrt{3}\,\text{cm}$. Тада је $A_1A_1'=\frac{1}{2}AA_1=\frac{9\sqrt{3}}{2}=\frac{CC'}{2}$,

$P_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot CC'}{2}=\frac{12\cdot 9\sqrt{3}}{2}=54\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.



Слика уз задатак 266



Слика уз задатак 267

267. Из $\Delta A_1A_3A_5$ очигледно је $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5=180^\circ$. Слично је из $\Delta A_2A_4A_6$, $\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6=180^\circ$, па је збир конвексних углова $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_6=360^\circ$.

268. Нека је дужина воза x. Тада је брзина воза $v=\frac{171+x}{27}=\frac{x-9}{9}$. Одатле је $57+\frac{x}{3}=x-9$, или $\frac{2}{3}x=66$, па је $x=99\,\text{m}$. Брзина воза је $\frac{x-9}{9}=\frac{99-9}{9}=10\,\text{m/s}$.

269. Нека је $a+b\sqrt{2}=0$. Ако је $b\neq 0$, онда је $\sqrt{2}=-\dfrac{a}{b}$. Како је $\sqrt{2}$ ирационалан и $-\dfrac{a}{b}$, као количник два рационална броја, рационалан, то је противуречност. Дакле, $b=0$, а тада је $a+0\cdot\sqrt{2}=0$, па је и $a=0$.

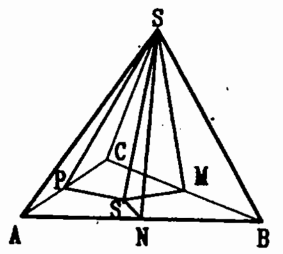
270. а) $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6=5\cdot 6^3=1080$. б) $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3=300$. в) $5\cdot 6\cdot 6\cdot 2=360$.

271. Из $2x^2-y^2=y^2+1994$ следи $x^2-y^2=(x-y)(x+y)=997$. Како је 997 прост број, то бројеви $x-y$ и $x+y$ припадају скупу $\{1,-1,997,-997\}$ (с тим да им је производ једнак 997). Сва решења једначине су:

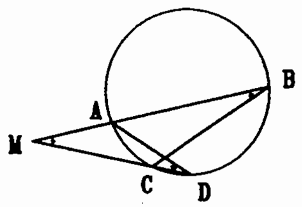
$$(x,y)\in\{(499,498);(499,-498);(-499,498);(-499,-498)\}.$$

272. Видети решење задатка 268.

273. Како су троуглови $SS'M$, $SS'N$ и $SS'P$ подударни (SS' заједничко, $\measuredangle S'=90°$ и $\measuredangle S'SM=\measuredangle S'SN=\measuredangle S'SP=30°$), то је $S'M=S'N=S'P$, па је тачка S' центар круга уписаног у троугао ABC, слика. Тада је $S'M=S'N=S'P=r=\dfrac{6+8-10}{2}=2\,\mathrm{cm}$, а бочне висине су $MS=NS=PS=4\,\mathrm{cm}$. $P=72\,\mathrm{cm}^2$, $V=\dfrac{B\cdot H}{3}=\dfrac{6\cdot 8}{2}\cdot\dfrac{SS'}{3}=24\cdot\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=16\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.



Слика уз задатак 273



Слика уз задатак 274

274. Троуглови MAD и MBC су слични ($\measuredangle M$ је заједнички, а $\measuredangle MBC=\measuredangle MDA$, као периферијски над тетивом AC), слика. Из сличности је $MA:MD=MC:MB$. Дакле, $2:MD=3:6$, па је $MD=4\,\mathrm{cm}$, одакле је $CD=MD-MC=4-3=1\,\mathrm{cm}$.

275. а) $6{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}7=6{\cdot}7^4=14\,406$. б) $6{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3=2160$. в) $6{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}7{\cdot}5=10\,290$.

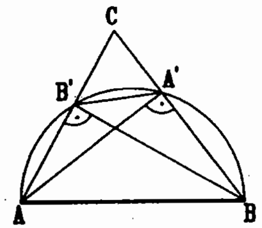
276. Нека је планирана цена робе x. Тада је са $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{8+3}{12}=\dfrac{11}{12}$ дате робе остварен ефекат

$$\frac{2}{3}\cdot 0{,}8x+\frac{1}{4}\cdot 1{,}5x=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}x+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}x=\frac{109}{120}x.$$

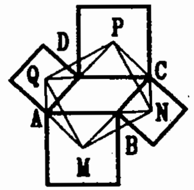
Према томе, преосталу $\dfrac{1}{12}$ робе треба продати са ефектом $\dfrac{11}{120}x$, па је њена цена $\dfrac{11}{120}x:\dfrac{1}{12}=\dfrac{11x}{10}$, тј. цену преосталог дела робе треба повећати за 10%.

277. Дати број је дељив са 3 јер му је збир цифара једнак $1994(2+1)=3\cdot 1994$, али није дељив са 9, јер му збир цифара није дељив са 9. Због тога дати број није квадрат природног броја.

278. Анализа: Тачке A, B, A' и B' припадају кружници (кружној линији) над дужи AB као пречником, јер су троуглови $AA'B$ и $BB'A$ правоугли.
Конструкција: Конструишемо дуж AB и над њом као пречником конструишемо круг. На кругу конструишемо тачку A' тако да је $BA'=3\,\mathrm{cm}$, а затим и тачку B', тако да је $A'B'=2\,\mathrm{cm}$. Пресек правих AB' и BA' одређује теме C, слика.
Дискусија: Задатак има два решења — могуће је да тачка B' буде с друге стране праве AB у односу на тачку A' (нацртати одговарајућу слику — тада је троугао ABC тупоугли).



Слика уз задатак 278



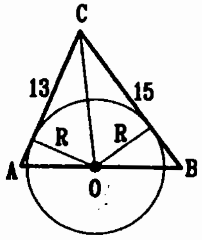
Слика уз задатак 279

279. Нека су M, N, P, Q редом средишта конструисаних квадрата, слика. Докажимо да су троуглови AMQ, BMN, CNP и DPQ подударни: $AQ=BN=CN=DQ$ (као половине дијагонала подударних квадрата) и слично $AM=BM=CP=DP$; $\measuredangle QAM=\measuredangle MBN=\measuredangle NCP=\measuredangle PDQ=90°+\alpha$, где је α оштар угао паралелограма. Из подударности је $QM=MN=NP=PQ$ и $\measuredangle AMQ=\measuredangle NMB$. Како је $\measuredangle AMB=90°$, то је $\measuredangle QMN=\measuredangle QMB+\measuredangle BMN=\measuredangle QMB+\measuredangle QMA=\measuredangle AMB=90°$.

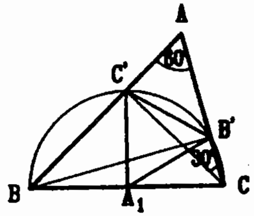
280. Да бисмо имали сигурно две куглице исте боје потребно је да извучемо $2\cdot 3+1=7$ куглица. Да бисмо имали сигурно две куглице различитих боја потребно је да извучемо најмање $1995+1994+1=3990$ куглица.

281. Површина датог троугла је $84\,\mathrm{cm}^2$ (доказати!). Нека је O центар датог круга, слика. Како је $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle AOC}+P_{\triangle BOC}$, то је $84=\dfrac{15R}{2}+$

$\frac{13R}{2} = 14R$. Дакле, $R = 6\,\mathrm{cm}$, а површина полукруга је $18\pi\,\mathrm{cm}^2$. $k = \frac{84-18\pi}{84} = 32{,}68\%$.



Слика уз задатак 281



Слика уз задатак 284

282. Како је $\frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3} + \frac{n^3}{6} = \frac{1}{6}n(n^2+3n-4) = \frac{1}{6}n(n^2+3n+2-6) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) - n$, то је тражени број увек цео јер је разлика два цела броја: првог који је цео због тога што је производ три узастопна броја увек дељив са 6 и другог n.

283. Нека је маса прве легуре x, а друге $9-x$. Тада је сребра у првој $\frac{2x}{5}$, а у другој $\frac{5(9-x)}{8}$. Значи да је $\frac{2x}{5} + \frac{5(9-x)}{8} = 4{,}5$. Решавањем једначине се добија да је маса прве легуре $x = 5\,\mathrm{kg}$, а друге $4\,\mathrm{kg}$.

284. Како су троуглови BCB' и BCC' правоугли са заједничком хипотенузом BC, око њих се може описати заједнички круг чији је центар средиште хипотенузе BC — тачка A_1, слика. За дати круг је $\measuredangle B'CC' = 30^\circ$ периферијски (над тетивом $B'C'$), па је одговарајући централни угао $\measuredangle B'A_1C' = 2\cdot 30^\circ = 60^\circ$. Како је $A_1B' = A_1C'$ (полупречници круга), то је $\triangle A_1B'C'$ једнакокрак и једнакостранични.

285. Нека су сви конвексни многоуглови чија су сва темена бела $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Сваком од њих одговара по један многоугао $M_1', M_2', \ldots, M_k'$ такав да му је једно теме дата црна тачка, а преостала темена идентична са теменима многоуглова $M_1, M_2, \ldots, M_k$ (редом). Међутим, $M_1', M_2', \ldots, M_k'$ нису и сви многоуглови чије је једно теме црно, јер свака „бела" дуж са црном тачком гради троугао. Зато је многоуглова чије је једно теме црна тачка више него многоуглова који имају сва темена исте боје.

286. а) $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2+2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2+2b^2-2ab)(a^2+2b^2+2ab)$.

б) Користећи претходни део задатака, добијамо $2^{1994} + 5^{1996} = (5^{499})^4 + 4(2^{498})^4 = (5^{998} + 2^{997} - 2^{499}\cdot 5^{499})(5^{998} + 2^{997} + 2^{499}\cdot 5^{498})$.

287. Нека су тражени бројеви x и y. Тада је $3\cdot xy = \overline{xy} = 1000x + y$, тј. $3y = 1000 + \frac{y}{x}$, односно $\frac{y}{x} = 3y - 1000$. Како су x и y троцифрени бројеви, то је $0 < \frac{y}{x} < 10$, дакле $0 < 3y - 1000 < 10$, одакле је $333 < y < 337$. Значи да је $y \in \{334, 335, 336\}$, па је $\frac{y}{x} \in \{2,5,8\}$, а $x \in \{334/2, 335/5, 336/8\} = \{167, 67, 42\}$. Како је x троцифрен број, то је $x = 167$. Тражена једнакост је $3\cdot 167 \cdot 334 = 167334$.

288. Нека су тражени бројеви $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$. Нека су дате разлике $b-a$, $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$ и $d-c$. Све оне узимају вредности из скупа $\{0,2,3,5\}$. Очигледно је да су неке једнаке и да је $d-a=5$, као разлика највећег и најмањег броја. Разликујемо три случаја:

1° $a = b < c < d$. Тада је $b-a=0$, $d-a=d-b=5$ и $3(a+b)=(c+d)$, односно $3(a+a) = c+a+5$. Одатле је $4a = c-a+5$, па $c-a+5$ мора бити дељиво са 4, што значи да је $c-a=3$, одакле је $a=2=b$, $c=5$, $d=7$.

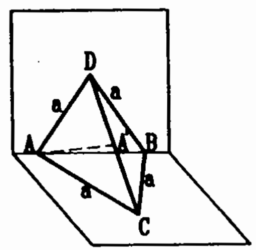
2° $a < b = c < d$. Тада је $b-c=0$, $d-a=5$ и $c-a=b-a$. Како је $3(a+b) = c+d$, то је $3(a+b) = b+a+5$, одакле је $2(a+b)=5$, што је немогуће.

3° $a < b < c = d$. Тада је $d-c=0$, $d-a=c-a=5$ и $3(a+b) = c+d = 2(a+5)$. Дакле, $4b = b-a+10$, па $b-a+10$ мора бити дељиво са 4, што значи да је $b-a=2$, а $b=3$. Коначно је $a=1$, $b=3$, $c=d=6$.

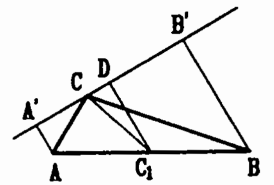
289. $V = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$.

$CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, $(AA')^2 = a^2 - (a\sqrt{6}/4)^2$, $AA' = a\sqrt{10}/4$.

$P = 2P_{\triangle ABC} + 2P_{\triangle ACD} = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2\cdot\frac{1}{2}\frac{a\sqrt{6}}{2}\frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(2+\sqrt{5})$.



Слика уз задатак 289



Слика уз задатак 290

290. Претпоставимо да је задатак решен, тј. да је p тражена права, слика. Како је $ABB'A'$ правоугли трапез, то је збир основица $AA' + BB'$ највећи када је и средња линија C_1D највећа. Из правоуглог $\triangle CDC_1$, то је очигледно у ситуацији када је $CC_1 = C_1D$, тј. када је DC_1 тежишна дуж $\triangle ABC$. Према томе највећи могући збир $AA' + BB'$ добијамо када је права p нормална на тежишну дуж CC_1.

291. Нека је $P(x) = x^{19} - 23x^{18} + 23x^{17} - 23x^{16} + \dots + 23x^3 - 23x^2 + 23x + 5$. Очигледно је

$$\begin{aligned} P(x) &= x^{19} - 22x^{18} - x^{18} + 22x^{17} + x^{17} - 22x^{16} - x^{16} \\ &\quad + \dots + 22x^3 + x^3 - 22x^2 - x^2 + 22x + x + 5 \\ &= x^{18}(x-22) - x^{17}(x-22) + x^{16}(x-22) \\ &\quad - \dots + x^2(x-22) - x(x-22) + x + 5. \end{aligned}$$

Према томе, $P(22) = 22 + 5 = 27$.

292. Нека је s растојање између Београда и Подгорице, v_a брзина авиона и v_v брзина ветра. Тада је време утрошено за лет авиона по мирном времену $t_1 = \dfrac{2s}{v_a}$. Време утрошено за лет авиона по ветру је $t_2 = \dfrac{s}{v_a - v_v} + \dfrac{s}{v_a + v_v}$. Сада добијамо

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{s}{v_a - v_v} + \frac{s}{v_a + v_v} = \frac{sv_a + sv_v + sv_a - sv_v}{v_a^2 - v_v^2} \\ &= \frac{2sv_a}{v_a^2 - v_v^2} > \frac{2sv_a}{v_a^2} = \frac{2s}{v_a} = t_1. \end{aligned}$$

Према томе, авион прелази пут брже по мирном времену.

293. Из услова задатка је $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 1$ и $a_3 = |a_1 - a_2|$, $a_4 = |a_2 - a_3|$, $a_5 = |a_3 - a_4|$, $a_6 = |a_4 - a_5|$, $a_1 = |a_6 - a_5|$, $a_2 = |a_1 - a_6|$. Значи да је

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + |a_3 - a_4| + |a_4 - a_5| + |a_5 - a_6| + |a_6 - a_1| = 1.$$

Како су сви дати бројеви ненегативни (јер су једнаки апсолутним вредностима неких бројева), то међу њима постоји бар један од кога нема већих међу датим бројевима. Нека је то, рецимо, број a_1. Сада из једнакости $a_1 = |a_5 - a_6|$ добијамо да је $\{a_5, a_6\} = \{a_1, 0\}$. Ако је $a_6 = a_1$ и $a_5 = 0$, онда добијамо $a_2 = 0$, $a_3 = a_1$, $a_4 = a_1$. Ако је $a_6 = 0$ и $a_5 = a_1$, онда добијамо $a_2 = a_1$, $a_3 = 0$, $a_4 = a_1$. У сваком случају, важи $4a_1 = 1$, тј. $a_1 = \dfrac{1}{4}$. Према томе, тражени бројеви (у смеру кретања казаљке на сату) су $\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, 0, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}, 0$ или било која циклична пермутација.

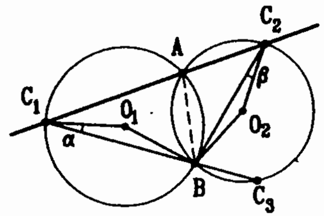
294. Користећи однос периферијског и одговарајућег централног угла, добијамо да је (види слику) $\measuredangle C_1O_1B = 2 \cdot \measuredangle C_1AB$,

$$\measuredangle C_2OB = 2 \cdot \measuredangle C_2C_3B = 2(180^\circ - \measuredangle BAC_1) = 2 \cdot \measuredangle C_1AB.$$

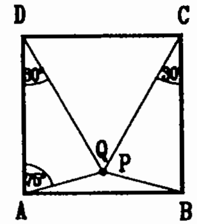
Према томе, $\measuredangle C_1O_1B = \measuredangle C_2O_2B$, па следи да је

$$\measuredangle BC_1O_1 = \frac{180^\circ - \measuredangle C_1O_1B}{2} = \frac{180^\circ - \measuredangle C_2O_2B}{2} = \measuredangle BC_2O_2,$$

што је и требало доказати.



Слика уз задатак 294



Слика уз задатак 295

295. Нека је Q тачка у унутрашњости квадрата $ABCD$, таква да је CDQ једнакостраничан троугао, слика. Тада је $\measuredangle QDA = 30^\circ$. Како је $CD = CQ = DQ = DA$, то следи да је AQD једнакокраки троугао. Зато је $\measuredangle DAQ = \measuredangle DQA = 75^\circ$. Значи да је $\measuredangle QAB = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$ и слично $\measuredangle QBA = 15^\circ$. Како је по услову задатка и $\measuredangle PAB = \measuredangle PBA = 15^\circ$, то следи да је $P = Q$. Према томе, троугао CDP је једнакостраничан.

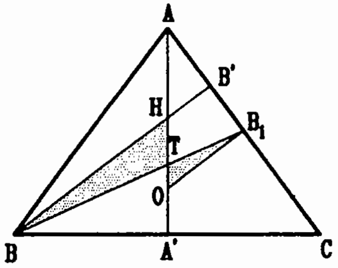
296. Поделимо дати квадрат на 25 квадрата чија је страница $\dfrac{1}{5} = 0{,}2$. Како је 51 тачка размештена у 25 квадрата, то на основу Дирихлеовог принципа бар један од тих 25 квадрата садржи бар 3 од датих тачака. Полупречник круга описаног око тог квадрата је

$$r = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{1}{7}.$$

Тиме је доказ завршен.

297. Нека су A' и B' редом подножја висина из темена A и B, B_1 средиште странице AC и O центар описаног круга, слика.
Како је $A'B = A'C = 12$, то је $AA' = \sqrt{AB^2 - BA'^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 14$.
Површина троугла ABC је $\dfrac{BC \cdot AA'}{2} = \dfrac{AC \cdot BB'}{2}$, па зато следи $BB' = \dfrac{BC \cdot AA'}{AC} = \dfrac{24 \cdot 16}{20} = \dfrac{96}{5}$. Даље добијамо

$$AB' = \sqrt{AB^2 - BB'^2} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{96}{5}\right)^2} = \frac{28}{5} \quad \text{и} \quad CB' = \frac{52}{5}.$$



Слика уз задатак 297

Како је $\triangle AB'H \sim \triangle AA'B$, то је $AH : AB' = AB : AA'$. Одавде је $AH = \dfrac{AB \cdot AB'}{AA'} = \dfrac{20 \cdot 28 : 5}{16} = 7$, па следи да је $A'H = 13$. Слично из релације $\triangle AOB_1 \sim \triangle ACA'$, добијамо да је $AB_1 : AO = AA' : AC$ и $AO = \dfrac{AB_1 \cdot AC}{AA'} = \dfrac{10 \cdot 20}{16} = \dfrac{25}{2}$. Даље добијамо $OH = AO - AH = \dfrac{25}{2} - 7 = \dfrac{11}{2}$. Из сличности $\triangle BHT \sim \triangle B_1OT$ добијамо да је $HT : TO = BT : TB_1 = 2 : 1$. Према томе, $HT = 2 \cdot TO$, тј.

$$HT = 2 \cdot \frac{OH}{3} = 2 \cdot \frac{11}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{3}.$$

298. Нека је x број коцкица ивице 1, y број коцкица ивице 2, z број коцкица ивице 3, u број коцкица ивице 4 и v број коцкица ивице 5. Тада је

(1) $$x + y + z + u + v = 1994,$$

(2) $$x + 8y + 27z + 64u + 125v = 13^3 = 2197.$$

Одузимањем једначине (1) од једначине (2) добијамо $7y+26z+63u+124v = 203$. Разликоваћемо следеће случајеве:

(1) Случај $v = 0$. Тада је $7y + 26z + 63u = 203$, тј. $z = \dfrac{7}{26}(29 - y - 9u)$. Како је $z \in \mathbf{N}_0$, то је $29 - y - 9u \in \{0, 26\}$, односно $29 - y - 9u = 0$ или $29 - y - 9u = 26$. Према томе, $y + 9u = 29$ или $y + 9u = 3$, одакле добијамо

$$(y, u) \in \{(2,3); (11,2); (20,1); (29,0); (3,0)\}.$$

Одговарајућа решења система једначина (1)–(2) дата су у следећој таблици:

x	y	z	u	v
1965	29	0	0	0
1984	3	7	0	0
1973	20	0	1	0
1981	11	0	2	0
1989	2	0	3	0

(2) Нека је $v = 1$. Тада је $7y + 26z + 63u = 79$. Очигледно је $u = 0$ или $u = 1$. Ако је $u = 0$, онда је $7y + 26z = 79$, а ова једначина нема решења у скупу $\mathbf{N}_0$. Ако је $u = 1$, онда је $7y + 26z = 16$, па ни ова једначина нема решења у скупу $\mathbf{N}_0$.

Ако би w био број коцкица ивице 6, онда бисмо добили једначине

(3) $$x + y + z + u + v + w = 1994,$$

(4) $$x + 8y + 27z + 64u + 125v + 216w = 2197.$$

Одузимањем једначине (3) од (4) добија се: $7y + 26z + 63u + 124v + 215w = 203$. Из последње једначине следи да је $w = 0$, па се овај случај своди на решавање система (1)–(2). Аналогно се разматрају случајеви са коцкицама ивице веће од 6. Према томе, једина решења проблема дата су у таблици.

299. Прво приметимо да је $n^3 - 3n^2 - 18n = n(n+3)(n-6)$. Према томе, треба доказати да је производ $n(n+3)(n-6)$ дељив са 13 200. Како је

$$n = \underbrace{111\ldots111}_{1994}\underbrace{222\ldots222}_{1994},$$

то следи да је: број n дељив са 2, дељив са 3 (јер је збир цифара $1994(1+2)$ дељив са 3) и дељив са 11 (јер су једнаки збирови цифара које стоје на парним и непарним местима). Осим тога, број $n + 3 = 111\ldots111222\ldots225$ дељив је са 25, а број $n - 6 = 111\ldots111222\ldots216$ дељив је са 8. Према томе, број $n(n+3)(n-6)$ дељив је са $2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 25 \cdot 8 = 13\,200$.

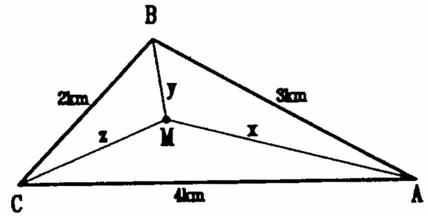
300. Нека је M тачка у којој треба саградити школу и нека су x, y, z, редом, растојања тачке M од тачака A, B, C (слика). Тада је укупан број километара које од куће до школе прелазе ученици једнак

$$S = 300x + 200y + 100z = 200(x + y) + 100(x + z).$$

На основу неједнакости троугла добијамо да је $x + y \geqslant AB = 3$ и $x + z \geqslant AC = 4$, па даље следи

$$S \geqslant 200 \cdot 3 + 100 \cdot 4 = 600 + 400 = 1000\,\mathrm{km}.$$

Најмања вредност S је 1000 km и достиже се ако је $x + y = 3$ и $x + z = 4$, а то важи једино у случају када је $x = 0$. Према томе, школу треба саградити у месту A.



Слика уз задатак 300

1995. година

301. Таквих бројева има 16.

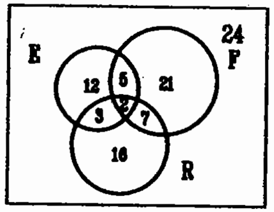
302. $9876543210 - 1023456789 = 8853086421$.

303. Трећина растојања је $1215 : 3 = 405$. Ако је биоскоп између школе и поште, растојање је 405 метара. Ако је школа између поште и биоскопа, растојање је 2025 метара.

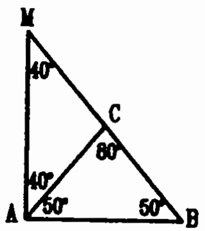
304. С обзиром да је пре 4 године укупан збир година био 58 и како је $58 + 4 \cdot 4 = 74$, то значи да би сада породица требало да има (заједно) 74 године, што опет значи да се син родио пре 3 године. Дакле брат има 3 године, сестра 5 година, а отац и мајка заједно 65, тј. отац 34, а мајка 31 годину.

305. Обим квадрата једнак је $2(a - 10 + b + 10) = 2(a + b) = 2\,\mathrm{m}$, па је страница квадрата $50\,\mathrm{cm}$, а странице правоугаоника $60\,\mathrm{cm}$ и $40\,\mathrm{cm}$.

306. Два ученика уче сва три језика, а 24 ученика не учи ниједан језик (слика).



Слика уз задатак 306



Слика уз задатак 313

307. Тражени углови су $\alpha = 18°$ и $\beta = 72°$.

308. Добијени број мора бити дељив са 8 и 9, па збир цифара мора бити дељив са 9, а троцифрени завршетак дељив са 8. Једини такав број је 119952.

309. Очигледно је $\dfrac{19}{1995} = \dfrac{380}{39900} < \dfrac{380}{39501} = \dfrac{20}{2079}$.

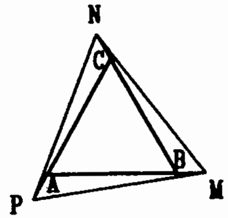
310. На слици има 48 дужи и 36 правоугаоника.

311. Постоје два решења: 199512 и 199584.

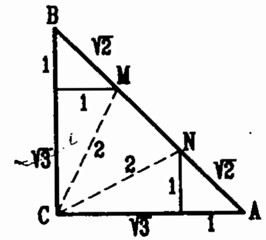
312. Једна цев за 1 сат напуни 1/6, друга 1/10, а трећа испразни 1/5 базена. Дакле, за један сат се напуни 1/15 базена, а цео базен за 15 сати.

313. Како је $\measuredangle ACM = 100°$ и како је $AC = BC = CM$, то је и $\triangle ACM$ једнакокрак, па је $\measuredangle CAM = 40°$, а $\measuredangle BAM = 90°$ (слика). Како је у $\triangle ABM$ наспрам странице AB угао од $40°$, а наспрам странице AM угао од $50°$, то је $AM > AB$.

314. Троуглови BNM, CNP и APM су подударни (слика), јер имају $AM = BN = CP = a + d$, $\measuredangle B = \measuredangle C = \measuredangle A$ и $BM = CN = AP = d$. Из подударности је и $MN = NP = PM$.



Слика уз задатак 314



Слика уз задатак 316

315. Нека је A суд од 7, а B суд од 3 литра. Решење дајемо корак по корак: 1. A–7, B–0; 2. A–4, B–3; 3. A–4, B–0; 4. A–1, B–3; 5. A–1, B–0; 6. A–0, B–1; 7. A–7, B–1; 8. A–5, B–3.

316. Катета троугла је $\sqrt{3} + 1$ (слика). Површина троугла је $P = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}\,\mathrm{cm}^2$, а $MN = (\sqrt{3}+1)\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = (\sqrt{3}-1)\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

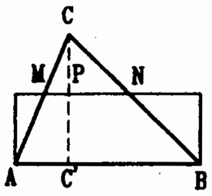
317. $\sqrt{(3x-2)(x-2) - 2x(x-2)} - \sqrt{2} = \sqrt{(x-2)(x-2)} - \sqrt{2} = |x-2| - \sqrt{2} = |3 - \sqrt{2} - 2| - \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} = -1$.

318. Ако је цена робе била x динара, онда је у првој продавници она била $1{,}08x$, а у другој $0{,}92x$, па је разлика у цени била $0{,}16x$, што износи 1,2 динара. Дакле, $x = 1{,}2 : 0{,}16 = 7{,}5$ динара.

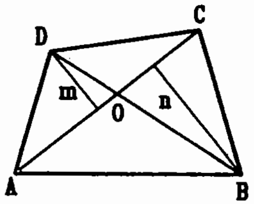
319. Ако је $a < b$, онда је и $a + a < a + b < b + b$, тј. $2a < a + b < 2b$, одакле је $a < \dfrac{a+b}{2} < b$.

320. Нека је $MN \parallel AB$ средња линија троугла ABC и нека висина CC' сече средњу линију у тачки P (слика). Тада су због подударности троуглова MPC и AMA', односно CPN и BNB', тражени делови трапез $ABNM$ и троуглови CMP и CNP.

321. Решење једначине $x + \dfrac{1}{3} = 3x$ је $x = \dfrac{1}{6} = \dfrac{k}{6k}$. Значи, $6k - k = 5k = 1995$, па је $k = 399$. Дакле тражени разломак је $\dfrac{399}{2394}$.



Слика уз задатак 320



Слика уз задатак 324

322. Очигледно је $1 + |x-1| < 1995$, па је $|x-1| < 1994$, тј. $-1994 < x - 1 < 1994$. Коначно, $-1993 < x < 1995$.

323. Тона сена садржи 200 kg воде и 800 kg суве материје. Тих 800 kg су само 20% у свежој трави. Дакле потребно је $5 \cdot 800 = 4000\,\mathrm{kg} = 4\,\mathrm{t}$ свеже траве.

324. Нека су m и n висине троуглова ACD и ABC (слика). Тада је $2P_{ABO} = AO \cdot n$, $2P_{BCO} = CO \cdot n$ $2P_{COD} = CO \cdot m$ и $2P_{DOA} = AO \cdot m$. Како је $2P_{ABO} : 2P_{BCO} = AO : CO = 2P_{AOD} : 2P_{DOC}$, то се решавањем ове пропорције добија тражена једнакост.

325. Површина пресека је $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$, а запремине добијених делова $V_1 = \dfrac{a^3}{6}$ и $V_2 = \dfrac{5a^3}{6}$.

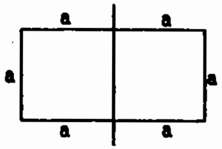
326. Са 1995 почиње 1000, а завршава се 900 седмоцифрених природних бројева.

327. Ако је мањи број x, онда је већи $10x$, па је $x + 10x = 11x = 825$. Значи $x = 75$ и $10x = 750$.

328. Нека је цена збирке x динара. Тада је први ученик имао $x - 66$, а други $x - 82$ динара. Дакле, $(x-66) + (x-82) + 24 = x$. Значи збирка кошта 124 динара.

329. Ако је страница квадрата a, онда су странице правоугаоника a и $2a$, па је обим правоугаоника $2(a+2a) = 2 \cdot 3a = 6a = 96$. Дакле, $a = 16$, па је обим квадрата 64 cm и за 32 cm је мањи од обима правоугаоника (слика).

330. Један од могућих магичних квадрата дат је на слици.



Слика уз задатак 329

13	6	11
8	10	12
9	14	7

Слика уз задатак 330

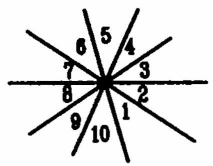
331. Ако је Јагода другога дана појела четвртину остатка, то значи да је преосталих 9 бомбона 3/4 остатка. Дакле, првог дана је остало $(9:3)\cdot 4 = 12$ бомбона. Како је то опет 3/4 укупног броја бомбона, то значи да је било укупно $(12:3)\cdot 4 = 16$ бомбона.

332. Тражени разломак је $\dfrac{43x}{90x}$, па је $43x + 90x = 133x = 1995$, односно $x = 15$. Тражени разломак је $\dfrac{645}{1350}$.

333. Разломци $\dfrac{3*5*}{36}$ и $\dfrac{4*7*}{45}$ су природни бројеви ако је $3*5*$ дељив са 36 (дакле са 4 и 9) и $4*7*$ дељив са 45 (дакле са 5 и 9). У првом случају је то могуће ако је последња цифра 2 или 6 (због дељивости са 4), па су због дељивости са 9 могући бројеви $\dfrac{3435}{36} = 96$ и $\dfrac{3852}{36} = 107$. У другом случају последња цифра је 0 или 5 (због дељивости са 5), па су због дељивости са 9 могући случајеви $\dfrac{4275}{45} = 95$ и $\dfrac{4770}{45} = 106$. Према томе је

$$\frac{4275}{45} = 95 < \frac{3456}{36} = 96 < \frac{4770}{45} = 106 < \frac{3862}{36} = 107.$$

334. Како је $\measuredangle 7 = \measuredangle 2$ и $\measuredangle 9 = \measuredangle 4$ (као унакрсни углови), тада је $\measuredangle 1 + \measuredangle 3 + \measuredangle 5 + \measuredangle 7 + \measuredangle 9 = \measuredangle 1 + \measuredangle 3 + \measuredangle 5 + \measuredangle 2 + \measuredangle 4 = \measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 + \measuredangle 4 + \measuredangle 5 = 180°$ (слика).



Слика уз задатак 334

335. Нека је централни број једнак x (прва слика). Тада је карактеристични збир магичног квадрата једнак $20 + x + 14 = 34 + x$ (дијагонала). Израчунавањем преосталих бројева и upoређивањем са карактеристичним збиром добија се једначина $x - 1 + x + x + 1 = 34 + x$, тј. $2x = 34$, па је $x = 17$ (друга слика).

$x-1$	15	20
21	x	13
14	19	$x+1$

16	15	20
21	17	13
14	19	18

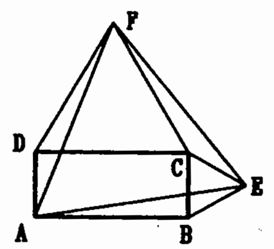
Слика уз задатак 335

336. Ако једна и по мачка за три и по дана улови четири и по миша, онда пола мачке за исто време улови $4{,}5 : 3 = 1{,}5$ миша. То значи да пола мачке са $2 \cdot 3{,}5 = 7$ дана улови $2 \cdot 1{,}5 = 3$ миша, а за 3 седмице (21 дан) $3 \cdot 3 = 9$ мишева. Према томе, пет и по мачки за 3 седмице улове $11 \cdot 9 = 99$ мишева.

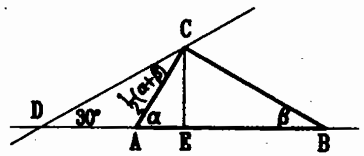
337. Двоцифрени прости бројеви се не могу завршавати цифрама $0, 2, 4, 6, 8$ (јер су тада дељиви са 2 и сложени) ни цифром 5 (јер су дељиви са 5 и опет сложени). Дакле, то могу бити они који се завршавају цифрама $1, 3, 7, 9$, а то су 11, 13, 17, 19, 31, 33, 37, 39, 71, 73, 77, 79, 91, 93, 97 и 99. Условима задатка одговарају само прости бројеви: 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79 и 97.

338. Ако се лоптица после одскока нађе на висини x, онда је висина са које је кренула у слободан пад $\frac{4}{3}x$. Према томе, висина са које је пуштена лопта је $432 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = 1024\,\mathrm{mm}$. Први одскок је до висине $768\,\mathrm{mm}$, други до висине $576\,\mathrm{mm}$, трећи до висине $432\,\mathrm{mm}$, четврти до висине $324\,\mathrm{mm}$ и пети до висине $243\,\mathrm{mm}$.

339. Троуглови ABE, CEF и ADF су подударни ($AB = CD = CF = DF$, $\measuredangle ABE = \measuredangle ECF = \measuredangle ADF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ и $BC = BE = CE = DA$). Из подударности је и $AE = EF = FA$, што је и требало доказати (слика).



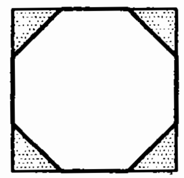
Слика уз задатак 339



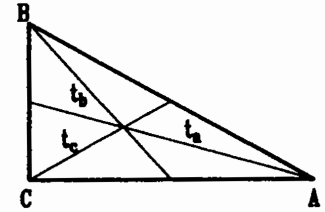
Слика уз задатак 340

340. Како је $CD = 2\,CE$ и како је троугао CDE правоугли, то је $\measuredangle CDE = 30^\circ$. Угао $\measuredangle BAC = \alpha$, као спољашњи угао троугла DAC, једнак је збиру углова $\measuredangle ADC = 30^\circ$ и $\measuredangle DCA = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ (слика). Према томе добијамо $\alpha = 30^\circ + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, одакле је $\frac{1}{2}(\alpha - \beta) = 30^\circ$, а $\alpha - \beta = 60^\circ$.

341. Допунимо дати осмоугао до квадрата (слика). Површина осмоугла је разлика површине квадрата и збира површина четири подударна једнакокрако-правоугла троугла. Како су катете тих троуглова једнаке $5\sqrt{2}$, то је $P = (10 + 10\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(5\sqrt{2})^2 = 200(1 + \sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$.



Слика уз задатак 341



Слика уз задатак 342

342. Како је $t_a^2 = \frac{a^2}{4} + b^2$ и $t_b^2 = \frac{b^2}{4} + a^2$ (слика), то је

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2 = \frac{5}{4} \cdot 4t_c^2 = 5t_c^2.$$

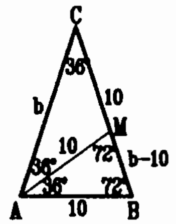
343. Како је $0{,}064^{665} = \left(\frac{64}{1000}\right)^{665} = \left(\frac{8}{125}\right)^{665} = \left(\frac{2}{5}\right)^{3\cdot 665} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1995}$ и како је $0{,}16^{997} = \left(\frac{16}{100}\right)^{997} = \left(\frac{4}{25}\right)^{997} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot 997} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1994}$, то је $0{,}064^{665} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1995} < \left(\frac{2}{5}\right)^{1994} = 0{,}16^{997}$, јер је $\frac{2}{5} < 1$.

344. С обзиром да је дато 1995 бројева, у једној групи ће бити непаран (на пример $2k + 1$), а у другој паран број датих бројева ($1995 - 2k - 1 = 1994 - 2k$). Како су сви дати бројеви 1 или -1, то у пару збир може бити 2, 0 или -2, па ће у групи са парним бројем сабирака збир бити увек паран цео број. Исто тако у групи са непарним бројем сабирака, $2k$ сабирака ће дати паран број, а један преостали број ће коначан збир у тој групи учинити непарним. Како паран и непаран цео број не могу никада бити једнаки, то је тражена подела немогућа.

345. Претпоставимо да је мачак прво појео миша број 1. Тада редослед по коме једе мишеве изгледа овако: 1, 6, 2, 8, 5, 4, 7, 10, 3, 9, па је последњи појeдени миш црн. Ако је први појeдени миш број 2, тада редослед изгледа овако: 2, 7, 3, 9, 6, 5, 8, 1, 4, 10, а то значи да је последњи појeдени миш управо бели. Јасно је да је то и једини такав случај. Дакле, први појeдени миш је миш број 2.

346. Како је $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$, то је и $2(a^2 + b^2 + c^2) = 2(ab + bc + ca)$, па је $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 = 0$, односно $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$. Како је збир квадрата једнак нули само ако је сваки сабирак једнак нули, то је $a - b = b - c = c - a = 0$, одакле је $a = b = c$.

347. Нека је M тачка у којој симетрала угла α сече крак BC (слика). Како је $\alpha = \beta = 72°$, то је $\measuredangle BAM = 36°$, а $\measuredangle AMB = 72°$. Тада су једнакокраки троуглови ABC и MBA и слични јер имају по два угла од $72°$ и један од $36°$. И троугао AMC је једнакокраки (јер је $\measuredangle MAC = \measuredangle MCA = 36°$), па је $AM = MC$. Из сличности троуглова се добија пропорција $AB : BC = BM : AB$. Из ове једнакости је $10 : b = (b-10) : 10$. Дакле, $b(b-10) = 100$. Одавде је $b^2 - 10b + 25 = 125$, односно $(b-5)^2 = (5\sqrt{5})^2$, а сам крак $b = 5 + 5\sqrt{5}$.



Слика уз задатак 347

348. Како је $S = 3(1+3+3^2) + 3^4(1+3+3^2) + \cdots + 3^{1993}(1+3+3^2) = (1+3+3^2)(3+3^4+\cdots+3^{1993})$. Како је први чинилац 13, а други је дељив са 3, то је S дељиво са 39.

349. Нека је брзина бржега x, а споријег y. Тада је $(x+y)\frac{1}{60} = 1650$, тј. $x+y = 99600$, јер се они сусрећу. Слично је $(x-y)\frac{11}{60} = 1650$, тј. $x-y = 9000$, јер бржи сустиже споријег. Решавањем добијених једначина добијамо да је $x = 54000\,\mathrm{m/h} = 54\,\mathrm{km/h}$ и $y = 45000\,\mathrm{m/h} = 45\,\mathrm{km/h}$.

350. Видети решење задатка 345.

351. Књига има $195 \cdot 2 = 390$ страница. За нумерацију је потребно $9 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + (390-99) \cdot 3 = 9 + 180 + 873 = 1062$ цифре.

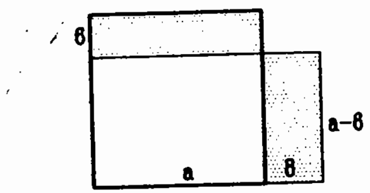
352. Једино решење је $A = 1$ и $B = 8$, то јест $1 + 18 + 88 + 1888 = 1995$.

353. Нека је цена књиге x динара. Тада је први ученик имао $x-2$ динара, а други $x-7$ динара. Када заједнички купују, онда је $x-2+x-7 < x$, тј. $x < 9$. Другом дечаку недостаје 7 динара, што значи да је књига скупља од 7 динара, тј. $x > 7$. Дакле, $7 < x < 9$, па је $x = 8$ динара.

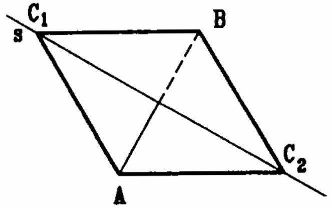
354. Ако је дати квадрат имао страницу a (слика), онда су странице правоугаоника $a-6$ и $a+8$, па је очигледно $6a = 8(a-6)$, тј. $a = 24\,\mathrm{cm}$. Дакле, дати квадрат има обим $4 \cdot 24 = 96\,\mathrm{cm}$, а правоугаоник $2(18+32) = 100\,\mathrm{cm}$.

355. Запремина дате коцке је $V = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27\,\mathrm{cm}^3$. Дакле, ивице могућих квадара су: $1, 1, 27$, затим $1, 3, 9$ и на крају $3, 3, 3$. Њихове површине су $110\,\mathrm{cm}^2$, $78\,\mathrm{cm}^2$ и $54\,\mathrm{cm}^2$, па је највећа површина првог квадра, а најмања трећег квадра, тј. дате коцке.

356. Нека је дужина пута x. Тада је $4 + \frac{x-4}{2} + 4 + \frac{x}{3} = x$, а $x = 36\,\mathrm{km}$.



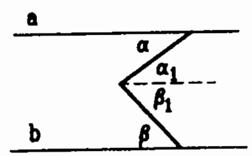
Слика уз задатак 354



Слика уз задатак 357

357. Прво се конструише тачка B која је симетрична са A у односу на s (слика). Како је $AB = BC = CA$, то је теме C на симетрали s, а од тачке A је удаљено за дужину дужи AB. Задатак има два решења.

358. Очигледно је $a = 1$, јер када би било веће од 1, онда би производ $9 \cdot \overline{abcd}$ био петоцифрен број. Ако је $a = 1$, онда је $d = 9$, јер цифра d је већа или једнака $9a = 9$. Како је тада $b \neq 1$ и $b \neq 9$, то је $9b$ стотина мање од 1000, а то значи да је $b = 0$. Како је сада $\overline{10c9} \cdot 9 = \overline{9c01}$, то је производ дељив са 9, па збир цифара $9 + c + 0 + 1$ мора бити дељив са 9, а то је могуће једино када је $c = 8$. Према томе тражено множење је $1089 \cdot 9 = 9801$.



Слика уз задатак 359

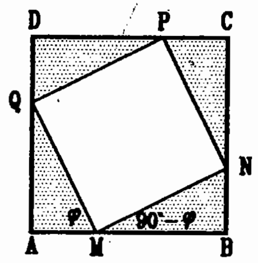
359. Очигледно је $\gamma = \alpha_1 + \beta_1$. Како је $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$ (као углови са паралелним крацима), то је $\gamma = \alpha + \beta = 34°52' + 47°39' = 82°31'$ (слика).

360. Једно од могућих решења је: У суд од 51 сипамо 31 воде, а затим напунимо суд од 31 и допунимо суд од 51. Тада ће у суду од 31 остати само литар воде. Испразнимо суд од 51 и у њега наспемо добијени литар воде. Потом судом од 31 доспемо још 31 воде. Тако се сада у суду од 51 налази тачно $1 + 3 = 41$ воде.

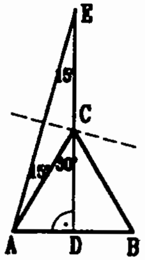
361. Када се децимални зарез помери за једно место улево, дати број се смањи 10 пута. Дакле, ако је дати број био $10x$, онда је нови број x. Како се они разликују за 123,48, то је $10x - x = 9x = 123{,}48$, што значи да је $x = 13{,}72$, па је дати број 137,2.

362. Дати број n мора бити дељив са 44, а то значи са 4 и са 11. Како је $n = \overline{a1995} + \overline{1995b}$ и како је n дељив са 4, дакле паран, то је цифра b непарна, а двоцифрени звршетак броја n дељив са 4. Дакле, b може бити 3 (двоцифрени завршетак 48) или 7 (двоцифени завршетак 52). Дакле, $n = \overline{(a+2)1948}$ или $n = \overline{(a+2)1952}$. Да би n било дељиво са 11, разлика збира цифара на парним и непарним позицијама мора бити дељива са 11, па су једина могућа решења $a = 8$ и $a = 4$. Дакле могућа су два решења проблема: $81995 + 19953 = 101948$, односно $41995 + 19957 = 61952$.

363. Правоугли троуглови AMQ, BMN, CNP, DPQ су подударни ($AM = BN = CP = DQ$, $QA = MB = NC = PD$). Из подударности је $QM = MN = NP = PQ$, $\measuredangle AMQ = \measuredangle BNM = \measuredangle NPC = \measuredangle PQD = \varphi$ и $\measuredangle AQM = \measuredangle BMN = \measuredangle CNP = \measuredangle DPQ = 90° - \varphi$. Како је $\measuredangle AMQ + \measuredangle BMN = \varphi + 90° - \varphi$, то је и $\measuredangle QMN = 90°$ (слика). Према томе четвороугао $MNPQ$ је квадрат.



Слика уз задатак 363

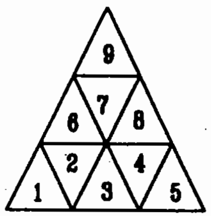


Слика уз задатак 364

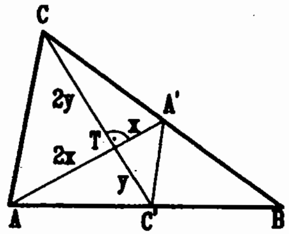
364. *Анализа*: Ако висину CD једнакостраничног троугла ABC продужимо преко темена C за дуж $CE = BC = AC$ (слика), тада је у троуглу ADE страница $DE = CD + CE = d = 5\,\mathrm{cm}$, $\measuredangle ADE = 90°$ и $\measuredangle AED = \measuredangle EAC = 15°$.

Конструкција: Прво конструишемо помоћни троугао ADE. Како је троугао ACE једнакокраки, то симетрала странице AE сече страницу DE у тачки C.

365. Поделимо дати једнакостранични троугао ABC на девет једнакостраничних троуглова чија је страница 1 cm (слика). Како је дато 10 тачака, а имамо 9 троуглова, то на основу Дирихлеовог принципа постоји троугао у коме се налазе бар две тачке. Те две тачке су на растојању мањем од 1 cm, јер највеће могуће растојање је тачно 1 cm.



Слика уз задатак 365



Слика уз задатак 369

366. Како је $999 < \overline{abca} = (5c+1)^2 < 10000$, то је $31 < 5c+1 < 100$, па је $6 < c$. Дакле, $c \in \{7, 8, 9\}$. Како је тада $(5c+1)^2 \in \{1296, 1681, 2116\}$, то условима задатка одговара само $(5 \cdot 8 + 1)^2 = 1681$, тј. $a = 1$, $b = 6$, $c = 8$.

367. Нека је $a = \dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{2} = \dfrac{5}{2} + \sqrt{5}$ и $b = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = \sqrt{6} + \sqrt{5}$. Тада је $a - b = \dfrac{5}{2} - \sqrt{6} > 0$, јер је $\dfrac{5}{2} > \sqrt{6}$, због $\dfrac{25}{4} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 > 6$. Дакле $a > b$, тј. $\dfrac{5 + 2\sqrt{5}}{2} > \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$.

368. Ако је $x + \dfrac{1}{x} = 3$, онда је $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2} = 9$, па је $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$.

Квадрирањем и сређивањем новодобијене релације следи да је $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 = x^4 + 2 + \dfrac{1}{x^4} = 49$, па је $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = 47$.

369. Нека је $AA' \cap CC' = \{T\}$ (слика). Ако је $AA' = 3x$ и $CC' = 3y$, онда из правоуглог троугла CTA' следи релација $x^2 + 4y^2 = 12^2 = 144$, а из правоуглог троугла ATC' релација $4x^2 + y^2 = 16^2 = 256$. Сабирањем ових двеју релација добијамо $5x^2 + 5y^2 = 400$, одакле следи да је $A'C'^2 = x^2 + y^2 = 80$ и $A'C' = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$. Како је дуж $A'C'$ средња линија троугла, то је $AC = 2A'C' = 8\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$. Обим троугла је $O = (56 + 8\sqrt{5})\,\mathrm{cm}$, а површина $P = 64\sqrt{11}\,\mathrm{cm}^2$.

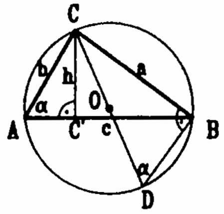
370. Сваки од 12 витезова може се у делегацији комбиновати са 9 преосталих витезова (не комбинује се са два своја суседа и са самим собом). Према томе укупан број делегација једнак је $(9 \cdot 12) : 2 = 54$ (задатак је аналоган са задатком о броју дијагонала дванаестоугла).

371. Очигледно да у једном минуту мала казаљка пређе пут од $(360 : 12) : 60 = 0{,}5°$, а велика пут од $360 : 60 = 6°$. Како велика казаљка треба да „престигне“ малу и направи разлику за угао од $120°$, то значи да је $6x - 0{,}5x = 5{,}5x = 240$, па је $240 : 5{,}5 = 43\dfrac{7}{11}$ минута.

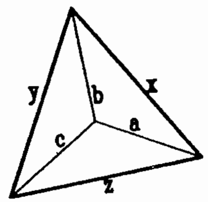
372. Као у задатку 568. добијамо да је $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = 7$. Множећи са $x + \dfrac{1}{x} = 3$ добија се $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 21$, а то значи да је $x^3 + \dfrac{1}{x^3} + x + \dfrac{1}{x} = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3 = 21$, па је $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = 18$.

373. Ако је тражени троцифрени број $\overline{abc}$, онда је $\overline{abc} = 15(a + b + c)$. Како је десна страна једнакости дељива са 15, то мора бити и лева, па се тражени троцифрени број завршава цифром 0 или 5. Ако је $c = 0$, онда добијена једначина постаје $100a + 10b + c = 15a + 15b$, односно $17a = b$, што је немогуће јер су a и b цифре. Ако је $c = 5$, добија се једначина $100a + 10b + 5 = 15a + 15b + 75$, односно $17a = b + 14$. Ово је могуће једино ако је $a = 1$ и $b = 3$, па је тражени број $135 = 15(1 + 3 + 5)$.

374. Површина троугла је $126\,\text{cm}^2$. Из сличности троуглова ACC' и BCD ($\measuredangle C'AC = \measuredangle CDB = \alpha$, $\measuredangle AC'C = \measuredangle CBD = 90°$) је $b : h = 2R : a$, где је R полупречник описаног круга (слика). Следи да је $R = \dfrac{ab}{2h}$. Како је $h = \dfrac{2P}{c}$, то је $R = \dfrac{abc}{4P} = \dfrac{65}{6}$. Тражена површина је $\left(\dfrac{65}{6}\right)^2 \pi - 126 = 242{,}7\,\text{cm}^2$.



Слика уз задатак 374



Слика уз задатак 375

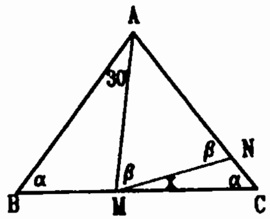
375. Нека су a, b и c бочне ивице дате пирамиде (слика). Тада је запремина дате пирамиде $V = \dfrac{abc}{6}$. Како је $\dfrac{ab}{2} = 4\sqrt{105}$, $\dfrac{bc}{2} = 16\sqrt{21}$, $\dfrac{ca}{2} = 42\sqrt{5}$, то се множењем ових релација добија $(abc)^2 = 5 \cdot 672^2$, па је $abc = 672\sqrt{5}$. Дакле, запремина пирамиде је $V = 112\sqrt{5}\,\text{cm}^3$. Даље је $a = \dfrac{abc}{bc} = \sqrt{105}$ и слично $b = 8$ и $c = 4\sqrt{21}$. Сада се лако израчунавају основне ивице $x = 13$, $y = 20$ и $z = 21$. Површина пирамиде је $P = (4\sqrt{105} + 16\sqrt{21} + 42\sqrt{5} + 126)\,\text{cm}^2$.

376. Како се доручак састојао од $3+5 = 8$ риба, то је сваки појео по $\dfrac{8}{3}$ рибе. Према томе, први је путнику уступио $5 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{7}{3}$ рибе, а други $3 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{1}{3}$ рибе. Зато новац треба поделити у размери $7 : 1$, то јест први риболовац треба да узме 7, а други 1 динар.

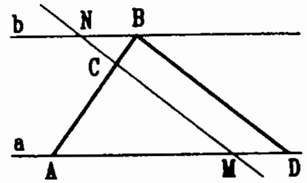
377. Ако је $p = 2$, онда је $1995p + 1 = 1995 \cdot 2 + 1 = 3991$. Како је $3991 = 13 \cdot 307$, то је $1995p + 1$ сложен број. Ако је $p \geqslant 3$, онда је p непаран број, па је $1995p + 1$ паран, дакле опет сложен број.

378. Нека је $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = \alpha$, $\measuredangle AMN = \measuredangle ANM = \beta$ и нека је тражени $\measuredangle CMN = x$ (слика). Тада је $\beta = x + \alpha$ (као спољашњи угао троугла MCN). Слично је и $\beta + x = 30° + \alpha$ (као спољашњи угао троугла

ABM). Заменом β у другу једнакост добија се $x + \alpha + x = \alpha + 30°$, тј. $2x = 30°$, па је $x = 15°$.



Слика уз задатак 378



Слика уз задатак 379

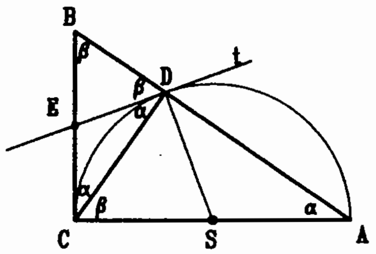
379. *Анализа*: Претпоставимо да је задатак решен, тј. да је права p већ конструисана (слика). Конструишимо кроз тачку B праву q тако да је $p \parallel q$, при чему q сече a у тачки D. Тада је $BN = MD$, јер је $MNBD$ паралелограм ($a \parallel b$, $p \parallel q$). Дакле $AD = AM + MD = AM + BN = 5\,\text{cm}$.
Конструкција: Конструишемо на правој a тачку D тако да је $AD = 5\,\text{cm}$. Тачке B и D одређују праву q. Праву p добијамо тако што кроз тачку C конструишемо праву паралелну са q. Пресек праве p са правим a и b даје тачке M и N.
Доказ: Следи из анализе и конструкције.

380. Претпоставимо да су сви добили различит број кликера. Најмањи могући збир кликера тада је $0+1+2+3+\cdots+62+63 = 63 \cdot 32 = 2016 > 1995$. Значи да је такав распоред немогућ, тј. постоје два дечака са истим бројем кликера.

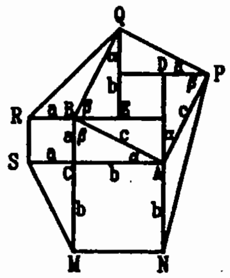
381. Пословођа је мислио да за цео посао треба $14 \cdot 10 = 140$ надница. Међутим, после два дана је утврдио да поред преосталих $140 - 28 = 112$ треба још $4 \cdot 14 = 56$ надница. Дакле, у преосталих 8 дана треба одрадити 56 надница, па је број новозапослених радника $56 : 8 = 7$.

382. Како је $S = 2 + 2^2 + \cdots + 2^{1995}$, то је $2S = 2(2 + 2^2 + \cdots + 2^{1995}) = 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{1995} + 2^{1996} + 2 - 2 = S + 2^{1996} - 2$ и $S = 2^{1996} - 2 = 2(2^{1995} - 1)$. Одавде је очигледно S дељиво са 2. Како је 1995 дељиво и са 3 и са 5, сабирке можемо груписати по 3 и по 5. У првом случају добијамо $S = 2(1 + 2 + 4) + 2^4(1 + 2 + 4) + \cdots + 2^{1993}(1 + 2 + 4) = 7M$, а у другом $S = 2(1+2+4+8+16)+2^4(1+2+4+8+16)+\cdots+2^{1991}(1+2+4+8+16) = 31N$. Како су 2, 7 и 31 узајамно прости, то је S дељиво са $2 \cdot 7 \cdot 31 = 434$.

383. Нека је $\measuredangle CAB = \alpha$ и $\measuredangle ABC = \beta$ (α и β су комплементни – слика). Тада је $\measuredangle CDE = \measuredangle CAB = \alpha$ (као угао између тангенте и тетиве CD). Како је $\measuredangle CDA = \measuredangle CDB = 90°$, то је и $\measuredangle BCD = \alpha$, па је $DE = CE$. Слично $\measuredangle EDB = \measuredangle EBD = \beta$, па је $BE = DE$. Дакле, $CE = DE = BE$.



Слика уз задатак 383



Слика уз задатак 384

384. Троуглови ABC, BEQ и ADP (слика) су подударни ($AB = AP = BQ = c$, $\angle CAB = \angle DAP = \angle BQE = \alpha$ и $\angle ABC = \angle QBE = \angle APD = \beta$). Тада је $PD = a$ и $QE = b$. Површина шестоугла $MNPQRS$ је тада $P = a^2 + b^2 + c^2 + 4 \cdot \dfrac{ab}{2} = 2(a^2 + b^2 + ab)$.

385. а) Нула се лако добија на следећи начин: 1 оставимо, а од преостала 1994 броја формирамо 997 парова суседних бројева и сваки пар заменимо апсолутном вредношћу њихове разлике, тј. јединицом. Сада имамо $1 + 997 = 998$ јединица. Формирањем нових разлика добићемо 499 нула, а онда се од њих лако добија 0.

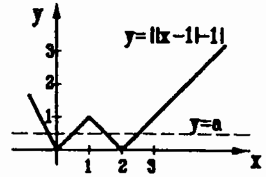
б) Збир свих бројева је $S = 1 + 2 + \cdots + 1994 + 1995 = 1995 \cdot 998$, дакле паран број. Приметимо да када избришемо два броја и уместо њих напишемо њихов збир, укупан збир бројева се не промени. Ако напишемо њихову разлику, укупан збир се смањи за двоструку вредност мањег од њих, али остаје паран. Према томе, никаквим трансформацијама не можемо променити парност последњег броја, тј. он мора бити паран и никада не може бити 1995.

386. а) Множењем израза на десној страни добија се збир у којем се сви сабирци поништавају изузев a^{1995} и b^{1995}.

б) Како је $a^{1995} + b^{1995} = (a + b)M$, то је $1^{1995} + 1994^{1995} = (1 + 1994)A = 1995A$, $2^{1995} + 1993^{1995} = (2 + 1993)B = 1995B, \ldots, 997^{1995} + 998^{1995} = (997 + 998)R = 1995R$. Како је збир сваког овако конструисаног пара сабирака дељив са 1995 и, такође 1995^{1995} дељиво са 1995, то је и цео збир дељив са 1995.

387. Нека је број столица са 3 ноге x, а број столица са 4 ноге y. Тада је број људи у соби $x + y$, па је укупан број ногу у соби $3x + 4y + 2(x + y) = 69$. Дакле, $5x + 6y = 69$. Једначина има два могућа решења: $x = 9$, $y = 4$ или $x = 3$, $y = 9$.

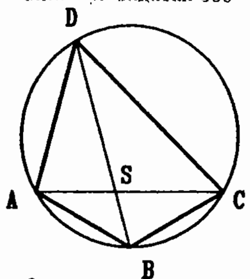
388. Нацртајмо график функције $y = ||x - 1| - 1|$ (слика). Права $y = a$ сече добијени график у 0 тачака (ако је $a < 0$); у 2 тачке (ако је $a = 0$); у 4 тачке (ако је $0 < a < 1$); у 3 тачке (ако је $a = 1$); и у 2 тачке (ако је



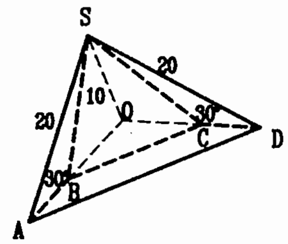
Слика уз задатак 388

$a > 1$). Према томе, тражени инетрвал је $0 < a < 1$, а добијена решења су тада: $-a$, a, $2 - a$ и $2 + a$.

389. Како је (слика) $\angle ADB = \angle ACB$ (као периферијски над тетивом AB) и како је $\angle ACB = \angle BAC$ ($AB = BC$), то су троуглови ABD и SBA слични ($\angle ABS = \angle ABD$ и $\angle SAB = \angle ADB$). Из сличности је $AB : BS = BD : AB$, па је $BD = \dfrac{AB^2}{BS} = \dfrac{36}{4} = 9$.



Слика уз задатак 389



Слика уз задатак 390

390. Нека се равни ABS, CDS и $ABCD$ секу у тачки O (слика). Тада је $SO = 10\,\mathrm{cm}$, а $AO = DO = 10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Како је $BS = CS = 10\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, то је $BO = CO = 10\,\mathrm{cm}$ и $\angle OBS = \angle OCS = 45°$. Површина базе пирамиде је разлика површина троуглова ADO и BCO, дакле $B = 150 - 50 = 100$, па је запремина пирамиде $V = \dfrac{100 \cdot 10}{3} = \dfrac{1000}{3}\,\mathrm{cm}^3$. Површина пирамиде је

$$P = B + M = 100 + 2\frac{10(10\sqrt{3} - 10)}{2} + \frac{(10\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = 50(3\sqrt{3} + \sqrt{15})\,\mathrm{cm}^2.$$

391. Ако је $p = 2$, онда је

$$p^{1995} + 1995^p + 1996 = 2^{1995} + 1 + 1995^p + 1995$$
$$= (2 + 1)(2^{1994} - 2^{1993} + \cdots + 2^2 - 2 + 1) + 3^p \cdot 665^p + 3 \cdot 665.$$

Како је сваки од добијених сабирака на десној страни једнакости дељив са 3, то је и број $2^{1995} + 1995^2 + 1996$ дељив са 3. Ако је $p \geqslant 3$, онда је p непаран број, па су p^{1995} и 1995^p такође напарни бројеви. Зато је број $p^{1995} + 1995^p + 1996$ паран број, дакле и сложен.

392. Нека је x број задатака које је ученик тачно решио, y број задатака за које је дао нетачна решења и z број задатака које није ни решавао. Из услова задатка следи да је

$$x + y + z = 20, \quad 8x - 5y = 13.$$

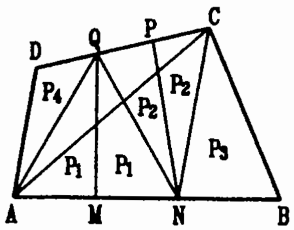
Из друге од тих једначина следи да је $8x = 5y + 13$, па следи да је број $5y + 13$ дељив са 8. Одатле закључујемо да је y непаран број. Последња цифра у декадном запису броја $5y$ је 0 или 5, а одатле следи да је последња цифра броја $5y + 13$ једнака 8 (због његове дељивости са 8. Дакле $8x \in \{18, 28, 38, 48, \dots\}$, при чему је $8x \leqslant 160$ (јер је $x \leqslant 20$). Једини бројеви који су мањи од 160, чији се запис завршава цифром 8 и који су дељиви са 8, су 48, 88, 128. Значи $x \in \{6, 11, 16\}$.
Ако је $x = 6$, онда је $5y + 13 = 48$, $y = 7$ и $z = 7$.
Ако је $x = 11$, онда је $5y + 13 = 88$ и $y = 15$, што није решење, јер је $x + y > 20$.
Слично, ако је $x = 16$, онда је $5y + 13 = 128$, $y = 23$ и $x + y = 39 > 20$, па и у овом случају не добијамо решење.
Дакле, једино решење је $x = 6$, $y = 7$, $z = 7$.

393. Нека је $P_{\triangle MNQ} = P_1$, $P_{\triangle NPQ} = P_2$, $P_{\triangle NBC} = P_3$ и $P_{\triangle AQD} = P_4$, слика. Тада је $P_{\triangle AMQ} = P_1$, јер троуглови AMQ и MNQ имају једнаке основице ($AM = MN$) и једнаке висине. Слично, $P_{\triangle NPC} = P_{\triangle NPQ} = P_2$, јер је $PC = PQ$, а и висине троуглова су једнаке. Дакле,

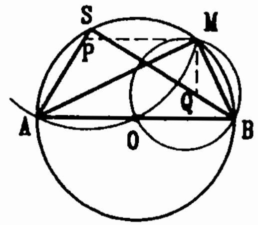
$$P_{ABCD} = 2P_1 + 2P_2 + P_3 + P_4.$$

Даље имамо да је $P_{\triangle AQD} = P_4 = \frac{1}{3}P_{\triangle ACD}$, $\quad P_{\triangle NBC} = P_3 = \frac{1}{3}P_{\triangle ABC}$, јер је $BN = \frac{1}{3}AB$ и $QD = \frac{1}{3}CD$. Значи, $P_3 + P_4 = \frac{1}{3}(P_{\triangle ACD} + P_{\triangle ABC}) = \frac{1}{3}P_{ABCD}$. Сада добијамо $P_{ABCD} = 2(P_1 + P_2) + \frac{1}{3}P_{ABCD}$, одакле следи да је $\frac{2}{3}P_{ABCD} = 2(P_1 + P_2) = 2P_{MNPQ}$, што значи да је

$$P_{MNPQ} = \frac{1}{3}P_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot 1995 = 665\,\text{cm}^2.$$



Слика уз задатак 393



Слика уз задатак 394

394. Нека је $\measuredangle AOM = \varphi$, слика. Тада је $\measuredangle BOM = 180^\circ - \varphi$, а из једнакокраких троуглова AOM и BOM добијамо $\measuredangle OAM = \measuredangle OMA =$

$90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, $\measuredangle OBM = \measuredangle OMB = \frac{\varphi}{2}$. Како је $\measuredangle APM = 2(180^\circ - \varphi)$, то из једнакокраког троугла AMP добијамо $\measuredangle MAP = \varphi - 90^\circ$. Значи да је

$$\measuredangle BAS = \measuredangle BAP = \measuredangle BAM + \measuredangle MAP = \measuredangle OAM + \measuredangle MAP$$
$$= 90^\circ - \frac{\varphi}{2} + \varphi - 90^\circ = \frac{\varphi}{2}.$$

Слично је $\measuredangle BQM = 2(180^\circ - \varphi)$, а из једнакокраког троугла BQM добијамо $\measuredangle QBM = \varphi - 90^\circ$. Зато је

$$\measuredangle ABS = \measuredangle ABM - \measuredangle MBS = \measuredangle OBM - \measuredangle MBQ$$
$$= \frac{\varphi}{2} - (\varphi - 90^\circ) = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Како је $\measuredangle BAS + \measuredangle ABS = \frac{\varphi}{2} + 90^\circ - \frac{\varphi}{2} = 90^\circ$, то је $\measuredangle ASB = 90^\circ$, а одатле следи да тачка S припада датом кругу.

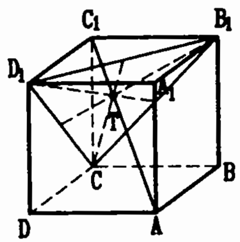
395. Таблу чоколаде треба изломити на mn делова. Како се сваким правилним ломом број делова повећава за један, то следи да је број правилних ломова једнак $mn - 1$.

396. Прво приметимо да је троугао CB_1D_1 једнакостраничан са страницом једнаком $a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$. Означимо са T тежиште тог троугла, слика. Тада је тачка T подножје висине из темена C_1 правилне тростране пирамиде $C_1CB_1D_1$ и такође подножје висине из темена A правилне тростране пирамиде ACB_1D_1. Према томе, права AC_1 нормална је на раван CB_1D_1 и продире ту раван у тачки T. Зато се нормалне пројекције темена C, B_1 и D_1 на дијагоналу AC_1 поклапају са тачком T. Запремина пирамиде $C_1CB_1D_1$ једнака је

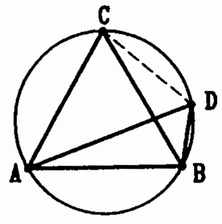
(1) $$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{(CB_1)^2\sqrt{3}}{4}\cdot C_1T = \frac{1}{3}\cdot\frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}\cdot C_1T = \frac{a^2\sqrt{3}\cdot C_1T}{6}.$$

С друге стране та запремина је

(2) $$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{C_1D_1\cdot C_1B_1}{2}\cdot C_1C = \frac{a^3}{6}.$$



Слика уз задатак 396



Слика уз задатак 397

Из једнакости (1) и (2) добијамо да је $C_1T = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{AC_1}{3}$. Према томе, пројекције темена коцке на просторну дијагоналу AC_1 деле ту дијагоналу на три једнака дела, а дужина сваког од тих делова једнака је $2\sqrt{3}$ cm.

397. Угао при врху C једнакокраког троугла ABC једнак је $80°$, слика. Како је и $\measuredangle ADB = 180° - \measuredangle BAD - \measuredangle ABD = 180° - 20° - (50° + 30°) = 80°$, то, коришћењем својства периферијских углова над истим луком добијамо да тачка D припада кругу описаном око троугла ABC. Даље следи да је $\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = 20°$.

398. Доказаћемо следеће тврђење: Ако су x, y и z природни бројеви за које важи једнакост $x^2 + y^2 = z^2$, онда је бар један од бројева x, y, z дељив са 3 и бар један од тих бројева је дељив са 5.

(а) *Доказ дељивости са* 3. Прво приметимо да ако природан број није дељив са 3, онда његов квадрат при дељењу са 3 даје остатак 1. Заиста, за $n = 3k+1$, добијамо $n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$, а за $n = 3k+2$ важи $n^2 = (3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$. Сада лако закључујемо да ако за природне бројеве x, y и z важи $x^2 + y^2 = z^2$, онда је бар један од бројева x и y дељив са 3. У противном збир $x^2 + y^2$ при дељењу са 3 даје остатак $1 + 1 = 2$, а то није могућно, јер је тај збир једнак квадрату природног броја (који је или дељив са 3 или при дељењу са 3 даје остатак 1).

(б) *Доказ дељивости са* 5. Прво приметимо да квадрат природног броја при дељењу са 5 даје остатак 0, 1 или 4. Заиста, за $n = 5k$ добијамо $n^2 = 25k^2$; за $n = 5k \pm 1$ добијамо $n^2 = (5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$, а за $n = 5k \pm 2$ добијамо $n^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$. Ако је неки од бројева x и y дељив са 5, тврђење је доказано. Претпоставимо сада да ниједан од бројева x и y није дељив са 5. Није могућно да квадрати оба броја x и y дају исти остатак при дељењу са 5. Заиста, ако би исти остатак био једнак 1, онда би збир x^2+y^2 при дељењу са 5 давао остатак 2, а то није могућно јер је тај збир једнак z^2. Ако би исти остатак био једнак 4, онда би збир $x^2 + y^2$ при дељењу са 5 давао остатак 3 јер је $4+4 = 8 = 5+3$, а то из истог разлога није могућно. Према томе, један од бројева x^2 и y^2 при дељењу са 5 даје остатак 1, а други даје остатак 4. Зато је збир $x^2+y^2 = z^2$ дељив са 5, одакле следи да је и број z дељив са 5.

399. 1° Нека за природне бројеве a, b, c, d, e важе наведене релације. Како је $2 < a < b < c < d < e$, то је $a \geqslant 3$, $b \geqslant 4$, $c \geqslant 5$, $d \geqslant 6$ и $e \geqslant 7$. Очигледно је
$$\frac{5}{e} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 1 < \frac{5}{a}.$$

Према томе, $a < 5$, па следи да је $a = 3$ или $a = 4$. Ако је $a = 4$, онда је $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{4}$ и $5 \leqslant b < c < d < e$. Како је
$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1066}{1680} < \frac{3}{4},$$
то у овом случају нема решења. Дакле, $a = 3$.

2° За $a = 3$ добијамо $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{2}{3}$ и $4 \leqslant b < c < d < e$. Тада је
$$\frac{4}{e} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{2}{3} < \frac{4}{b},$$
одакле следи да је $b < 6$, тј. $b = 4$ или $b = 5$. Ако је $b = 5$, онда је $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$. Осим тога, $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{146}{336} < \frac{7}{15}$, тј. нема решења код којих је $b = 5$. Дакле, $b = 4$.

3° За $a = 3$, $b = 4$ добијамо $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{12}$, $5 \leqslant c < d < e$ и
$$\frac{3}{e} < \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{12} < \frac{3}{c}.$$
Према томе, $c < \frac{36}{5}$, односно $c \in \{5, 6, 7\}$. Ако је $c = 7$, онда је
$$\frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{17}{72} < \frac{5}{12} - \frac{1}{7} = \frac{1}{d} + \frac{1}{e},$$
па у овом случају нема решења. Ако је $c = 6$, онда је $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{3}{12}$, па даље добијамо $\frac{2}{e} < \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = \frac{3}{12} < \frac{2}{d}$, тј. $d < 8$. Тада, једина могућност за d је $d = 7$, али у том случају је $\frac{1}{e} = \frac{3}{12} - \frac{1}{7} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$, одакле следи да e није природан број, што је контрадикција. Према томе, $c = 5$.

4° Ако је $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, онда је $\frac{2}{e} < \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{13}{42} < \frac{2}{d}$, одакле следи да је $d < \frac{84}{13}$. Једина могућност за d је $d = 6$. Тада добијамо
$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{20},$$
одакле следи да је $e = 20$. Коначно једино решење је $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$, $e = 20$.

400. Приметимо да у сваком скоку сваки скакавац прескаче растојање чији је мерни број паран (то је двоструко растојање до скакавца кога прескаче). Зато, скакавац који је на почетку у тачки 2, у сваком тренутку се налази у тачки којој одговара паран број, а остала два скакавца се у сваком тренутку налазе у тачкама којима одговарају непарни бројеви. Зато се на крају прескакања скакавац S_2 који је био у тачки 2 опет тамо налази, а скакавци S_1 и S_3 су заменили места.

1996. година

401. $1+6\cdot(9-9)=1$; $9:(9-6)-1=2$; $6:(1+9:9)=3$; $9:(9-6)+1=4$; $6-1+9-9=5$.

402. Највећи је 88850, а најмањи 50008. Њихова разлика је 38842.

403. Нека су те једнаке суме новца x. Тада Јагода има $x+10$, а Нада $x-10$ динара. Ако би Нада поклонила Јагоди 10 динара, онда би Јагода имала $x+20$, а Нада $x-20$ и било би $x+20=2(x-20)$. Добијамо да је $x=60$ динара, што значи да је Јагода имала 70, а Нада 50 динара.

404. Ако је дужина правоугаоника $3a$, онда је његова ширина $2a$, а обим правоугаоника је $10a=90\,cm$. Дакле, $a=9\,cm$, па је дужина правоугаоника $27\,cm$, а ширина $18\,cm$.

405. Више троуглова има фигура B, јер фигура A има 13 различитих троуглова, а фигура B има 14 различитих троуглова.

406. Како је запремина дате коцке $1728\,cm^3$, а $1728=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot=2^3 2^3 3^3$, то је страница дате коцке $2\cdot2\cdot3=12\,cm$. Дакле, површина коцке је $P=6\cdot12\cdot12=864\,cm^2$.

407. Могућа решења су: $X=\{2,4\}$, $X=\{2,4,5\}$, $X=\{2,4,6\}$, $X=\{2,4,5,6\}$.

408. Како је $\alpha+\beta=180°$ и $\beta+\gamma=90°$, то је $\alpha-\gamma=90°$. Исто тако је $\beta+\gamma+90°=180°$, то је са углом γ суплементан угао $\beta+90°=180°-\alpha+90°=270°-\alpha$.

409. Број $26*17*$ је дељив са 45, а то значи са 5 и са 9. Према томе, његова последња цифра је 0 или 5, а збир цифара му је дељив са 9. Постоје дакле два кандидата: 262170 и 266175. Дељењем са 45 утврђујемо да је непознати чинилац 5826, односно 5915, па се ради о множењу $5826\cdot45=262170$.

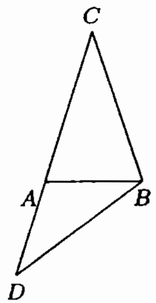
410. Најмање три праве које се секу свака са сваком, а највише шест међусобно паралелних правих.

411. Како је $\frac{29}{1996}>\frac{28}{1996}=\frac{7}{499}>\frac{7}{500}$, то је $\frac{29}{1996}>\frac{7}{500}$.

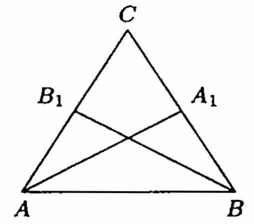
412. За један минут се напуни $\frac{1}{20}$ каде, а испразни $\frac{1}{30}$ њене запремине, што значи да у кади остаје $\frac{1}{60}$ њене запремине. Дакле, за 36 минута у кади ће бити $\frac{36}{60}=\frac{3}{5}$ њене запремине.

413. Ако је $p=2$, онда је број $p^{1996}+1997p$ паран и сложен, јер је сваки од његових сабирака паран.
Аке је $p\geq3$, онда је p непаран број, па је сваки од сабирака у броју $p^{1996}+1997p$ такође непаран, а њихов збир је паран, дакле и сложен број. Тиме је доказ завршен.

414. Уочимо најпре да је угао $\sphericalangle ACB=36°$ (слика). Како је $AB=AD$, то је и $\sphericalangle ADB=\sphericalangle ABD=36°$. Како је $\sphericalangle ACB=\sphericalangle ADB=36°$, то је $\triangle BCD$ такође једнакокраки.



Слика уз задатак 414



Слика уз задатак 415

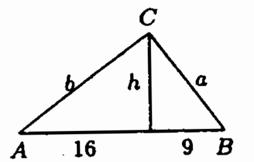
415. Нека су AA_1 и BB_1 тежишне дужи које одговарају крацима једнакокраког троугла ABC (слика). Тада доказ следи из подударности троуглова ABA_1 и ABB_1, јер је $AB=AB$ (заједничка страница), $BA_1=AB_1$ (као половине једнаких кракова) и $\sphericalangle A=\sphericalangle B$ (као углови на основици једнакокраког троугла).

416. Ако је површина датог троугла $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а површина траженог троугла $P=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}=3P=\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$, онда је $b^2=3a^2$, односно $b=a\sqrt{3}$. Дакле, страница траженог троугла је двострука висина датог троугла.

417. Претпоставимо да је $x=\sqrt{2}+\sqrt{5}$ рационалан број. Квадрирањем добијамо да је $x^2=7+2\sqrt{10}$, па је $\sqrt{10}=\frac{x^2-7}{2}$. Како је x по претпоставци рационалан број, то би и $\sqrt{10}$ морао бити рационалан, а како он то није, то ни x није рационалан.

418. Нека је тражена камата у процентима природан број k. Тада ће штедиша прве године имати $100+k$ динара, а друге године $(100+k)(100+k)\%=\frac{(100+k)^2}{100}>200$ или $100+k>\sqrt{20000}=141.42$ динара. Дакле, $k>41.42\%$, односно k је најмање 42%.

419. Број 7^4 завршава се цифром 1 па се и $\left(7^4\right)^{499} = 7^{1996}$ завршава цифром 1. Тада се $7^{1996} - 1$ завршава цифром 0.



Слика уз задатак 420

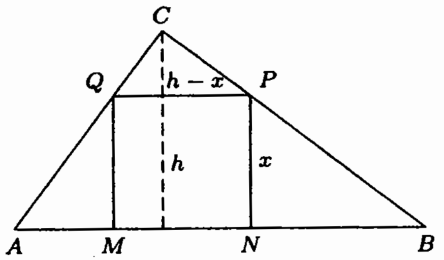
420. Нека је h хипотенузина висина (слика). Тада је из Питагорине теореме $a^2 = h^2 + 9^2$ и $b^2 = h^2 + 16^2$, а $c^2 = a^2 + b^2 = h^2 + 9^2 + h^2 + 16^2$. Како је $c = 16 + 9 = 25\,cm$, решавањем управо добијене једначине по висини h, добијамо да је $h = 12\,cm$, $a = 15\,cm$, $b = 20\,cm$. Тада је обим троугла $O = 60\,cm$, а површина датог троугла $P = 150\,cm^2$.

421. Нека је тражено растојање s. Брзина пешака је тада $\frac{s}{4}$. За једну трећину пута путник утроши време које износи $\frac{s}{3} : \frac{s}{4} = \frac{4}{3}h = 80$ минута. Преосталих 100 минута $= \frac{5}{3}h$ минута пешак се креће брзином $\left(\frac{s}{4} + 3\right) \frac{km}{h}$ и прелази $\frac{2}{3}$ пута. Из једначине $\left(\frac{s}{4} + 3\right)\frac{5}{3} = \frac{2s}{3}$ добијамо $s = 20\,km$.

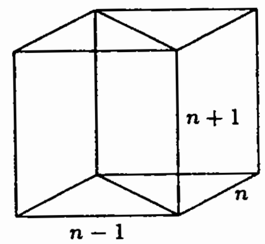
422. Дата једначина је еквивалентна једначини $|x+1| + |x-1| = 1996$, која има два решења: $x = 998$ и $x = -998$.

423. Највише правих је одређено ако су све дате тачке неколинеарне. Тада има $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ правих. Највише равни је одређено ако су сваке три тачке у различитој равни. Тада свака од добијених 45 правих са преосталих 8 тачака гради $45 \cdot 8 = 360$ равни. Међутим, како су равни $(AB)C$, $(AC)B$ и $(BC)A$ једна те иста раван, то је укупан број равни $360 : 3 = 120$.

424. Хипотенуза тог троугла је $c = 25\,cm$, а хипотенузина висина $h = 12\,cm$. Нека је дати троугао ABC (C је теме правог угла) и нека је $MNPQ$ уписани квадрат странице x (слика). Из сличности троуглова ABC и QPC добијамо: $AB : QP = c : x = h : (h - x)$. Одавде је $x = \frac{300}{37} > 8$, па је површина квадрата већа од $64\,cm^2$.



Слика уз задатак 424



Слика уз задатак 425

425. Нека су странице тог квадра $n-1$, n и $n+1$ (слика). Како дијагонални пресек квадра може бити квадрат само ако је једна страница тог квадрата највећа ивица квадра, онда је дијагонала једне стране квадра једнака највећој ивици квадра. Из Питагорине теореме је $n^2 + (n-1)^2 = (n+1)^2$, одакле је $n = 4$, па су ивице квадра $3\,cm$, $4\,cm$ и $5\,cm$. Површина квадра је тада $94\,cm^2$, а запремина $60\,cm^3$.

426. (а) $5 \cdot 5 = 25$; (б) $4 \cdot 5 = 20$.

427. Како је $ABC + AB = 196$, то је $A = 1$ и $6 < B < 9$. B није 8, јер би тада и C било 8, па је $B = 7$. Дакле, тражени бројеви су: $179 + 17 = 196$.

428. Док зец пређе $7 \cdot 50 = 350\,cm$, пас пређе $2 \cdot 200 = 400\,cm$. Према томе, у јединици времена пас пређе $50\,cm$ више од зеца. Раздаљину од $125\,m = 12500\,cm$ он ће надокнадити после $12500 : 50 = 250$ јединица времена. За тих 250 јединица времена пас ће прећи $250 \cdot 400\,cm = 100000\,cm = 1000\,m$.

429. Полуобим једног поља, тј. збир две странице квадратног поља је $18 : 2 = 9\,cm$. Како је обим табле једнак $4 \cdot 8 = 32$ странице или 16 парова страница, то је обим шаховске табле $16 \cdot 9 = 144\,cm$.

430. Једно од могућих решења је дато на слици.

7	12	5
6	8	10
11	4	9

Слика уз задатак 430

431. Бројеви $860 - 9 = 851$ и $1200 - 16 = 1184$ имају највећи заједнички делилац 37. Дакле, количници су: $851 : 37 = 23$ и $1184 : 37 = 32$.

432. Спортом се бави $450 - 20 = 430$ ученика. Како кошарку и одбојку игра 215 ученика, то фудбал игра $430 - 215 = 215$ ученика. Значи, одбојку игра $323 - 215 = 108$ ученика, а кошарку $215 - 108 = 107$ ученика.

433. Нека је четврти угао x. Тада је трећи $3x$, други $4x$, а први $2 \cdot 4x = 8x$. Значи, $8x + 4x + 3x + x = 16x = 160°$, па је $x = 10°$, а тражени углови су: $80°$, $40°$, $30°$ и $10°$.

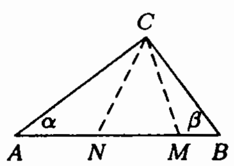
434. Нека је бројилац траженог разломка x. Тада је $\frac{1}{3} < \frac{x}{8} < \frac{2}{3}$ и $8 < 3x < 16$. Дакле, $x \in \{3, 4, 5\}$, па је реч о следећим разломцима: $\frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}$.

435. Док зец пређе $7 \cdot 50 = 350\,cm$, пас пређе $2 \cdot 200 = 400\,cm$. Према томе, у јединици времена пас пређе $50\,cm$ више од зеца. Раздаљину од $125\,m = 12500\,cm$ он ће надокнадити после $12500 : 50 = 250$ јединица времена. За тих 250 јединица времена пас ће прећи $250 \cdot 400 = 100000\,cm = 1000\,m$.

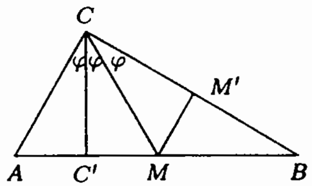
436. Свака нула се добија као производ једне двојке и једне петице. Како двојки има више него петица то је довољно пребројати петице. Бројева који су дељиви са 5 има 100 : 5 = 20. Међу њима су и 25, 50, 75 и 100 који су дељиви са 25. Дакле, производ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100$ садржи $20 + 4 = 24$ петице, па се тај производ завршава са 24 нуле.

437. У суду A има $\frac{9}{15}$ вина и $\frac{6}{15}$ воде. Када из суда A одлијемо $7\,l$ помешане течности одлили смо $7 \cdot \frac{9}{15} = \frac{63}{15}\,l$ вина и $7 \cdot \frac{6}{15} = \frac{42}{15}\,l$ воде. Слично, у суду B је $\frac{12}{18} = \frac{2}{3}$ вина и $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$ воде. Када из суда B одлијемо у суд A $7\,l$ течности одлили смо укупно $7 \cdot \frac{9}{15} = \frac{21}{5}\,l$ вина и $7 \cdot \frac{6}{15} = \frac{14}{5}\,l$ воде. Дакле, сада у суду A има $9 - \frac{21}{5} + \frac{14}{3} = \frac{142}{15}\,l$ вина и $6 - \frac{14}{5} + \frac{7}{3} = \frac{83}{15}\,l$ воде. У суду B ће бити $12 - \frac{14}{3} + \frac{21}{5} = \frac{173}{15}\,l$ вина и $6 - \frac{7}{3} + \frac{14}{5} = \frac{97}{15}\,l$ воде.

438. Како су троуглови ACM и BCN једнакокраки, то је $\sphericalangle AMC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle BNC = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ (слика). Тада је $\sphericalangle MCN = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45^\circ$.



Слика уз задатак 438



Слика уз задатак 439

439. Нека је M' подножје нормале из тачке M на страницу BC (слика). Из услова задатка следи да су правоугли троуглови ACC', $CC'M$ и CMM' подударни (УСУ), па је $AC' = C'M = MM'$. Како је $AM = MB = 2MM'$ и како је троугао $MM'B$ правоугли, то је $\sphericalangle MBM' = 30^\circ$ и $\sphericalangle BMM' = 60^\circ$. Како је из доказане подударности троуглова $\sphericalangle CMM' = \sphericalangle CMC'$ и како је њихов збир 120°, то је сваки од њих по 60°. Сада је опет из подударности троуглова $\sphericalangle CMC' = \sphericalangle CAC' = 60^\circ$, па је $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.

440. Поделимо дати квадратни тепих на $4 \times 4 = 16$ квадратних поља димензија $1m \times 1m$. Како имамо 16 поља, а 15 рупа, то увек, на основу Дирихлеовог принципа, постоји једно поље $1m \times 1m$ у коме нема нити једне рупе.

441. Допунимо дати правоугли троугао ABC подударним троуглом ACM (слика). Нека је MM' висина једнакокраког троугла ABM. Тада је $\sphericalangle MAB = 45^\circ$, а како је троугао AMM' правоугли, то је и $\sphericalangle AMM' = 45^\circ$, па

је троугао AMM' једнакокракоправоугли. Одавде је $AM' = MM' = 10\sqrt{2}$. Дакле, површина троугла ABM је $P_{\triangle ABM} = 20 \cdot 10\sqrt{2} : 2 = 100\sqrt{2}$. Тада је површина троугла ABC једнака половини добијене површине, тј. $P_{\triangle ABC} = 50\sqrt{2}\,cm^2$.

442. Како је $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \overline{xxx}$, то је $n(n+1) = 2 \cdot 111 \cdot x = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot x$. Како с леве стране имамо производ два узастопна природна броја, то мора бити и са десне стране, а то је могуће само ако се ради о производу $36 \cdot 37$ или $37 \cdot 38$. Како 38 није дељиво са 3, као могућност остаје једино $x = 6$ и $n = 36$.

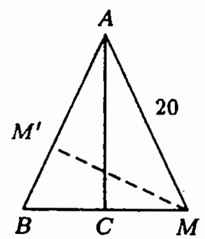
443. У 9 сати мала казаљка „бежи“ великој за 270°. Угао између казаљки се после 9 сати смањује да би у једном тренутку био 50°. Нека се то деси x минута после 9 сати. Док велика казаљка „пређе“ 60 минута, мала „пређе“ само 5 минута, тј. велика прелази 6° у минуту, а мала само 0.5°. Тада је $270^\circ + 0.5^\circ \cdot x = 6^\circ \cdot x + 50^\circ$. Дакле, $5.5^\circ \cdot x = 220^\circ$, па је $x = 40$ минута.

444. Како је $17 \cdot 10^{33} + 26 \cdot 10^{32} - 74 \cdot 10^{31} = a \cdot 10^k$, то је $10^{34}(1.7 + 0.26 - 0.074) = 1.886 \cdot 10^{34} = a \cdot 10^k$. Одавде је $a = 1.886$ и $k = 34$.

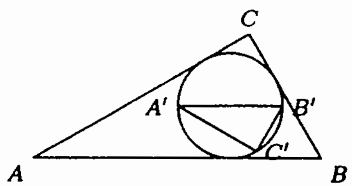
445. Како је $h_a = \frac{2P}{a}$, $h_b = \frac{2P}{b}$, $h_c = \frac{2P}{c}$, то се заменом у почетну једнакост добија еквивалентна једнакост $a^2 + b^2 = c^2$, што значи да је дати троугао правоугли.

446. Нека је у породици x браће и y сестара. Тада је на основу услова задатка $x - 1 = 2y$ и $x = 5(y - 1)$. Дакле, $5(y - 1) - 1 = 2y$, или $5y - 6 = 2y$. Према томе, $y = 2$ и $x = 5$, тј. у породици је петоро браће и две сестре.

447. Ако је $x < 0$, неједначина гласи: $-x + 1996 > 5x$, па је $6x < 1996$, тј. $x < 1996 : 6$, што значи да у овом случају услове задатка задовољавају бројеви $x < 0$. Ако је $x \geq 0$, онда је $x + 1996 > 5x$, тј. $4x < 1996$, па је $x < 499$. Дакле, неједначину задовољавају сви бројеви x такви да је $x < 499$.



Слика уз задатак 441



Слика уз задатак 448

448. Хипотенуза датог троугла је $25\,cm$, а полупречник круга уписаног у правоугли троугао је $r = 5\,cm$ (доказати). Како је дати троугао правоугли, то је и њему сличан троугао правоугли, па је његова хипотенуза једнака пречнику круга, дакле $10\,cm$ (слика). Како је коефицијент сличности $25 : 10 = 2.5$, катете уписаног троугла су $15 : 2.5 = 6\,cm$ и $20 : 2.5 = 8\,cm$. Обим сличног троугла је $24\,cm$, а површина $24\,cm^2$.

449. Висина дате призме је половина бочне ивице и једнака је висини бочне стране. Површина се састоји од два квадрата, два правоугаоника и два паралелограма, тј. $P = 2 \cdot 10 \cdot 10 + 2 \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot 10 \cdot 10 = 800\,cm^2$. Запремина је $V = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000\,cm^3$.

450. (а) 10 (белих) +30 (плавих) +3 (црвене) = 43 куглице;
(б) 30 (плавих) +20 (црвених) +1 (бела) = 51 куглица;
(в) 2 (беле) +2 (црвене) +2 (плаве) +1 = 7 куглица.

451. Како је прва од преосталих страница 143. страница, то је последња страница 314 (јер она мора бити парна и већа од 143). Како недостају прве 142 странице, књига тренутно има $314 - 142 = 172$ странице.

452. Када први сабирак увећамо четири пута, збир 1804 се практично увећа за његову троструку вредност. Дакле, $3x = 1996 - 1804 = 192$ или $x = 64$. Тада је други сабирак $1804 - 64 = 1740$.

453. I решење: Очигледно је $A = 3$, јер ако би A било 4 дати збир (4321) би морао бити већи од 4444. Тада је $6 = 0 + 1 + 2 + 3 \leq A + B + C + D \leq 3 + 9 + 8 + 7 = 27$, па је $A + B + C + D$ једнако 11 или 21. Дакле, $B + C + D$ је 8 или 18. Како је $A + B = 3 + B = 11$ или 12, то је $B = 8$ или 9. Дакле, $C + D$ није 0, већ је 9 или 10. Тада је очигледно $A + B + C + D = 21$, па је $A + B + C + 2 > 3 + 8 + C + 2 = 22$. Значи да је $C = 9$, па је $B = 8$, а $D = 1$. Коначно, тражени сабирци су: $3891 + 389 + 38 + 3 = 4321$.

II решење: Из услова задатка је $4321 = \overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{AB} + \overline{A} = (1000\,A + 100\,B + 10\,C + D) + (100\,A + 10\,B + C) + (10\,A + B) + A$, тј. $1111\,A + 111\,B + 11\,C + D = 4321$. Одавде следи да је $2 < A < 4$, тј. $A = 3$. Тада је $111\,B + 11\,C + D = 988$, па је $7 < B < 9$, тј. $B = 8$. Сада је $11\,C + D = 100$, одакле следи да је $C = 9$ и $D = 1$.

454. У једном кругу сваки од 10 клубова одигра 9 утакмица, па је укупан број одиграних утакмица у једном кругу $(10 \cdot 9) : 2 = 45$. У четири круга одигра се $4 \cdot 45 = 180$ утакмица.

455. Тражена подела на 27 мањих коцки се остварује са укупно 6 разрезивања (2 хоризонтална и 4 вертикална). Број необојених коцки ивице $1\,dm$ је један, (унутрашња коцка), а на свакој ивици коцке има по једна (средња) мала коцка ивице $1\,dm$ која је обојена са две стране плавом бојом, па је број таквих коцки једнак 12 (осам коцки је обојено са три стране плавом бојом и шест коцки је са једне стране обојено плавом бојом).

456. Очигледно се $B + B + C$ завршава цифром C. Дакле, B је или 0 или 5. Како B није 0 (јер је прва цифра броја), то је $B = 5$. Тада је $C = 4$. Како је

$A + B + 1 = 10 + C$, то је $A = 8$, па се ради о сабирању $85 + 855 + 4554 = 5494$, одакле је $D = 9$.

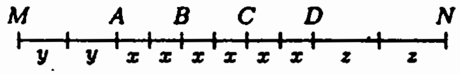
457. Разломци a, b, c, d имају имениоце 2, 3, 4, 5, 6, 7 или 8. Како је $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{7}{9}$, тражени разломци су $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, јер је $\frac{7}{9} < \frac{4}{5} < \frac{5}{6} < \frac{6}{7} < \frac{7}{8} < \frac{8}{9}$.

458. Лека и Раша за један сат ураде $\frac{1}{495}$ део посла, Лека и Жарко за један сат ураде $\frac{1}{440}$ део посла, а Раша и Жарко за један сат ураде $\frac{1}{792}$ део посла. Дакле, за један сат Лека, Раша и Жарко ураде

$$\left(\frac{1}{495} + \frac{1}{440} + \frac{1}{792}\right) : 2 = \frac{8 + 9 + 5}{11 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} : 2 = \frac{1}{360}$$

део посла, што значи да ће цео посао завршити за 360 сати.

459. Нека је $AB = BC = CD = 2x$, $MA = 2y$, $DN = 2z$ (слика). Тада је растојање од средишта дужи AB до средишта дужи CD једнако $x + 2x + x = 4x = 32\,cm$, па је $x = 8\,cm$ и дуж $AD = 6x = 48\,cm$. Како је растојање од средишта дужи MA до средишта дужи DN једнако $y + 6x + z = 57\,cm$, то је $y + z = 57 - 48 = 9cm$. Дуж MN је, очигледно, једнака $2y + 6x + 2z = 6x + 2(y + z) = 48 + 18 = 66\,cm$.



Слика уз задатак 459

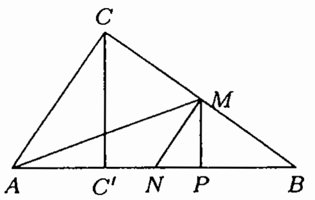
460. Како у преступној години има 366 дана, то значи да у тој години има 52 целе недеље (364 дана) и још два дана. Како имамо 53 понедељка, имамо два случаја: могуће је да у тој години имамо 53 уторка (тада је 1. јануар понедељак), или 53 недеље (тада је 1. јануар недеља). Ако је 1. јануар недеља, 6. април је петак. Ако је 1. јануар понедељак, 6. април је субота.

461. Из треће корпе пребацимо у другу 7 јабука, па је сада распоред јабука 6, $7 + 7 = 14$, $11 - 7 = 4$. Сада из друге корпе пребацимо у прву 6 јабука, па је распоред $6 + 6 = 12$, $14 - 6 = 8$, 4. У трећем кораку из прве корпе пребацимо у трећу 4 јабуке, па је коначан распоред $12 - 4 = 8$, 8, $4 + 4 = 8$.

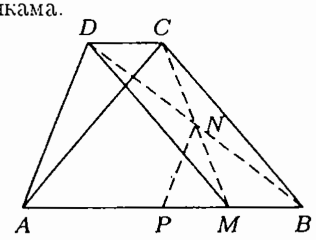
462. Ако је у одељењу тренутно присутно $6x$ ученика, тада је број одсутних ученика x. Када се још један ученик разболео, број одсутних ученика је $x + 1$ и то је петина од присутних $6x - 1$ ученика. Непознати број x добијамо из једначине $\frac{6x - 1}{5} = x + 1$, па је $6x - 1 = 5x + 5$ или $x = 6$. Значи да је у том одељењу било $6x$ присутних и x одсутних ученика, што укупно износи $7x = 42$ ученика.

463. Нека је тражени број $n = 3 \cdot 37m + r = 111m + r$, где је $0 \leq r < 111$. Тада је r најмањи природан број који при дељењу са 3 даје остатак 1, а при дељењу са 37 даје остатак 33. У обзир долазе бројеви 33, 70 и 107, од којих очигледно само 70 задовољава оба услова, па n при дељењу са 111 даје остатак 70.

464. Нека је C' подножје висине из темена C, а AM и CN тежишне дужи из темена A и C (слика). Нека је P подножје висине троугла MNB из темена M. Прво конструишемо помоћни правоугли троугао MNP у коме је: $MP = \frac{1}{2}CC' = 1.5\,cm$, угао код темена P прав и дуж $MN = \frac{1}{2}AC = 2\,cm$. Теме A је од тачке M удаљено $5\,cm$, па задатак има два решења, јер круг $k(M, r = 5\,cm)$ праву NP сече у двема тачкама.



Слика уз задатак 464



Слика уз задатак 465

465. Троуглови ACD и MBC (слика) су подударни (СУС): (1) $CD = MB$; (2) $\sphericalangle DCA = \sphericalangle CAB$ (као углови са паралелним крацима), а углови $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC$ су једнаки као углови на основици једнакокраког троугла ABC; (3) $AC = BC$ (као краци једнакокраког троугла). Из подударности следи да је $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CMB$. Како је $\sphericalangle DAM = 180° - \sphericalangle CDA$ и како је $\sphericalangle AMC = 180° - \sphericalangle BMC$, то је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle AMC$.
Даље, како је $MBCD$ паралелограм, то је N пресек дијагонала, па је $DN = BN$, а по претпоставци је и $AP = PB$. Дакле, NP је средња линија троугла ABD, па је $PN \parallel AD$ и одавде, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle NPM$. Како из првог дела задатка следи да је $\sphericalangle DAB = \sphericalangle PMN$, то је и $\sphericalangle NPM = \sphericalangle PMN$, па је и троугао MNP једнакокрак, што значи да је $MN = PN$.

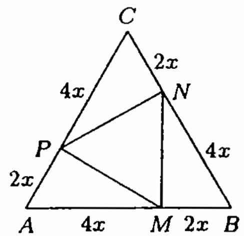
466. Нека је број страница многоугла n. Тада је производ збира углова и броја дијагонала $(n-2) \cdot 180° \cdot \frac{n(n-3)}{2} = 97200°$. Одавде је $n(n-2)(n-3) = 1080$. Како је $1080 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 12 \cdot 10 \cdot 9$, то је број $n = 12$.

467. Како је дати полином $P = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$, то је $2P = x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2$. Издвајањем потпуних квадрата добијамо $2P = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$. Збир квадрата је увек ненегативан, па није позитиван само у случају да је сваки од сабирака једнак нули, а то

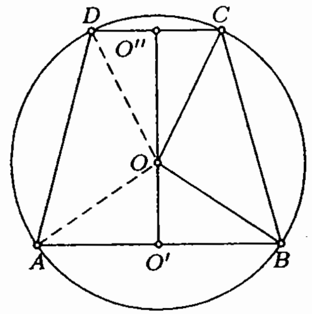
је само када је $x - y = y - z = z - x = 0$, што значи да дати полином није позитиван само када је $x = y = z$.

468. Троуглови AMP, BMN и CNP (слика) су подударни ($AM = BN = CP = 4x$; $\sphericalangle PAM = \sphericalangle MBN = \sphericalangle NCP = 60°$ и $AP = MB = NC = 2x$ (СУС)). Из подударности закључујемо и да су одговарајуће странице једнаке, тј. $MN = NP = PM = 2x\sqrt{3}$, па је и троугао MNP једнакостраничан. Сада се обими троуглова односе као $6x : 2x\sqrt{3} = \sqrt{3} : 1$, а површине као $(6x^2) : (2x\sqrt{3})^2 = 36 : 12 = 3 : 1$.

469. Нека је тачка O центар круга описаног око датог трапеза $ABCD$ и нека су тачке O' и O'' подножја нормала из тачке O редом на основице AB и CD (слика). Тада је, очигледно: $\Delta AOO' \cong \Delta BOO'$ и $\Delta COO'' \cong DOO''$. Из ових подударности следи: $\sphericalangle AOO' = \sphericalangle BOO' = \varphi$ и $\sphericalangle COO'' = \sphericalangle DOO'' = \theta$. Одавде је $\sphericalangle AOD = 180° - \varphi - \theta = \sphericalangle BOC$, па је и $\Delta AOD \cong \Delta BOC$ (СУС). Из ове подударности следи да $AD = BC$.



Слика уз задатак 468



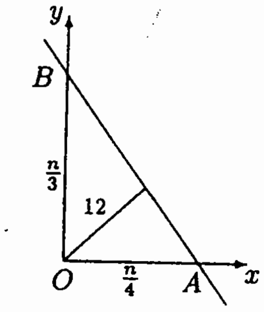
Слика уз задатак 469

Даље, како је из услова задатка, $P = 289\,cm^2$ и $a + b = 34\,cm$, то је висина трапеза $h = 289 : 17 = 17\,cm$. Нака је $h = OO'$. Тада се применом Питагорине теореме на троуглове BOO' и COO'' добија да је $R^2 = x^2 + 5^2 = (17 - x)^2 + 12^2$, па је $x = 12\,cm$, а $R = 13\,cm$. На крају, нека је тачка C' подножје нормале из темена C на основицу AB. Како је $AC' = CC' = 17\,cm$, то је троугао ACC' једнакокрако-правоугли, па је угао између дијагонале и основице трапеза једнак 45°. Тада је угао између дијагонала трапеза прав.

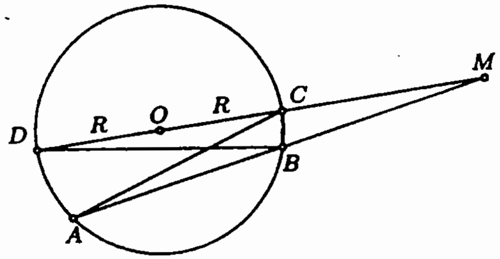
470. Кандидати за прву цифру су 2, 4, 6 и 8; за другу 4, 6, 8 и 9; за трећу 1, 3, 5, 7 и 9; за четврту 2, 3, 5 и 7; за пету цифру 0, 3, 6 и 9. Према томе, таквих бројева има $4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 = 1280$.

471. Једно од могућих решења једначине $3x + 8y = 1996$ у скупу природних бројева је $x_0 = 660$ и $y_0 = 2$. Тада је опште решење дате једначине дефинисано релацијама: $x = 660 - 8k$ и $y = 2 + 3k$. Како је $y = 3k + 2$ и како је $0 \leq y = 3k + 2 \leq 1996 : 8 < 250$, то из неједнакости $-2 \leq 3k \leq 248$ следи да је $0 \leq k \leq 82$, што значи да има укупно 83 решења.

472. По услову задатка, дата права на координатним осама Ox и Oy одсеца одсечке $OA = \frac{n}{4}$ и $OB = \frac{n}{3}$ (слика). Тада је хипотенуза AB правоуглог троугла OAB једнака $\frac{5n}{12}$, а површина троугла је $\frac{n^2}{24}$. Из површине правоуглог троугла AOB хипотенузина висина $OS = \frac{n}{5} = 12$, па је $n = 60$, $OA = 15$, $OB = 20$, а површина троугла OAB је 150.



Слика уз задатак 472



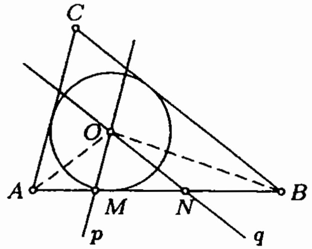
Слика уз задатак 474

473. Претпоставимо да је то могуће и да је збир бројева у сваком од скупова једнак S. Како је тада $2S = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{1995} + 2^{1996}$, то је $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{1995}$. Дакле, S је непаран број. Како је то немогуће, јер се S добија као комбинација збира парних бројева, то је немогуће и дати скуп бројева поделити на два дела који имају једнак збир.

474. Нека је полупречник круга R и нека сечица OM сече круг у тачкама C и D (слика). Тада су троуглови MAC и MBD слични, јер је $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMD$ и $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MDB$ (као периферијски угао над тетивом BC). Из сличности следи $MA : MD = MC : MB$ или $16 : (13 + R) = (13 - R) : 9$, па је $169 - R^2 = 144$. Из добијене једнакости је $R = 5\,cm$. Дакле, обим круга је $10\pi\,cm$, а његова површина $25\pi\,cm^2$.

475. Применом Питагорине теореме добијамо да је квадрат висине трапеза $h^2 = 7^2 - 1^2 = 48$ и квадрат дијагонале $f^2 = h^2 + 4^2 = 48 + 16 = 64$, па је дијагонала трапеза $8\,cm$ (лева слика). Како се основице трапеза односе као $5 : 3$, то и пресек дијагонала дели дијагонале на одсечке $5\,cm$ и $3\,cm$. Како је $H^2 = s^2 - 5^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, то је висина пирамиде $H = 12\,cm$ (десна слика). Запремина дате пирамиде је $V = B \cdot H : 3 = ((5 + 3) \cdot 2\sqrt{3} \cdot 12) : 3 = 64\sqrt{3}\,cm^3$.

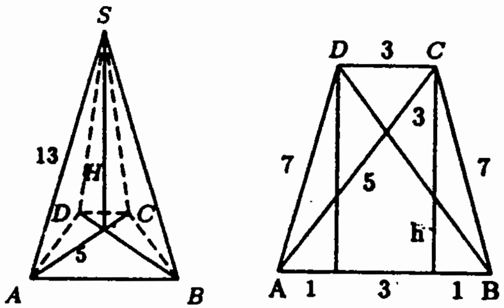
476. Први ученик је платио 50% вредности компјутера. Други је дао трећину износа који су обезбедила преостала тројица, што значи да је он



Слика уз задатак 475

обезбедио 20% вредности компјутера. Трећи је платио четвртину од износа који су дала преостала тројица, односно 20% вредности компјутера. Дакле, четврти ученик је платио 5% компјутера, што износи 500 динара. Према томе, цена компјутера је $20 \cdot 500 = 10\,000$ динара.

477. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног броја је већи од $10 \cdot 100 = 1000$, а мањи од $100 \cdot 1000 = 100000$, па тражени производ може бити 2222 или 22222. Ако је производ $2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$, тражени бројеви су $11 \cdot 202$ или $22 \cdot 101$. У случају да је производ $22222 = 2 \cdot 41 \cdot 271$, добијамо производе $41 \cdot 542$ или $82 \cdot 271$. Према томе, задатак има четири различита решења.

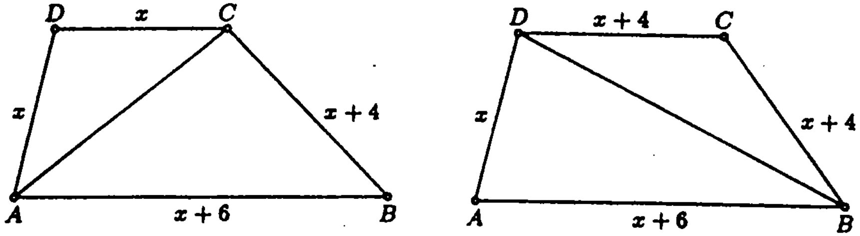


Слика уз задатак 478

478. Троугао AMO је једнакокрак (слика), јер је $\sphericalangle MAO = \sphericalangle CAO$ (права AO је симетрала угла BAC) и $\sphericalangle CAO = \sphericalangle AOM$ (као углови са паралелним крацима, $AC \parallel OM$). Из једнакости $\sphericalangle MAO = \sphericalangle AOM$ следује и једнакост страница $AM = OM$. Слично је и троугао BNO једнакокрак, јер је $\sphericalangle NBO = \sphericalangle CBO$ (права BO је симетрала $\sphericalangle ABC$) и $\sphericalangle CBO = \sphericalangle NOB$ (као углови са паралелним крацима, $BC \parallel ON$). Из једнакости $\sphericalangle NOB = \sphericalangle NBO$ следи $BN = ON$. Тада је обим троугла OMN једнак $OM + MN + ON = AM + MN + NB = AB$, што је и требало доказати.

479. Нека је дужина мањег крака трапеза $AD = x$. Тада је већи крак

$BC = x + 4$, а већа основица $AB = x + 6$. Ако дијагонала полови $\sphericalangle DAB$ (лева слика), онда је троугао ACD једнакокрак, па је $CD = AD = x$. Следи да је $x+x+x+4 = 40$, па је $x = 12\,cm$ и обим трапеза $58\,cm$. Ако дијагонала полови $\sphericalangle ABC$ (десна слика), онда је троугао BCD једнакокрак, па је $BC = CD = x + 4$. Тада је $x + x + 4 + x + 4 = 40$, тј. $x = \frac{32}{3}\,cm$. Нека је E тачка на страници AB таква да је $CE \parallel AD$. Тада се лако проверава да је у овом случају $CE = \frac{32}{3}$, $EB = \frac{6}{3}$ и $CB = \frac{44}{3}$, што је немогуће на основу неједнакости троугла. Ако би дијагонала половила углове BCD или ADC, тада би троуглови ABC или ABD били једнакокраки, тј. онда би морало бити $AB = BC$, односно $AB = AD$, што је супротно почетним условима задатка $AB = x + 6 > BC = x + 4 > AD = x$. Дакле, задатак има само једно решење, $x = 12\,cm$, тј. $AB = 18\,cm$, $AD = CD = 12\,cm$, $BC = 16\,cm$.

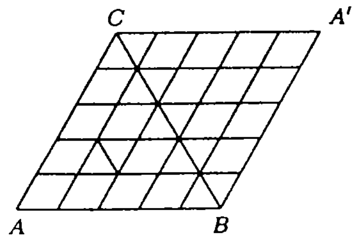


Слика уз задатак 479

480. Допунимо дати једнакостранични троугао ABC, странице $1996\,dm$ до ромба $ABA'C$, (слика). Добијени ромб садржи тачно $1996 \cdot 1996$ ромбова странице $1\,dm$, или када сваки такав ромб поплочамо са две плочице, $2 \cdot 1996 \cdot 1996$ једнакостраничних троуглова странице $1\,dm$. Према томе, половина ромба, тј. дати троугао ABC садржи тачно $1996 \cdot 1996 = 3984016$ једнакостраничних троугаоних „плочица“ странице $1\,dm$.

481. Очигледно је да је број препакованих књига обрнуто пропорционалан утрошеном времену, па је 216 (минута) : 126 (минута) $= x : 63$, одакле је $x = 108$ књига. Максималан број књига у једној кутији је у ствари највећи заједнички делилац, тј. НЗД$(216, 126) = 18$.

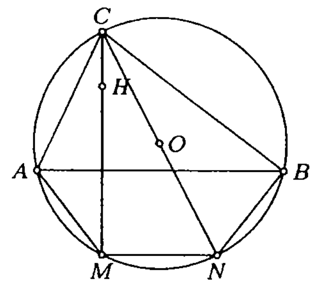
482. Како је $P = x^2(x + 2) - (x + 2) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$, то је и $P(p) = (p - 1)(p + 1)(p + 2)$. Ако је p прост број већи од 3, онда је он непаран, а бројеви $p - 1$ и $p + 1$ су узастопни парни бројеви, што значи да је један од њих дељив са 2, а други са 4, па је њихов производ дељив са 8. Слично, у тројци узастопних природних бројева $p - 1$, p и $p + 1$ један је дељив са 3 и то сигурно није p (јер је он прост). Према томе, производ $(p-1)(p+1)$ сигурно је дељив и са 3, па је $P(p)$ дељиво са $3 \cdot 8 = 24$. Производ $P(p)$ $(p > 3)$ дељив је са $24 \cdot 5 = 120$, ако је неки од чинилаца $p - 1$, $p + 1$ или



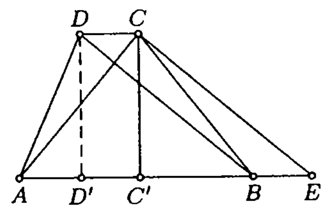
Слика уз задатак 480

$p + 2$ дељив са 5, тј. припада следећем скупу $\{5, 10, 15, \dots\}$. Најмањи такав број је $p = 11$.

483. Прво, четвороугао $ABNM$ је трапез, јер је $CM \perp AB$ (као носач висине из темена C) и $CM \perp MN$ ($\sphericalangle CMN = 90°$, као угао над пречником), (слика). Даље, нека је $\sphericalangle BAC = \alpha$. Тада је $\sphericalangle ACM = 90° - \alpha$, а $\sphericalangle BOC = 2\alpha$. Дакле, $\sphericalangle NCB = 90° - \alpha$, па су периферијски углови $\sphericalangle ACM$ и $\sphericalangle BCN$ једнаки, а тиме су и одговарајуће тетиве једнаке, тј. $AM = BN$.



Слика уз задатак 483



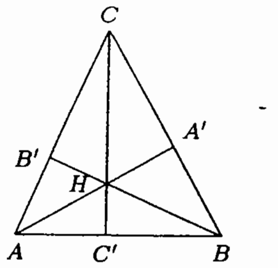
Слика уз задатак 484

484. Уочимо у трапезу $ABCD$ (слика) дијагонале $AC = m = 20\,cm$ и $BD = n = 15\,cm$ и конструишимо дуж CE кроз теме C тако да је $CE \parallel BD$ и $CE = BD = n = 15\,cm$. Троугао ACE је правоугли (јер се дијагонале секу под правим углом), па се применом Питагорине теореме добија да је хипотенуза $AE = 25\,cm$. Како је $AB = a = 21\,cm$, то је $BE = CD = 4\,cm$. Из површине троугла ACE следи да је висина $CC' = 12\,cm$. Из правоуглог троугла $CC'E$ добијамо да је $C'E = 9\,cm$ и $C'B = 5\,cm$. Тада је крак $BC = 13\,cm$. Како је $AD' = AE - BE - BC' - C'D' = 12\,cm$, то је други крак $AD = 12\sqrt{2}\,cm$. Тада је обим датог трапеза $O = (38 + 12\sqrt{2})\,cm$, а површина $P = 150\,cm^2$.

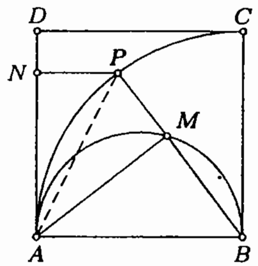
485. Нека је P површина датог троугла ABC (слика). Тада је, из услова задатка, $P_{\Delta BCH} = \frac{a\frac{h_a}{2}}{2} = \frac{P}{2}$. Слично је и $P_{\Delta ACH} = \frac{b\frac{h_b}{3}}{2} = \frac{P}{3}$. Тада је $P_{\Delta ABH} = P - \frac{P}{2} - \frac{P}{3} = \frac{P}{6}$. Према томе, $C'H : CC' = 1 : 6$, $CH : HC' = 5 : 1$.

486. Збир $S = p_1^{1996} + p_2^{1996} + \cdots + p_{1996}^{1996}$ је у ствари збир $S = 2^{1996} + 3^{1996} + 5^{1996} + \cdots + p_{1996}^{1996}$. Приметимо да се сви прости бројеви, изузев 2 и 5 завршавају цифрама 1, 3, 7 или 9. Приметимо и то да се 1996. степени бројева који се завршавају цифрама 1, 3, 7 или 9 завршавају увек цифром 1. Како се 2^{1996} завршава цифром 6, а 5^{1996} завршава цифром 5, тражени збир S се завршава цифром $6 + 5 + (1996 - 2) \cdot 1$, односно, цифром 5. Према томе, S је дељиво са 5.

487. Нека је x дужина свих узбрдица од A до B, y дужина равног пута и z дужина свих низбрдица од A до B. Тада је z дужина свих узбрдица од B до A, y дужина равног пута и x дужина свих низбрдица од B до A.
Очигледно је да је тада $\frac{x}{60} + \frac{y}{72} + \frac{z}{90} = 5$ и $\frac{x}{90} + \frac{y}{72} + \frac{z}{60} = 4$. После краћег рачуна одавде добијамо једначине: $6x + 5y + 4z = 1800$ и $4x + 5y + 6z = 1440$ и тада се лако добија $x + y + z = 324\,km$.



Слика уз задатак 485

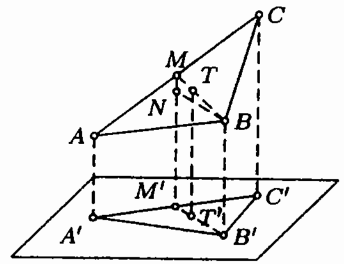


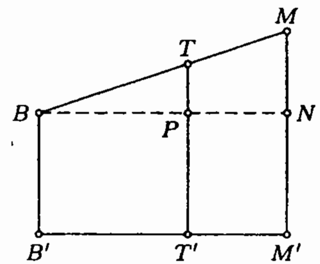
Слика уз задатак 488

488. Нека је $\sphericalangle ABM = \sphericalangle ABP = \varphi$ (слика). Тада је $\sphericalangle BAM = 90^\circ - \varphi$ (троугао ABM је правоугли) и $\sphericalangle BAP = \sphericalangle APB = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$ ($BA = BP$ и троугао ABP је једнакокраки), па је $\sphericalangle NAP = \sphericalangle NAB - \sphericalangle PAB = \frac{\varphi}{2}$. Слично, $\sphericalangle MAP = \sphericalangle BAP - \sphericalangle BAM = \frac{\varphi}{2}$. Дакле, правоугли троуглови AMP и ANP су подударни (страница AP им је заједничка, а сви углови једнаки), па је $MP = NP$.

489. Нека је M средиште странице AC и нека су A', B', C', M' пројекције тачака A, B, C, M, редом, на дату раван α (лева слика). Тада је $MM' = \frac{AA' + CC'}{2} = 31.5\,cm$ ($AA' \parallel MM' \parallel CC'$ и $AA'C'C$ је трапез, а MM' је

његова средња линија). Уочимо даље трапез $BB'M'M$, тежиште T троугла ABC, његову пројекцију T' и тачку N на дужи MM', такву да је $NM' = BB' = 30\,cm$ (десна слика). Ако је тачка P пресек дужи BN и TT', тада је $TP : MN = 2 : 3$. Како је $MN = MM' - NM' = 31.5 - 30 = 1.5\,cm$, то је $TP = 1\,cm$ и $TT' = TP + PT' = 31\,cm$.





Слике уз задатак 489

490. Ако се број n завршава цифром 8, онда се бројеви $n + 29$ и $n - 60$ завршавају цифрама 7, односно 8. Како се квадрати природних бројева никада не завршавају цифрама 7 и 8, то би тачност другог тврђења произвела да тврђења (1) и (3) буду нетачна, а то је супротно претпоставци да су два тврђења тачна, а једно нетачно. Према томе, тачно је $n + 29 = x^2$ и $n - 60 = y^2$. Одузимањем ових једнакости, добијамо да је $x^2 - y^2 = 89$, тј. $(x - y)(x + y) = 89$. Како је 89 прост број, то је могућ само случај $x + y = 89$ и $x - y = 1$, тј. $x = 45$ и $y = 44$. Тада је број $n = x^2 - 29 = 1996$.

491. Ако су те три цифре једнаке 1, онда имамо бројеве

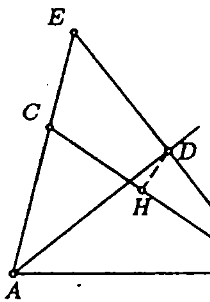
$$111, \underbrace{1112, 1121, 1211, 2111}_{4\text{ броја}}, \ldots, \underbrace{1119, 1191, 1911, 9111}_{4\text{ броја}}, \underbrace{1110, 1101, 1011}_{3\text{ броја}}.$$

Дакле, са 1 имамо $1 + 8 \cdot 4 + 3 = 36$ бројева. Са три цифре једнаке 0 имамо још 9 бројева: $1000, 2000, \ldots, 9000$. Према томе, има укупно 333 броја са траженим условима.

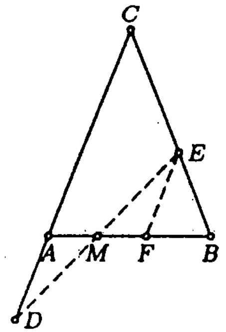
492. Означимо са А и Б два човека који се не познају (ако та два не постоје, онда било која четири човека испуњавају тражене услове). Сваки од њих познаје још по n људи између преосталих $2n-2$. Одавде следи да А и Б имају најмање два заједничка познаника: означимо их са Ц и Д. Ако поставимо А и Б да седе за столом један насупрот другог, а Ц и Д на преостала два места, онда сваки од њих четворице седи између својих познаника.

493. Време које веверица трчи без ораха се налази у односу 3 : 5 према времену које веверица трчи са орахом (производ брзине и времена је константан–једнак је истом путу). Према томе, ако укупно време од 20 минута поделимо на 8 једнаких делова (од по 2.5 минута), онда 3 таква дела веверица проведе трчећи без ораха, а 5 таквих делова веверица проведе трчећи са орахом. Дакле, она трчи 7.5 минута брзином од $5\,km/h$, а после 12.5 минута брзином од $3\,km/h$. Како је $7.5\,min = \frac{3}{24}$ сата, а $12.5\,min = \frac{5}{24}$ сата, то она у оба случаја прелази пут од

$$\frac{3}{24}h \cdot 5\,km/h = \frac{5}{24}h \cdot 3\,km/h = \frac{15}{24}\,km = 625\,m.$$



Слика уз задатак 494



Слика уз задатак 495

494. Претпоставимо да је b мање од c (аналогно се доказује у супротном случају). Означимо са E тачку у продужетку странице AC $(A-C-E)$, такву да је $AE = AB$ (слика). Тада је тачка D средиште основице једнакокраког троугла ABE. Како је тачка H средина дужи BC, то је дуж DH средња линија троугла BCE паралелна са страницом CE. Дужина странице CE је $c-b$. Из ове анализе следи да је у општем случају дужина дужи DH једнака апсолутној вредности разлике страница b и c, подељеној са 2.

495. Нека се AB и DE секу у тачки M (слика). Нека је F тачка основице AB таква да је EF паралелно са AC. Тада је $\sphericalangle CAB = \sphericalangle EFB$ (сагласни) и $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA$ (углови на основици једнакокраког троугла). Одавде је троугао BEF једнакокрак и $FE = BE = AD$. Даље, троуглови AMD и FME су подударни, па је $DM = EM$.

496. Сви парни бројеви n се на 4-ти, па и на 1996-ти степен, завршавају цифром 6 (ако се n не завршава нулом) или цифром 0 (ако се n завршава

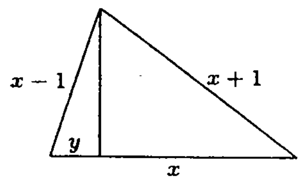
нулом). Сви непарни бројеви се на 4-ти, па и на 1996-ти степен завршавају цифром 1 (ако се n не завршава цифром 5) или цифром 5 (ако се n завршава цифром 5). Зато се број из задатка завршава истом цифром као број $200 \cdot 5 + (998-200) \cdot 1 + 199 \cdot 0 + (998-199) \cdot 6$, дакле, цифром 2.

497. Чланови низа су поређани у „пакетима" који имају редом један члан (са збиром бројиоца и имениоца једнаким 2), два члана (са збиром бројиоца и имениоца једнаким 3), ..., n чланова (са збиром бројиоца и имениоца једнаким $n+1$), ... Разломак $\frac{1996}{1995}$ има збир 3991. То значи да је пре њега прошло $1 + 2 + \cdots + 3989 = \frac{3990}{2} \cdot 3989$ чланова са збировима мањим од 3991. У последњем „пакету" (са збиром 3991) су пре траженог разломка, прошли они са бројиоцима 3990, 3989, ..., 1997, дакле, укупно 1994 разломка. Закључујемо да се тражени разломак налази на месту са редним бројем $1995 \cdot 3989 + 1994 + 1 = 7960050$.

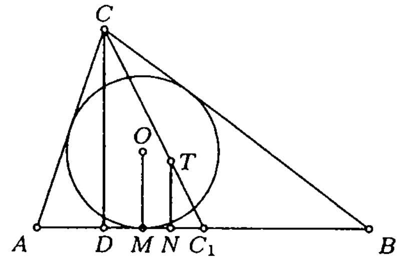
498. Означимо дужине страница троугла са $x-1$, x, $x+1$ (слика). Допунски ћемо претпоставити да је троугао оштроугли, што је испуњено за свако x веће од 4. Означимо са y дужину мањег од два одсечка одређеном висином (оног одсечка који је суседан са страницом дужине $x-1$). Двоструком применом Питагорине теореме једноставно добијамо

$$(x-1)^2 - y^2 = (x+1)^2 - (x-y)^2,$$

тј. $y = \frac{x}{2} - 2$ и $x - y = \frac{x}{2} + 2$. Разлика између ове две дужине је 4.



Слика уз задатак 498



Слика уз задатак 499

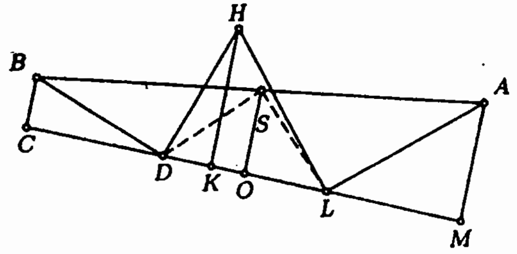
499. Нека су O и T центар уписаног круга и тежиште, а тачке D, M и N редом подножја нормала из тачака C, O и T на страницу AB (слика). Површина троугла је, с једне стране, једнака $\frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD$, а са друге стране $\frac{1}{2} \cdot OM \cdot (AB + BC + CA)$. По услову задатка, последњи израз је једнак

$\frac{1}{2} \cdot OM \cdot 3 \cdot AB$. Одавде добијамо да је $OM = \frac{CD}{3}$. Тежиште T дели тежишну линију CC_1 у односу $2:1$. Из троугла CDC_1, према Талесовој теореми, следи да је $TN = \frac{CD}{3}$. Дакле, тачке T и O се налазе на истом растојању $\frac{CD}{3}$ од праве AB, па је OT паралелно са AB.

500. Означимо тачке у којима се налазе храст, липа и дуд са H, L и D (слика). Нека су позиције првог и другог знака означене са A и B. Благо се налази у тачки S која је средиште дужи AB. Означимо подножја нормала из тачака B, H, A на праву DL редом са C, K, M. Правоугли троуглови HKL и LMA су подударни ($HL = AL$ по претпоставци и сви углови су им једнаки као углови са нормалним крацима). Слично, и троуглови BCD и DKH су подударни, па је $AM = KL$ и $BC = DK$. Уз то је и $CD = LM = KH$, одакле следи да се средиште O дужи DL поклапа са средиштем дужи CM. Дуж OS је средња линија правоуглог трапеза $ABCM$, па је

$$OS = \frac{BC + AM}{2} = \frac{DK + KL}{2} = \frac{DL}{2}.$$

Она је, наравно, и нормална на праву DL. Одавде следи да је троугао DSL једнакокрако-правоугли (половина квадрата), па је могућа следећа конструкција за налажење тачке S:
У средишту O дужи DL поставити нормалу (у оној полуравни у којој се налазио храст) и на њој одредити тачку S на растојању $\frac{DL}{2}$ од тачке O. Ако није познато у којој полуравни се храст налазио, онда копање треба покушати на два места у различитим полуравнима, која су кандидати за позицију тачке S (та два места су два темена поменутог квадрата, различита од D и L).

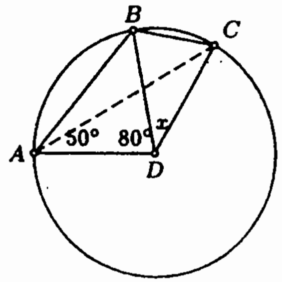


Слика уз задатак 500

501. Прво приметимо да је квадрат непарног броја непаран, а квадрат парног броја паран. Ако збир или разлика квадрата природних бројева a и b има облик $222\ldots22$, онда су бројеви a и b или оба парни или оба непарни. Ако су бројеви a и b парни, онда је квадрат сваког од њих дељив са 4, па су дељиви

са 4 и збир и разлика квадрата. Међутим број облика $222\ldots22$ није дељив са 4. Зато отпада случај када су a и b парни бројеви.
Нека је сада $a = 2k+1$ и $b = 2l+1$, где су k и l ненегативни цели бројеви. Из услова $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 = 222\ldots22$ добијамо да је $4k(k+1) + 4l(l+1) = 222\ldots20$. Приметимо да је број $4k(k+1)+4l(l+1)$ дељив са 8, а број облика $222\ldots20$ дељив је са 8 ако и само ако на почетку нема двојки, и тада је тај број једнак 0, $k = l = 0$ и $a = b = 1$.
Разлика $a^2 - b^2 = (2k+1)^2 - (2l+1)^2 = 4k(k+1) - 4l(l+1)$ дељива је са 4 и не може бити једнака броју облика $222\ldots22$ јер он није дељив са 4.

502. Сва три сабирка не могу бити мања од $\frac{1}{3}$ јер би збир био мањи од 1. Дакле, бар један мора бити већи или једнак $\frac{1}{3}$. Нека је, нпр. $\frac{1}{ab} \geq \frac{1}{3}$, што је еквивалентно са тим да је $a \cdot b \leq 3$. Сви парови (a, b) који су решења ове неједначине су: $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,1)$ и $(3,1)$. Даље лако налазимо сва решења задате једначине: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ и $(3,2,1)$.



Слика уз задатак 504

503. Нека је $2n+1 = k^2$, $3n+1 = m^2$ за неке природне бројеве k, m и n. Тада је $5n+3 = 4\cdot(2n+1) - (3n+1) = 4k^2 - m^2 = (2k+m)(2k-m)$. Како су k и m природни бројеви, то је $2k+m > 1$. Потребно је доказати и да је $2k - m \geq 2$. Претпоставимо супротно, тј. претпоставимо да је $2k - m \leq 1$. Тада је $2k \leq m+1$, одакле следи да је $k \leq \frac{m+1}{2}$ и

$$2n+1 = k^2 \leq \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 = \frac{(m+1)^2}{4}.$$

Следи да је $8n+4 \leq (m+1)^2$, одакле добијамо $2(3n+1)+2n+2 \leq (m+1)^2$, тј. $2m^2+2n+2 \leq (m+1)^2$ и коначно $(m-1)^2 \leq -2n < 0$, што је контрадикција.

504. Према датим подацима је $\sphericalangle BAD = 50°$, па је $AD = BD$ (слика). Круг k са центром D и полупречником DA садржи и тачку B, а $\sphericalangle ADB = 80°$ је централни за тај круг. Како је $\sphericalangle ACB = 40°$ (половина централног угла), он је периферијски за исти круг k. Одавде следи да круг k садржи и тачку C, па је $BD = CD$. Уведимо ознаку $\sphericalangle BDC = x$. Тада у једнакокраком троуглу BDC имамо углове x, $x+30°$, $x+30°$, па је $x = 40°$ и $\sphericalangle DBC = x+30° = 70°$.

505. После повлачења свих дужи које се могу повући дати конвексан четвороугао $ABCD$ подељен је на известан број троуглова. Збир углова свих тих троуглова једнак је $1996 \cdot 360° + 360°$, јер је збир углова са теменом у свакој од 1996 тачака унутар четвороугла једнак 360°, а збир углова четвороугла је такође 360°. Зато је број добијених троуглова једнак

$$\frac{1996 \cdot 360° + 360°}{180°} = 3992 + 2 = 3994.$$

Добијених 3994 троуглова имају $3994 \cdot 3$ страница. Четири странице датог четвороугла $ABCD$ нисмо повлачили, а свака од осталих страница (повучених дужи) је заједничка за два троугла. Зато је број повучених непресецајућих дужи једнак

$$\frac{3994 \cdot 3 - 4}{2} = 1997 \cdot 3 - 2 = 5991 - 2 = 5989.$$

1997. година

506. (а) 1076; (б) 9986.

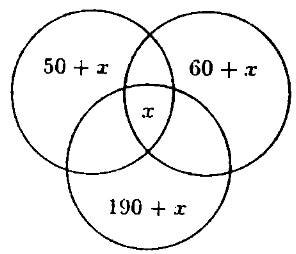
507. (а) $(x + 40) + (y + 13) = (x + y) + 53 = 97 + 53 = 150$.

(б) $1997 - x - y = 1997 - (x + y) = 1997 - 97 = 1900$.

508. Ако је мањи од њих једнак x, онда је већи једнак $4x$. Тада је $4x + x = 5x = 85$, а $x = 17$. Дакле, тражени бројеви су 17 и 68.

509. Када је сасвим одлетело 7 врабаца на гранама је остало $25 - 7 = 18$ врабаца. Како је на првој грани било два пута више него на другој, то је на првој било 12, а на другој 6 врабаца. Када на прву грану вратимо 5 врабаца, то значи да је у почетној позицијина првој грани било $12+5 = 17$, а на другој $25 - 17 = 8$ врабаца.

510. На слици има 25 дужи, 6 квадрата и 6 правоугаоника који нису квадрати.



Слика уз задатак 511

511. Нека x ученика воли све три врсте воћа. Тада оних који воле: само јабуке и мандарине има $120-x$, само јабуке $240-70-(120-x) = 50+x$; само мандарине и банане $50 - x$, а само мандарине $360 - 50 - (120 - x) = 190 + x$ (слика). Тада је $50+x+120-x+190+x+180+40 = 600$ или $580+x = 600$. Одговор је $x = 20$.

512. Како је $225 = 3\cdot3\cdot5\cdot5$ и $105 = 3\cdot5\cdot7$, то су могуће следеће комбинације:

1) 3 групе по 75 дечака и 35 лопти на сваку групу;
2) 5 група по 45 дечака и 21 лопта на сваку групу;
3) 15 група по 15 дечака и 7 лопти на сваку групу.

513. Како је $90° - \alpha + 180° - \alpha = 4\alpha$, то је $270° = 6\alpha$. Дакле, $\alpha = 270° : 6 = 45°$.

514. Како је $\frac{1}{4} = \frac{499}{4\cdot 499} = \frac{499}{1996} > \frac{499}{1997}$, то је $\frac{1}{4} > \frac{499}{1997}$.

515. Решење је дато на слици.

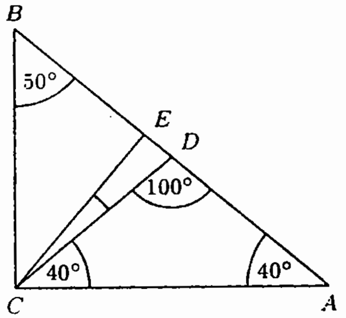
19	12	17
14	16	18
15	20	13

516. Како је $\frac{25}{99} > \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{499}{4\cdot 499} = \frac{499}{1996} > \frac{499}{1997}$, то је $\frac{25}{99} > \frac{499}{1997}$.

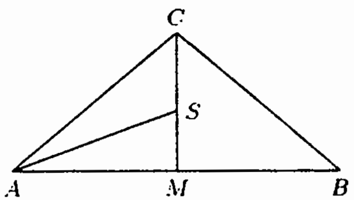
517. Трактор је првог дана узорао $\frac{3}{16}$ њиве, а другог дана $\frac{3}{16}\cdot\frac{12}{5} = \frac{9}{20}$ њиве, што значи да је првог и другог дана узорао укупно $\frac{3}{16} + \frac{9}{20} = \frac{15+36}{80} = \frac{51}{80}$ њиве. Како преостала површина представља $1 - \frac{51}{80} = \frac{29}{80}$ њиве и износи $87\,ha$, то је $\frac{1}{80}$ њиве једнака $87 : 29 = 3\,ha$. Дакле, цела њива има површину $80\cdot 3 = 240\,ha$.

518. Како је $|x-1| \le 3$, то је $-3 \le x - 1 \le 3$. Према томе следи да је $-3+1 \le x \le 3+1$, па је $-2 \le x \le 4$. Тражени цели бројеви су: -2, -1, 0, 1, 2, 3 и 4.

519. Нека је D средиште хипотенузе AB и E подножје висине из темена C правоуглог троугла ABC (слика). Уочимо најпре да је $\sphericalangle CDA = 10^\circ + 90^\circ = 100^\circ$ као спољашњи угао троугла CDE. Како је $CD = AD$, то је $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = \sphericalangle BAC = 40^\circ$. Према томе $\sphericalangle ABC = 50^\circ$.



Слика уз задатак 519



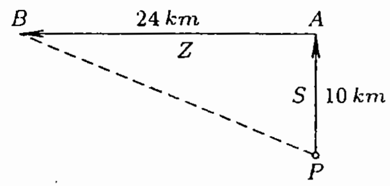
Слика уз задатак 520

520. Како је $\sphericalangle ASC = 110^\circ$, то је $\sphericalangle ASM = 70^\circ$, а $\sphericalangle SAM = 20^\circ$. Тада је $\sphericalangle MAC = 2\cdot\sphericalangle BAC$ и угао при врху, $\sphericalangle ACB$, је 100°. Дакле, основица AB је већа од крака BC, јер је и $\sphericalangle ACB = 100^\circ$ већи од $\sphericalangle CAB = 40^\circ$.

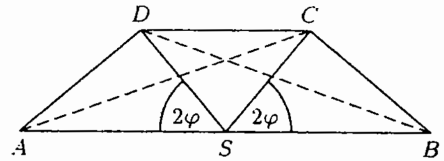
521. То је број $\frac{2}{3}\cdot 0.4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5} = 0.2$.

522. Како је $79^{499} < 81^{499} = (3^4)^{499} = 3^{1996} < 3^{1997}$, то је $79^{499} < 3^{1997}$.

523. Брод је у кретању на север прешао $30\cdot\frac{1}{3} = 10\,km$, а у кретању на запад $48\cdot 0.5 = 24\,km$ (слика). После 50 минута брод је од пристаништа био удаљен $d = \sqrt{10^2+24^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26\,km$.



Слика уз задатак 523



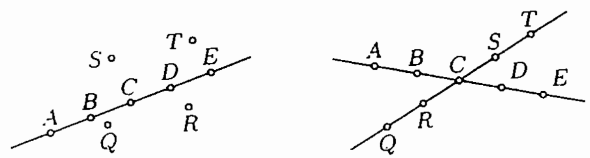
Слика уз задатак 524

524. Како су углови $\sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle BDA$ прави, то је средиште S дужи AB центар кружнице којој припадају темена C и D (слика). Тада је и $AS = BS = CS = DS$, што значи да су троуглови ASD, DSC и CSB једнакокраки. Како је $\sphericalangle CDS = \sphericalangle DCS = 2\varphi$, то је и $\sphericalangle ASD = \sphericalangle BSC = 2\varphi$. Тада је и $\sphericalangle CBA = \sphericalangle DAB = 90^\circ - \varphi$. Како су углови на основици једнаки, то је доказ завршен.

525. Вредност израза $A = x+1+\sqrt{x^2} = x+1+|x|$. Како је $x = \sqrt{2}-1997 < 0$, то је $A = x+1-x = 1$.

526. Нека је x брзина бициклисте. Очигледно је $x\cdot 12 = (x+10)\cdot 9$ или $12x = 9x+90$. Дакле, $3x = 90$ и $x = 30\,km/h$. Пређени пут је $12\cdot 30 = 360\,km$.

527. Како је $x^2+2x+100 = x^2+2x+1+99 = (x+1)^2+99 > 0$ и $x^2+200 > 0$, то једначина $|x^2+2x+100| - |x^2+200| = 3894$ постаје $x^2+2x+100-(x^2+200) = 2x-100 = 3894$ или $2x = 3994$, а $x = 1997$.

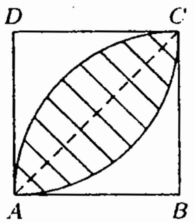


Слика уз задатак 528

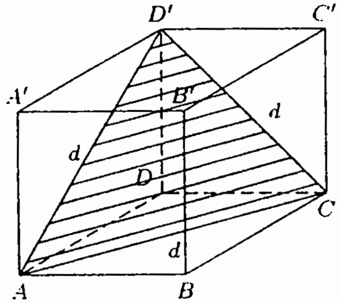
528. Највише правих је одређено ако су тачке Q, R, S, T неколинеарне међусобно, али и са тачкама на правој p, јер је тада број правих $1+6+5\cdot 4 = 27$ (слика).

Најмање правих има када су тачке Q, R, S, T колинеарне међусобно и са једном од тачака на правој p, јер је тада укупан број правих једнак $2+1\cdot 4=18$ правих.

529. Површина траженог дела једнака је двострукој разлици површина једне четвртине круга полупречника a и једнакокрако-правоуглог троугла катете a (слика), тј. $P=\frac{\pi a^2}{2}-a^2=a^2(\frac{\pi}{2}-1)\approx 0.57a^2$.



Слика уз задатак 529

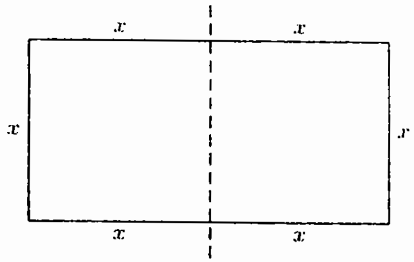


Слика уз задатак 530

530. Пресек ACD' коцке $ABCDA'B'C'D'$ је једнакостранични троугао чија је страница дијагонала стране коцке (слика). Значи, $18\sqrt{3}\,cm^2=\frac{d^2\sqrt{3}}{4}$. Одавде је $d=6\sqrt{2}\,cm$. Како је $d=a\sqrt{2}=6\sqrt{2}\,cm$, то је $a=6\,cm$. Дакле, површина коцке је $P=216\,cm^2$, а запремина је $V=216\,cm^3$.

531. Ако је трећина посла вредела као лопта и 10 динара, онда је цео посао вредео три пута више, дакле 30 динара и 3 лопте. Како је 30 динара и три лопте једнако са 130 динара и једном лоптом, јасно је да 2 лопте коштају 100 динара, а једна лопта 50 динара.

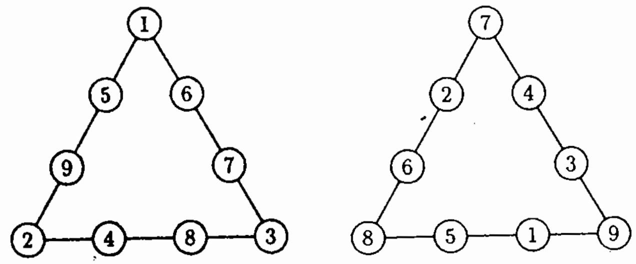
532. Ако је $a+b=10$, онда је $1996a+1997b=1996a+1996b+b=1996(a+b)+b=1996\cdot 10+b=19960+b$. Израз има најмању вредност ако је $b=1$ и она износи 19961, а највећу ако је $b=9$ и она износи 19969.



Слика уз задатак 533

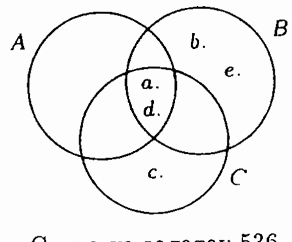
533. Како права дати правоугаоник дели на два квадрата, онда је већа страница правоугаоника два пута већа од странице квадрата, односно мање странице правоугаоника, па је $6x=60$, а $x=10\,cm$ (слика). Дакле, обим једног од добијених квадрата је $4\cdot 10=40\,cm$.

534. Нека од могућих решења дата су на сликама.



Слика уз задатак 534

535. Посматрајмо број $1*1$. Без обзира на цифру $*$, он се једнако чита и са лева у десно и са десна у лево. Таквих бројева има 10, јер $*$ може бити било која цифра од десет цифара $(0,1,2,\cdots 8,9)$. Како уместо јединице може стајати било која цифра изузев нуле, то је укупно $10\cdot 9=90$ троцифрених бројева који се једнако читају и с лева на десно и с десна на лево.



Слика уз задатак 536

536. Због $A\backslash C=\emptyset$ је $A\subset C$, одакле је $A\cup C=C$. Стога је $A\cup B\cup C=B\cup C$, па како је $B\setminus C=\{b,e\}$, то је $C=\{a,c,d\}$. Један од могућих Венових дијаграма приказан је на слици. Нацртај и остале могућности.

537. Очигледно је да је Бошку остало $\frac{5}{7}$ суме коју је имао, а Сави $\frac{5}{9}$ суме којом је располагао. Како су те суме једнаке, то значи да је $\frac{1}{7}$ Бошкове суме једнака са $\frac{1}{9}$ Савине суме, то јест да се њихове суме односе као $7:9$. То значи да један део износи $80 : (7 + 9) = 80 : 16 = 5$. Према томе, Бошко је имао $7 \cdot 5 = 35$, а Сава $9 \cdot 5 = 45$ динара.

538. Да би број $M = \overline{a1997b}$ био дељив са 45 он мора бити дељив са 5 и са 9. Ако је дељив са 5 последња цифра му мора бити 5 или 0, па се дакле ради о бројевима $\overline{a19975}$ или $\overline{a19970}$. Ако је дељив са 9 и збир цифара му мора бити дељив са 9, па се ради о бројевима 519975 или 119790.

539. Ако је угао α мањи од свог комплементног угла за $1997'$, он је од свог суплементног угла мањи за $90° + 1997' = 90° + 33°17' = 123°17'$.

540. Једно од могућих решења је: Прво напунимо суд од $5\,l$, па из њега напунимо суд од $3\,l$. У суду од 5 литара ће остати 2 литра воде. Проспемо воду из суда од $3\,l$ и у њега преспемо $2\,l$ воде из великог суда. Сада напунимо суд од $5\,l$ и из њега допунимо суд од $3\,l$. Како у њега може да стане само још $1\,l$ воде, то ће у суду од $5\,l$ остати тачно 4 литра течности.

541. Пођемо од 15 бомбона и вратимо 5 које је Драган појео другог дана. Дакле, 20 бомбона износе $\frac{4}{5}$ броја бомбона које су биле на располагању тог дана, па је другог дана било укупно $(20 : 4) \cdot 5 = 25$ бомбона. Вратимо и 3 које су поједене првог дана и добијемо 28, што је $\frac{4}{5}$ од укупног броја бомбона. Према томе, Драган је имао $(28 : 4) \cdot 5 = 35$ бомбона.

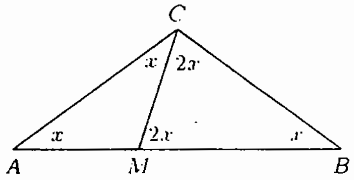
542. Да би производ бројева $\overline{13a}$ и $\overline{26b1}$ био дељив са 15 мора бар један од њих бити дељив са 5 и исто тако бар један од њих дељив са 3. Како је последња цифра другог броја 1, а то значи да он није дељив са 5, па то мора бити први, тј. $a = 0$ или $a = 5$.

Ако је $a = 5$, онда је број 135 дељив са 15, па цифра b може бити било која од десет цифара, тј. тражени бројеви су 2601, 2611, 2621, 2631, 2641, 2651, 2661, 2671, 2681, 2691.

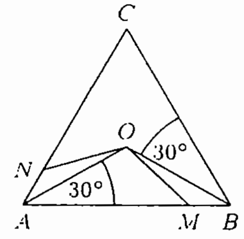
Ако је $a = 0$, онда је број $\overline{26b1}$ дељив са 3, па су тражени бројеви 2601, 2631, 2661 и 2691.

Дакле, укупно има 14 решења.

543. Нека је оштар угао $x = \sphericalangle BAC = \sphericalangle CBA$ (слика). Један од углова $\sphericalangle AMC$ и $\sphericalangle BMC$ није оштар, рецимо $\sphericalangle AMC$. Тада је $\sphericalangle ACM = x$ и $\sphericalangle BMC = 2x$, а $\sphericalangle BCM$ може бити x или $2x$. Ако је $\sphericalangle BCM = x$, онда је $4x = 180°$, тј. $x = 45°$, а троугао ABC је тада једнакокрако-правоугли. Друга могућност је да је $\sphericalangle BCM = 2x$, па је тада $5x = 180°$ и $x = 36°$. Тада је $\sphericalangle ACB = 108°$.



Слика уз задатак 543



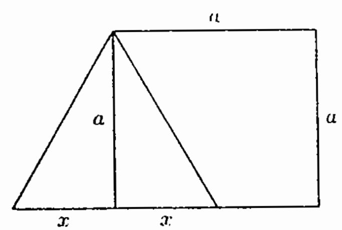
Слика уз задатак 544

544. Како је $AM + AN = AB$, то је $AN = AB - AM = BM$. Одавде следи да су троуглови AON и BOM подударни ($AN = BM$, $\sphericalangle NAO = \sphericalangle MBO = 30°$ и $AO = BO$) (слика). Из подударности су и треће странице троуглова подударне, тј. $OM = ON$, али је и $\sphericalangle AON = \sphericalangle BOM$. Како је $\sphericalangle MON = \sphericalangle MOA + \sphericalangle AON = \sphericalangle AOM + \sphericalangle MOB = \sphericalangle AOB = 120°$, то је $\sphericalangle MON = 120°$.

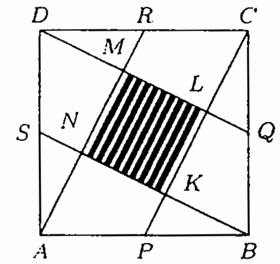
545. Не могу, јер када би сви добили минималан и различит број кликера онда би први добио 0, други 1, трећи 2, ..., петнаести дечак 14 кликера. Да би кликере тако поделили треба им најмање $0+1+2+\cdots+13+14 = 7 \cdot 15 = 105$ кликера, а на располагању је свега 100 кликера, што значи да ће бар двојица добити једнак број кликера.

546. Ако је $x^2 + 5y = 1997$, онда је $x^2 = 1997 - 5y$. Како се број $5y$ увек завршава цифром 0 или 5, то ће се број x^2 завршавати цифром $7 - 0 = 7$ или $7 - 5 = 2$. Како се број x^2 увек завршава цифрама $0, 1, 4, 5, 6, 9$ и никада се не завршава цифрама 2, 3, 7, 8, то не постоје природни бројеви x и y који испуњавају дату релацију.

547. Из једнакости $8^{1996} \cdot 8^{1997} = (((8^n)^{11})^{11})^{11}$ следи $8^{3993} = 8^{n \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11} = 8^{1331n}$. Дакле, $1331n = 3993$, тј. $n = 3$.



Слика уз задатак 548



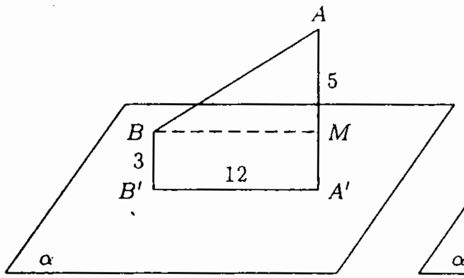
Слика уз задатак 549

548. Површина датог троугла је $P = 2x \cdot \frac{x}{2} = x^2$ (слика). Дакле, површина траженог квадрата је $a^2 = 3x^2$ или $a = x\sqrt{3}$. Према томе, a је висина једнакостраничног троугла чија је страница дуж $2x$.

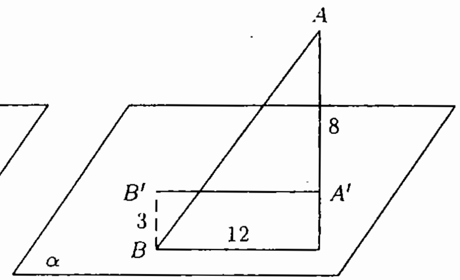
549. Нека је површина траженог четвороугла (лако се доказује да је он квадрат) једнака P. Површина датог квадрата је $100\,cm^2$, а површина троугла ABS је $25\,cm^2$ (слика). Ако је површина троугла PBK једнака x, онда је површина троугла ABN једнака $4x$ (јер средња линија увек дели троугао на два дела чије се површине односе као 1 : 3 - докажи), а површина троугла ABS је $5x$. Дакле, $x = 25 : 5 = 5\,cm^2$. Тада је $P = 100 - 4 \cdot 4x = 100 - 16x = 100 - 80 = 20\,cm^2$.

550. Када би сви добили минималан и различит број кликера, онда би први добио 0, други 1, трећи $2, \cdots$, шездесетчетврти дечак 63 кликера. Да би кликере тако поделили треба им најмање $0+1+2+\cdots+62+63 = (0+63)+(1+62)+\cdots+(31+32) = 32 \cdot 63 = 2016$ кликера, а на располагању је свега 1997 кликера, што значи да ће бар двојица добити једнак број кликера.

551. Решавањем дате пропорције добија се да је $4ad = 4bc$, одакле је очигледно $a : b = c : d$.



Слика (а) уз задатак 552



Слика (б) уз задатак 552

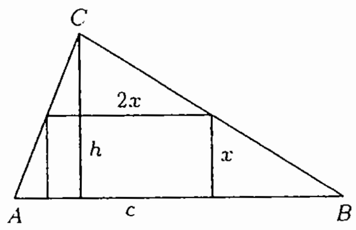
552. Нека су тачке A и B са исте стране равни α (слика (а)). Како је $AM = AA' - MA' = AA' - BB' = 8 - 3 = 5\,cm$ и како је $BM = A'B' = 12\,cm$, то је $AB^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2$ и $AB = 13\,cm$.

Постоји и друго решење, ако су тачке A и B са разних страна равни α (слика (б)). У том случају је тражена дуж $AB = \sqrt{265}\,cm$.

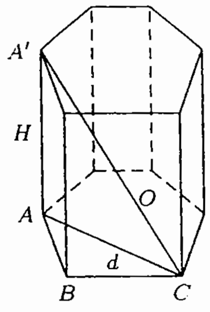
553. Нека је мања страница правоугаоника једнака x, а већа $2x$ (слика). Ако је већа страница на основици AB, тада су троуглови ABC и PQC слични, па је $c : 2x = h : (h - x)$ или $60 : 2x = 30 : (30 - x)$. Одавде је $x = 15\,cm$, па је површина правоугаоника $P = x \cdot 2x = 15 \cdot 30 = 450\,cm^2$. Постоји и друго решење када је мања страница x правоугаоника на основици AB. Тада је површина $P = 288\,cm^2$.

554. Очигледно је $-997 \leq |x| - 1 \leq 997$ или $-996 \leq |x| \leq 998$. Како је $|x| \geq 0$, то је $|x| \leq 998$, па је $-998 \leq x \leq 998$. Према томе, целобројна

решења дате неједначине су: $-998, -999, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 997, 998$ и има их тачно $2 \cdot 998 + 1 = 1997$.



Слика уз задатак 553



Слика уз задатак 555

555. Ако је краћа дијагонала призме $8\sqrt{6}\,cm$ и ако она са основом заклапа угао од $45°$, онда је троугао ACA' једнакокрако-правоугли, па је мања дијагонала основе $d = H = \dfrac{8\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{3}\,cm$ (слика). Из $d = a\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\,cm$ следи $a = 8\,cm$. Запремина призме је $V = 6a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}H = 2304\,cm^3$.

556. Како је 1997 минута једнако 33 сата и 17 минута, то је 9 сати и 15 минута + 33 сата и 17 минута = 42 сата и 32 минута = 24 сата + 18 сати и 32 минута, па ће кроз 1997 минута бити 18 сати и 32 минута 6-ог априла 1997. године.

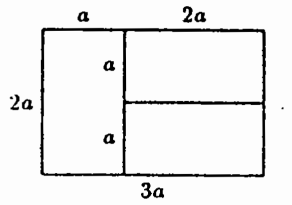
557. Нека Мира има x динара. Тада Вера има $1500 - x$ динара. Ако Вера и Љубинка имају 2500 динара, онда Љубинка има $2500 - (1500 - x) = 1000 + x$ динара. Слично, Љубинка и Борка имају 3500 динара, што значи да Борка има $3500 - (1000 + x) = 2500 - x$ динара. Како Борка има 1500 динара више од Мире, то је $2500 - x = 1500 + x$, тј. $x + x = 2500 - 1500$ или $2x = 1000$, а $x = 500$. Дакле, Мира има 500 динара, Вера има 1000 динара, Љубинка има 1500 динара, а Борка има 2000 динара.

558. Постоје четири могућа решења: $1000 - 4 = 996$, $1001 - 4 = 997$, $1002 - 4 = 998$ и $1003 - 4 = 999$.

559. Никола је првог дана добио један, другог дана три кликера, трећег дана пет кликера, ..., а тридесетог дана 59 кликера. Према томе, Никола је за тих 30 дана добио $1+3+5+\cdots+55+57+59 = (1+59)+(3+57)+(5+55)+\cdots = 15 \cdot 60 = 900$ кликера.

560. Ако мања страница малог правоугаоника има дужину a, са слике је јасно да је онда већа страница малог правоугаоника $2a$. Дакле, обим сваког од малих правоугаоника је $O = a+2a+a+2a = 6a = 60\,cm$. Тада је страница

$a = 10\,cm$. Обим великог правоугаоника је $S = 3a + 2a + 3a + 2a = 10a = 100\,cm$. Значи да је и обим квадрата $100\,cm$, па је његова страница $x = 100 : 4$ или $x = 25\,cm$, а површина квадрата је $P = x \cdot x = 25 \cdot 25 = 625\,cm^2$.



Слика уз задатак 560

561. Како је 1997 минута = 33 сата и 17 минута, то је од 5.-ог априла у 0 сати и 0 минута протекло 9 сати и 15 минута и треба се вратити уназад 24 сата и 2 минута (тј. 33 сата и 17 минута минус 9 сати и 15 минута). До 4.-ог априла у 0 сати и 0 минута протекло је још 24 сата и остала су још свега 2 минута. Дакле, пре 1997 минута је био 03. април 1997. и било је 23 сата и 58 минута.

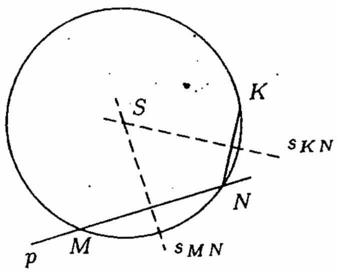
562. Наташа је имала $\frac{3}{7}$ јабука и $\frac{4}{7}$ крушака, дакле $\frac{1}{7}$ више крушака него јабука. Према томе, 4 добијене јабуке и 2 поједене крушке, укупно 6 воћки чине ту $\frac{1}{7}$. Дакле, Наташа је имала 42 воћке од којих су 18 биле јабуке, а 24 крушке.

563. Збир бројева који нису дељиви ни са 4 ни са 5, а мањи су од 20 је $1+2+3+6+7+9+11+13+14+17+18+19 = 6 \cdot 20 = 120$. Збир тражених бројева између 20 и 40 је $21+22+23+26+27+29+31+33+34+37+38+39 = (20+1)+(20+2)+(20+3)+\cdot+(20+17)+(20+18)+(20+19) = 12 \cdot 20+120 = 240 + 120$; збир бројева између 40 и 60 је $12 \cdot 40 + 120$; збир бројева између 60 и 80 је $12 \cdot 60+120$, а збир бројева између 80 и 100 је $12 \cdot 80+120$. Укупан збир је $120+240+120+480+120+720+960+120 = 5 \cdot 120+1200+1200 = 600 + 2400 = 3000$.

564. Нека је центар тражене кружнице S (слика). Тада је $SM = SN = SK$. Дакле, тачка S је једнако удаљена од све три тачке, па је S пресек симетрала дужи MN, NK, KM (довољне су и две симетрале).

565. Браћа имају укупно 15 ћупова и седам и по порција меда. Сваки брат треба да добије по 5 ћупова и по две и по порције меда. Дакле, први и други ће добити по два пуна ћупа, по два празна ћупа и по један ћуп напуњен до пола, а трећи брат ће добити један пун, један празан ћуп и три ћупа до пола напуњена медом.

Задатак се може решити и пресипањем једног ћупа са пола меда у други исти



Слика уз задатак 564

такав, тако да се добије $5+1 = 6$ пуних, $5-2 = 3$ по пола и $5+1 = 6$ празних ћупова меда. Сада сваки од браће добије по 2 пуна, 1 од пола и 2 празна ћупа.

566. Нека је нулто (почетно) стање у коме посматрамо казаљке поноћ. У 9 сати велика казаљка је у истом положају, а мала је померена за $270°$ (у правцу кретања казаљки на сату). У једном минуту велика казаљка прелази угао од $360° : 60 = 6°$, а мала угао од $(360° : 12) : 60 = 30° : 60 = 0.5°$. У девет сати и 16 минута велика казаљка је у односу на почетно стање прешла пут од $16 \cdot 6° = 96°$, а мала $16 \cdot 0.5° = 8°$. Дакле, угао између мале и велике казаљке је $(270° + 8°) - 96° = 182°$.

567. Очигледно је $1 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{1996}{1997}$, а одавде је

$$\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1996}{1997} - 1 = -\frac{1}{1997}.$$

Значи, $1 + \frac{1}{x} = -1997$, па је $\frac{1}{x} = -1997 - 1 = -1998$, тј. $x = -\frac{1}{1998}$.

568. Именилац разломка је

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdots 6 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 \cdot 3,$$

где у производу има по 100 двојки и тројки. Одредимо колико двојки и тројки има у бројиоцу. Од 100 првих природних бројева $100 : 2 = 50$ је дељиво са 2; $100 : 4 = 25$ је дељиво са 4; $100 : 8 = 12(4)$ је дељиво са 8; $100 : 16 = 6(4)$ је дељиво са 16; $100 : 32 = 3(4)$ је дељиво са 32 и $100 : 64 = 1(36)$ је дељиво са 64. Дакле, у бројиоцу се двојка јавља као чинилац $50+25+12+6+3+1 = 97$ пута. Слично, од 100 првих природних бројева $100 : 3 = 33(1)$ је дељиво са 3; $100 : 9 = 11(1)$ је дељиво са 9; $100 : 27 = 3(19)$ је дељиво са 27 и $100 : 81 = 1(19)$ је дељиво са 81. Према томе, тројка се у бројиоцу јавља као чинилац $33+11+3+1=48$ пута. Значи, дати разломак садржи у бројиоцу 97 двојки и 48 тројки, а у имениоцу тачно 100 двојки и 100 тројки и има изглед

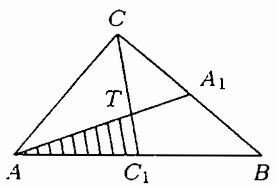
$$\frac{2\cdot 2\cdots 2\cdot 3\cdot 3\cdots 3\cdot M}{2\cdot 2\cdots 2\cdot 3\cdot 3\cdots 3}.$$

После свих могућих скраћивања разломак ће имати облик

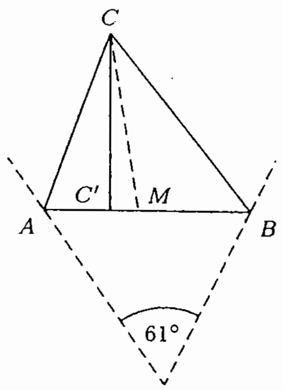
$$\frac{M}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdots 3},$$

где у бројиоцу неће бити ни двојки ни тројки, а у имениоцу ће остати $100-97=3$ двојке и $100-48=52$ тројке, па ће именилац бити $2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdots3\cdot3$, тј. $2^3\cdot 3^{52}$.

569. Нека је T тежиште траженог правоуглог троугла, а A_1 и C_1 редом средишта страница BC и AB (слика). У троуглу ATC_1 познате су све три странице: $AC_1=\frac{AB}{2}=CC_1=3\,cm$; $AT=\frac{2}{3}AA_1=3\,cm$ и $C_1T=\frac{1}{3}CC_1=1\,cm$. Када се конструише троугао ATC_1, онда се лако добијају темена B и C, јер је $BC_1=AC_1=CC_1=3\,cm$.



Слика уз задатак 569

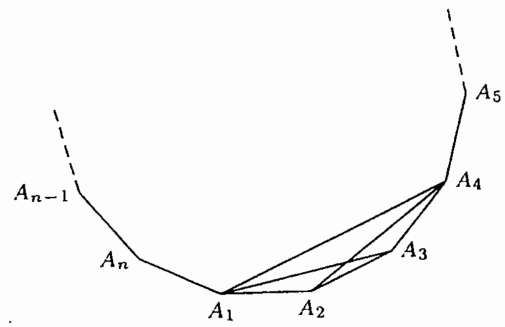


Слика уз задатак 570

570. Нека се симетрале спољашњих углова троугла код темена A и B секу у тачки K (слика). Тада је $\sphericalangle BAK=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle ABK=90^\circ-\frac{\beta}{2}$. Како је $\sphericalangle AKB=61^\circ$, то је $90^\circ-\frac{\alpha}{2}+90^\circ-\frac{\beta}{2}+61^\circ=180^\circ$, одакле је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=61^\circ$, тј. $\alpha+\beta=122^\circ$. Тада је $\gamma=180^\circ-122^\circ=58^\circ$. Значи да је $\sphericalangle ACM=\frac{\gamma}{2}=29^\circ$, а $\sphericalangle ACC'=29^\circ-9^\circ=20^\circ$. Тада је јасно $\sphericalangle CAC'=\alpha=90^\circ-20^\circ=70^\circ$ и $\sphericalangle ABC=\beta=180^\circ-(70^\circ+58^\circ)=52^\circ$.

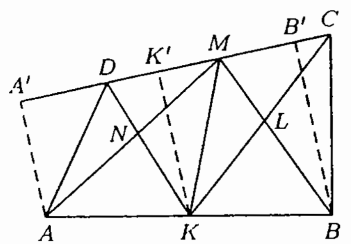
571. Нека је угао многоугла 2φ (слика). Троуглови $A_1A_2A_3$ и $A_2A_3A_4$ су подударни (доказ). Из подударности је $A_1A_3=A_2A_4$. Слично и троуглови $A_1A_2A_4$ и $A_4A_3A_1$ су подударни. Из подударности је $\sphericalangle A_1A_4A_2=$

$\sphericalangle A_3A_1A_4=6^\circ$. Како је $\sphericalangle A_2A_1A_3=\sphericalangle A_2A_4A_3=90^\circ-\varphi$, то је збир углова у четвороуглу $A_1A_2A_3A_4$ једнак $(6^\circ+90^\circ-\varphi)+2\varphi+2\varphi+(6^\circ+90^\circ-\varphi)=360^\circ$. Дакле, $192^\circ+2\varphi=360^\circ$, а одавде је $2\varphi=168^\circ$. Спољашњи угао је $12^\circ=\frac{360^\circ}{n}$, одакле је $n=30$. Многоугао који има 30 страница има 405 дијагонала.

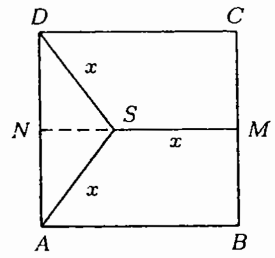


Слика уз задатак 571

572. Нека су A', K' и B' редом подножја нормала из тачака A, K и B на правој $C'D$ (слика). Тада је $AA'\parallel BB'\parallel KK'$, па је због $AK=BK$ дуж KK' средња линија трапеза $ABB'A'$ и $AA'+BB'=2\cdot KK'$.



Слика уз задатак 572



Слика уз задатак 573

Тада је $P_{\triangle AND}=P_{\triangle AMD}-P_{\triangle MDN}=MD\cdot\frac{AA'}{2}-P_{\triangle MDN}$. Слично је $P_{\triangle BCL}=P_{\triangle BCM}-P_{\triangle MCL}=\frac{1}{2}MC\cdot BB'-P_{\triangle MCL}$. Дакле, $P_{\triangle BCL}+P_{\triangle AND}=\frac{1}{2}MD\cdot AA'+\frac{1}{2}MC\cdot BB'-P_{\triangle MDN}-P_{\triangle MCL}$.

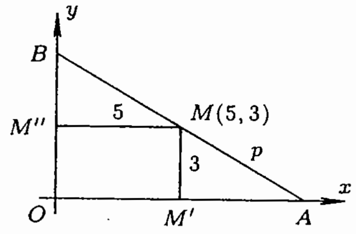
Како је $MC=MD$, то је $P_{\triangle BCL}+P_{\triangle AND}=\frac{1}{2}MC\cdot(AA'+BB')-P_{\triangle MDN}-P_{\triangle MCL}=MC\cdot KK'-P_{\triangle MDN}-P_{\triangle MCL}=\frac{1}{2}(MC+MD)\cdot KK'-P_{\triangle MDN}-$

$P_{\triangle MCL} = \frac{1}{2}MC \cdot KK' + \frac{1}{2}MD \cdot KK' - P_{\triangle MDN} - P_{\triangle MCL} = P_{\triangle CMK} - P_{\triangle MCL} + P_{\triangle MDK} - P_{\triangle MDN} = P_{\triangle KLM} + P_{\triangle KMN} = P_{KLMN}$.

573. Нека је $SM = SA = SD = x$ и нека је N средиште странице AD (слика). Тада је $SN = 40 - x$. Из правоуглог троугла ASN је, по Питагориној теореми, $x^2 = (40-x)^2 + (20)^2$. Сређивањем добијене једнакости добија се да је $x^2 = 1600 - 80x + x^2 + 400$. Одавде је $80x = 2000$ и $x = 25\,cm$. Обим трапеза $ABMS$ је тада $O = 110\,cm$, а површина $P = 650\,cm^2$.

574. Трансформишимо дати израз на следећи начин: $11n^3 + n = 12n^3 - n^3 + n = 12n^3 - n(n^2-1) = 12n^3 - (n-1)n(n+1)$. Како је $(n-1)\cdot n \cdot (n+1)$ производ три узастопна природна броја, то је бар један од њих увек дељив са 2, а један са 3, па је њихов производ дељив са 6. Израз $12n^3$ је дељив са 6, па је и разлика дељива са 6. Дакле, израз $11n^3 + n$ је дељив са 6.

575. За прву цифру имамо два кандидата (1 и 2), за другу и све остале цифре по 3 кандидата (0, 1 и 2). Дакле, укупан број могућих 1997-цифрених бројева је $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3 = 2 \cdot 3^{1996}$.



Слика уз задатак 576

576. Нека су нормалне пројекције тачке M на координатне осе Ox и Oy редом тачке M' и M'' (слика). Тада су троуглови AMM' и BMM'' слични. Из сличности троуглова је $AM' : MM' = MM'' : BM''$ или $(a-5) : 3 = 5 : (b-3)$. Одавде је $(a-5)(b-3) = 15$, па у обзир долазе само следећи случајеви:

$a - 5 = 1$ и $b - 3 = 15$, тј. $a = 6$, $b = 18$;

$a - 5 = 3$ и $b - 3 = 5$, тј. $a = 8$, $b = 8$;

$a - 5 = 5$ и $b - 3 = 3$, тј. $a = 10$, $b = 6$;

$a - 5 = 15$ и $b - 3 = 1$, тј. $a = 20$, $b = 4$.

577. У једном минуту велика казаљка прелази угао од $360° : 60 = 6°$, а мала угао од $(360° : 12) : 60 = 30° : 60 = 0.5°$. Нека су у овом тренутку казаљке поклопљене и нека до следећег поклапања протекне време од x минута. За то време мала казаљка ће прећи угао од $0.5°x$. Велика казаљка до следећег поклапања пређе пут тачно за пун круг већи од пута који пређе мала казаљка,

па је $6°x = 0.5°x + 360°$, тј. $5.5°x = 360°$. Дакле, $x = 3600 : 55 = 720 : 11 = 65\frac{5}{11}$ минута.

578. Нека је $x = 1997 + y$. Тада је дата једначина еквивалентна са једначином у којој уместо x заменимо $1997 + y$, тј.

$$\frac{y+1997}{1997} + \frac{y+1997+1}{1998} = \frac{y+1997+2}{1999} + \frac{y+1997+3}{2000}.$$

Одавде следи да је

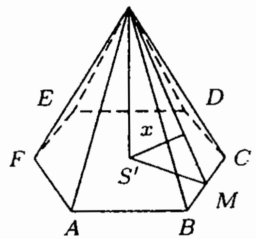
$$\frac{y}{1997} + 1 + \frac{y}{1998} + 1 = \frac{y}{1999} + 1 + \frac{y}{2000} + 1,$$

па је

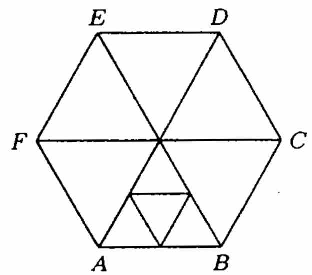
$$y\left(\frac{1}{1997} + \frac{1}{1998} - \frac{1}{1999} - \frac{1}{2000}\right) = 0.$$

Добијена једначина има јединствено решење $y = 0$, па је решење дате једначине $x = 1997 + y = 1997$.

579. Нека је $ABCDEFS$ дата пирамида, S' подножје висине пирамиде и M средиште основне ивице BC (слика). Нормално растојање подножја висине пирамиде од бочне стране пирамиде најбоље се уочава на нормалном пресеку пирамиде који садржи висину пирамиде и једну од њених бочних висина. У троуглу $SS'M$ је $SS' = H = a$, $S'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па је $SM = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Тражено растојање x израчунавамо из површине троугла $SS'M$, јер је $x \cdot \frac{a\sqrt{7}}{2} = a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Одавде је $x = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{7}}{2}} = a\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{21}\sqrt{\frac{3}{7}}$, па је $x = 3\,cm$.



Слика уз задатак 579



Слика уз задатак 580

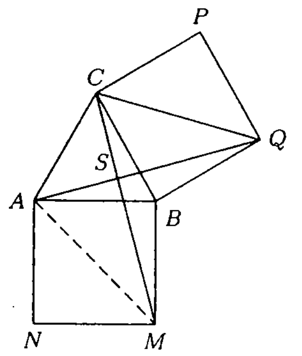
580. Правилни шестоугао прво поделимо на 6 једнакостраничних троуглова странице $2\,cm$, а затим сваки од 6 добијених троуглова поделимо средњим линијама на по 4 једнакостранична троугла странице $1\,cm$, који се међусобно не прекривају, а у потпуности прекривају шестоугао (слика).
Како имамо 51 тачку, а 24 троугла и како је $51 : 24 = 2(3)$, то на основу Дирихлеовог принципа постоји троугао унутар кога се налазе бар 3 дате тачке. Опет на основу Дирихлеовог принципа бар две од њих су обојене истом бојом. Како је растојање између двеју тачака унутар троугла сигурно мање од $1\,cm$, доказ је завршен.

581. Нека је количина јабука са којом се располаже x. Тада је укупан приход по предвиђеној цени $5x$. Укупан приход по редоследу продаје је

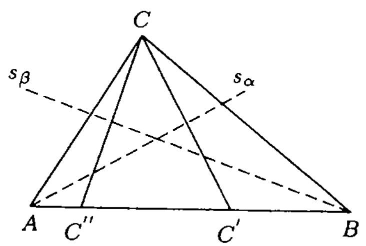
$$0.25 \cdot x \cdot 5 + 0.35 \cdot x \cdot 1.2 \cdot 5 + 0.4 \cdot x \cdot 0.9 \cdot 5 = 1.25x + 2.1x + 1.8x = 5.15x.$$

Дакле, $5.15x - 5x = 0.15x = 300$, па је $x = 300 : 0.15 = 30000 : 15 = 2000\,kg$.

582. Нека је производ првих 11 природних бројева $\overline{399a6bcd}$. Број $\overline{399a6bcd}$ је дељив са $2 \cdot 5 \cdot 10 = 100$, па су последње две цифре c и d нуле. Исто тако, број $\overline{399a6b00}$ је дељив са 9 и, како је збир цифара $3 + 9 + 9 + 6 + a + b = 27 + a + b$, то је и збир $a + b$ дељив са 9, што значи да је $a + b$ једнако 0, 9 или 18. Међутим, број $\overline{399a6b00}$ је дељив и са 11, а то значи да је $(3 + 9 + 6 + 0) - (9 + a + b + 0) = 9 - a - b$ дељиво са 11. Како $9 - 0 = 9$ и $9 - 18 = -9$ нису дељиви са 11, а $9 - 9 = 0$ јесте, значи да је $a + b = 9$. Даље, број $\overline{399a6b00}$ мора бити дељив са 8, па цифра b може бити само парна. Пошто је $\overline{399a6b00}$ дељив и са 7 и како је 399 дељиво са 7, то је од бројева 168, 366, 564, 762 само први дељив са 7, па је коначно решење 39916800.



Слика уз задатак 583



Слика уз задатак 584

583. Очигледно је $\sphericalangle MBC = \sphericalangle ABQ = 90° + 60° = 150°$ (слика). Како је $AB = BQ$ и $BM = BC$, то су троуглови ABQ и BCM једнакокраки па је $\sphericalangle BMC = \sphericalangle BCM = 15°$, $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle BQA = 15°$. Дакле, $\sphericalangle MCA = \sphericalangle QAC = 60° - 15° = 45°$. Према томе, $\sphericalangle ASC = 90°$, а то значи да је $AQ \perp CM$. У троуглу ASM је $\sphericalangle AMS = 45° - 15° = 30°$, па је $AM = 2 \cdot AS$. Како је $AM = CQ$ (као дијагонале подударних квадрата), то је и $CQ = 2 \cdot AS$.

584. Анализа: Посматрајмо троугао ABC (слика). Тачка C' осносиметрична са C у односу на s_α припада правој AB. Слично и тачка C'' осносиметрична са C у односу на s_β припада правој AB.

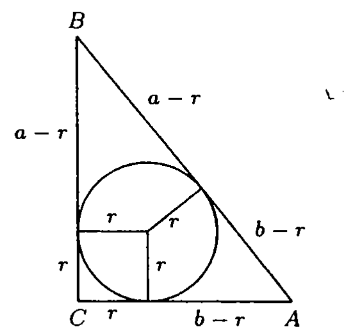
Коструkција: Конструишемо тачку C' осносиметричну са C у односу на s_α и тачку C'' осносиметричну са C у односу на s_β. Тачке C' и C'' одређују праву p, која у пресеку са правама s_α и s_β одређује темена A и B.

585. Дати правоугаоник има површину $45\,cm^2$. Нека осам од десет малих правоугаоника имају различите површине и нека оне имају минималне вредности $1\,cm^2$, $2\,cm^2$, $3\,cm^2$, $4\,cm^2$, $5\,cm^2$, $6\,cm^2$, $7\,cm^2$ и $8\,cm^2$. Збир свих тако дефинисаних површина је $36\,cm^2$. Дакле, преостала два правоугаоника имају збир површина $45 - 36 = 9\,cm^2$, што значи да се њихове површине крећу од $1\,cm^2$ до $8\,cm^2$, односно једнаке су некима од уочених правоугаоника. Зато бар два правоугаоника морају имати једнаке површине.

586. Како је

$$\begin{aligned}(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16 &= (4n^2-9)(4n^2-1)+16\\ &= 16n^4 - 4n^2 - 36n^2 + 9 + 16\\ &= 16n^4 - 40n^2 + 25 = (4n^2-5)^2,\end{aligned}$$

јасно је да је производ било која четири узастопна непарна природна броја увећан за 16 потпун квадрат. Дакле, $1991 \cdot 1993 \cdot 1995 \cdot 1997 + 16 = (4 \cdot 997^2 - 5)^2$, тј. дати број представља потпун квадрат природног броја.



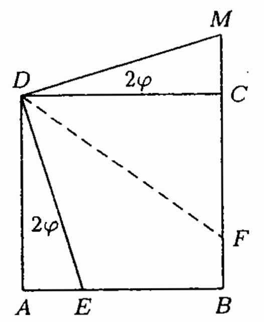
Слика уз задатак 587

587. Хипотенуза c правоуглог троугла једнака је $2R$, па је $R = 10\,cm$ (слика). Како је $r : R = 2 : 5$, то је $r = 4\,cm$. С друге стране је $c = a - r + b - r$, што значи да је $a + b = c + 2r = 28\,cm$. Одавде следи да је

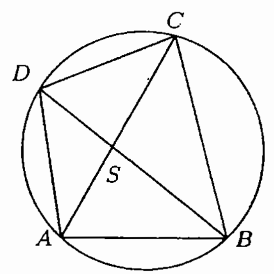
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 28^2 = 784.$$

Како је $a^2 + b^2 = c^2 = 400$, то значи да је $2ab = 784 - 400 = 384$. Дакле, површина троугла је $P = ab : 2 = 2ab : 4 = 96\,cm^2$. Обим тог троугла је $O = a + b + c = (a+b) + c = 28 + 20 = 48\,cm$.

588. На продужетку странице BC преко темена C изаберимо тачку M тако да је $CM = AE$ (слика). Тада су троуглови AED и CMD подударни ($AD = CD$, $\sphericalangle EAD = \sphericalangle DCM = 90°$ и $CM = AE$). Из подударности је $DE = DM$ и $\sphericalangle ADE = \sphericalangle CDM = 2\varphi$. Како је $\sphericalangle EDC = 90° - 2\varphi$, то је $\sphericalangle EDF = \sphericalangle CDF = 45° - \varphi$. Тада је $\sphericalangle DFM = 45° + \varphi$, а $\sphericalangle FDM = 45° - \varphi + 2\varphi = 45° + \varphi$, па је троугао MDF једнакокрак, тј. $MD = MF$. Како је $DE = MD = MF = FC + CM = FC + AE$, доказ је завршен.



Слика уз задатак 588



Слика уз задатак 589

589. Очигледно је $\sphericalangle BSC = \sphericalangle ASD = 100°$ (слика). Нека је тражени $\sphericalangle ABD = x$. Тада је и $\sphericalangle ACD = x$, као периферијски угао над истом тетивом AD. Одавде следи да је $\sphericalangle SBC = 76° - x$ и $\sphericalangle SCB = 82° - x$. Како је из троугла BSC, $100° + 76° - x + 82° - x = 180°$, то је $2x = 258° - 180° = 78°$, па је $x = \sphericalangle ABD = 39°$.

590. Сви бројеви мањи од 1000 могу се написати у облику $\overline{abc}$, где су a, b, c цифре од 0 до 9 (постављањем нула на месту стотина и месту десетица добијамо једноцифрене, односно двоцифрене бројеве). Сваком броју са цифрама a, b, c придружимо одговарајући број чије су цифре $9-a$, $9-b$, $9-c$. Ако је збир цифара броја abc, тј. $a + b + c = 13$, онда је збир цифара броја чије су цифре $9-a$, $9-b$, $9-c$ једнак $27 - (a+b+c) = 27 - 13 = 14$. Како сваки број са цифрама a, b, c има свој одговарајући број чије су цифре $9-a$, $9-b$, $9-c$, то бројева мањих од 1000 са збиром цифара 13 има исто толико колико и бројева са збиром цифара 14.

591. Нека је x обим малог тракторског точка, а y обим великог точка. Тада је $\frac{180}{x} - \frac{180}{y} = 10$ и $\frac{180}{x+6} - \frac{180}{y-6} = 4$. Сређивањем добијених једначина следи да је $18(y-x) = xy$ и $39(y-x) = xy + 504$ или $39(y-x) = 18(y-x) + 504$. Дакле, $21(y-x) = 504$, тј. $y - x = 24$. Значи да је $y = x + 24$ и $xy = 18 \cdot 24$. Следи да је $xy = x(x+24) = 18 \cdot 24 = 3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 = 12 \cdot 36 = 12 \cdot (12 + 24)$, па је $x = 12$. Дакле, обим малог точка је $12\,dm$, а обим великог точка је $y = 12 + 24 = 36\,dm$.

592. Да би $n^2 + 2n + 1997$ био потпун квадрат мора бити $n^2 + 2n + 1997 = m^2$ (m је неки природан број). Следи да је $n^2 + 2n + 1 + 1996 = m^2$ или $(n+1)^2 + 1996 = m^2$. Одавде је $m^2 - (n+1)^2 = (m+n+1)(m-n-1) = 1996$. Како је $1996 = 2 \cdot 2 \cdot 499$ и како су бројеви $m+n+1$ и $m-n-1$ исте парности могућ је само један случај, а то је $m + n + 1 = 998$ и $m - n - 1 = 2$. Дакле $2m = 1000$ или $m = 500$. Тада је $n = 497$.

593. Нека је дат троцифрени број $\overline{abc}$. Тада је тражени количник

$$K = \frac{100a + 10b + c}{a+b+c} = 1 + \frac{99a + 9b}{a+b+c}.$$

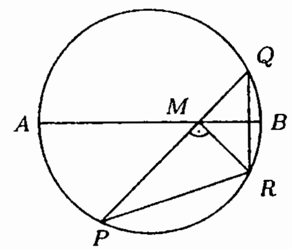
Добијени количник је највећи када је именилац што мањи, а то је када је $c = 0$. Дакле,

$$K = 1 + \frac{99a + 9b}{a+b} = 1 + 9 + \frac{90a}{a+b} = 10 + \frac{90a}{a+b}.$$

И новодобијени количник је највећи када је именилац разломка најмањи, а то је за $b = 0$. Одавде следи да је највећа могућа вредност количника

$$K = 10 + \frac{90a}{a+b} = 10 + \frac{90a}{a} = 10 + 90 = 100$$

и то када је $b = c = 0$, тј. тражени троцифрени бројеви су $100, 200, \ldots, 900$.

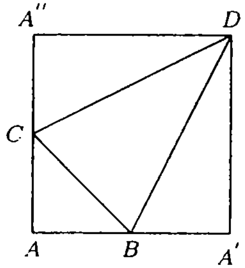


Слика уз задатак 594

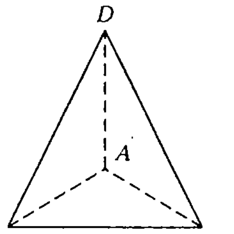
594. Нека је R тачка осносиметрична са тачком Q у односу на пречник AB (слика). Тада је $\sphericalangle QMR = 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$, па је и $\sphericalangle PMR = 90^\circ$. Очигледно је $MP^2 + MQ^2 = MP^2 + MR^2 = PR^2$, јер је троугао PMR правоугли. Како је за сваки положај тачке M, $\sphericalangle PQR = \sphericalangle MQR = 45^\circ$, то је PR тетива која одговара периферијском углу од 45°, а све те тетиве су за дати круг подударне, па је и величина PR^2 за ма који положај тачке M константна.

595. Квадрат странице a је могуће претворити у мрежу тростране пирамиде (слика (а)) само ако је $AB = BA' = \frac{a}{2}$ и $AC = CA'' = \frac{a}{2}$ (слика (б)). Тада је $A'D = A''D = a$ висина дате пирамиде, па је њена запремина

$$V = \frac{B\cdot H}{3} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}}{2}\cdot\frac{a}{3} = \frac{a^3}{24}.$$



Слика (а) уз задатак 595



Слика (б) уз задатак 595

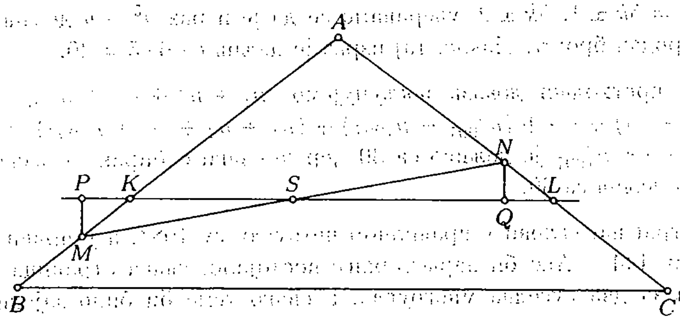
596. Претпоставимо да све државе имају непаран број пријатељских држава. Тада би број свих пријатељстава био једнак збиру 9 непарних бројева, што даје непаран број. С друге стране, тај број је очигледно дељив са 2, јер мора бити једнак двоструком броју свих могућих парова пријатељских држава. Дакле, постоји бар једна држава која има паран број пријатељских држава.

597. Израчунајмо неколико чланова низа: 1, 9, 9, 7, 6, 1, 3, 7, 7, 8, 5, 7, 7, 7, 6, ... Како су сва четири прва члана непарна, то је следећи члан паран. Уопште, лако се закључује да у низу после сваког парног долазе четири непарна члана, итд. Посматрајмо 400 група од по четири непарна броја и 400 парних бројева којима се завршавају поменуте групе. То је укупно 2000 чланова низа од којих је задњи паран број, а четири претходна су непарна. Дакле, на 1997. месту је непарна цифра.

598. Нека је n број мачака, A_1 број мишева пре почетка јела последње мачке, A_2 број мишева пре почетка јела претпоследње мачке, итд., A_n број мишева пре почетка јела прве мачке, тј. укупан број мишева. По услову задатака важи:

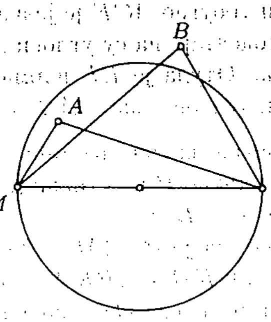
$$\frac{7}{8}(A_1 - n) = 0,\quad \frac{7}{8}(A_2 - (n-1)) = A_1,$$
$$\frac{7}{8}(A_3 - (n-2)) = A_2, \ldots, \frac{7}{8}(A_n - 1) = A_{n-1},$$

одакле следи да су бројеви $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дељиви са 7. Сада је јасно да мора бити $n = 7$, $A_1 = 7$, $A_2 = 14, \ldots, A_7 = 49$. Дакле, свака од 7 мачака је појела по 7 мишева.



Слика уз задатак 599

599. Правоугли троуглови SMP и SNQ су подударни ($SM = SN$ и углови код S су унакрсни), па је $MP = NQ$ (слика). Затим, видимо да су правоугли троуглови MPK и NQL подударни (углови код K и L су једнаки угловима на основици), па је $PK = QL$. Одавде следи да је $PQ = KL$.



Слика уз задатак 600

600. Нека је MN произвољан пречник круга (слика). Тада је: $(MA + NA) + (MB + NB) \geq MN + MN = 2\,MN = 4$. Одавде следи да је $MA + MB \geq 2$ или $NA + NB \geq 2$. Тражена тачка X је у ствари тачка M или тачка N.

601. Означимо са x^2 број квадратића квадратног листа, а са y^2 број квадратића исеченог квадрата. Тада је $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 124 = 2\cdot 2\cdot 31$. Бројеви $x-y$ и $x+y$ су исте парности (зашто?), па су оба парна. Како је једини начин да се $2\cdot 2\cdot 31$ прикаже као производ два парна броја $2\cdot 62$, то је $x-y=2$ и $x+y=62$. Дакле, решење је $x^2 = 1024$.

602. Доказаћемо прво да је за сваки природан број n израз $n^5 - n = (n-1)n(n+1)(n^2+1)$ дељив са 30.

Производ $(n-1)n(n+1)$ садржи два узастопна броја, па је дељив са 2 и три узастопна броја, па је дељив са 3, тј. дељив је са 6. Разматрањем случајева $n = 5k$, $n = 5k \pm 1$, $5k \pm 2$, уверавамо се да је израз $n^5 - n$ дељив са 5, за сваки природан број n. Дакле, тај израз је дељив са $6\cdot 5 = 30$.

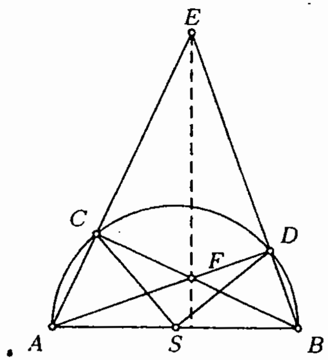
На основу претходног доказа закључујемо: $n_1^5 + n_2^5 + \cdots + n_{1997}^5 = (n_1^5 - n_1) + (n_2^5 - n_2) + \cdots + (n_{1997}^5 - n_{1997}) + (n_1 + n_2 + \cdots + n_{1997}) = 30k$, тј. $n_1^5 + n_2^5 + \cdots + n_{1997}^5$ је дељиво са 30, јер је сваки сабирак са десне стране једнакости дељив са 30.

603. Унутрашњи углови у правилном петоуглу су 108°, а у правилном десетоуглу су 144°. Ако би паркетирање постојало, свака страница би била заједничка за два суседна многоугла, а свако теме би било заједничко за два правилна петоугла и један правилан десетоугао (једина могућност да се направи збир углова од 360°). Уочимо један правилан петоугао. Око њега би требали бити наизменично сложени правилни петоуглови и десетоуглови. Ово није могуће јер их има 5, тј. непаран број, па би први и пети били исти, што је контрадикција.

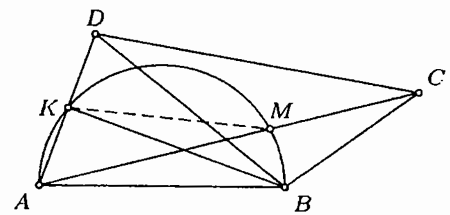
604. Углови ACB и ADB су прави као углови над пречником (слика). Централни угао CSD је прав, па је периферијски угао CAD над истим луком, једнак 45°. Дакле, правоугли троугао ACF је једнакокрак, тј. $AC = CF$. У троуглу ABE тачка F је ортоцентар, па су углови AEF и ABC једнаки, као углови с нормалним крацима. Отуда је EF нормално на AB, а правоугли троуглови ABC и FEC су подударни, па је $AB = EF$.

605. Нека је тачка M подножје висине из тачке B на дијагоналу AC, а тачка K подножје нормале из тачке B на страницу AD (слика). Тада су M и K тачке круга над пречником AB, па су углови BKM и BAM једнаки. Троугао ABC је једнакокраки, па је $\sphericalangle BAM = 39°$. Како је $\sphericalangle BAD < 90°$ (доказати), то је $\sphericalangle MKA = \sphericalangle MKB + \sphericalangle BKA = 129°$, па је $KM \parallel DC$ и $AK = KD$. Тачка K средиште дужи AD и подножје нормале из B, па је троугао ABD једнакокрак и $BD = AB = 1$.

606. Нека је једнакокраки троугао база пирамиде. Подножје висине је центар круга описаног око базе. Површина базе је $B = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}$. Полупречник



Слика уз задатак 604



Слика уз задатак 605

R круга описаног око базе је $R = \frac{a^2 b}{4B} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$. Тада је висина H пирамиде једнака $H = \sqrt{a^2 - R^2} = a\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4a^2 - b^2}}$. Према томе, запремина пирамиде је $V = \frac{1}{3}BH = \frac{ab}{12}\sqrt{3a^2 - b^2}$.

607. После n-тог потеза на запад, пуж се налази на растојању $n\sqrt{2}\,dm$ од тачке O (на позицији која се у односу на тачку O налази на супротном крају дијагонале квадрата са страницом n). Како потезу на запад претходи потез на север, довољно је наћи најмањи природан број n за који је $n\sqrt{2} > 100$, тј. $2n^2 > 10000$. Лако се налази да је тражени број $n = 71$.

608. Из записа

$$4^x + 4^y + 4^z = (2^x)^2 + (2^y)^2 + (2^z)^2 = (2^x + 2^z)^2 + 2^{2y} - 2\cdot 2^x \cdot 2^z$$

закључујемо да је $2^{2y} - 2\cdot 2^x\cdot 2^z = 0$ довољан услов да израз $4^x + 4^y + 4^z$ буде потпун квадрат. Даље, из $2^{2y} - 2\cdot 2^x \cdot 2^z = 0$ следи да је $1 + x + z = 2y$. Очигледно је да има безброј тројки целих бројева за које је дати израз потпуни квадрат, а једна од њих је: 1997, 1997, 1996. Дакле, одговор је потврдан.

609. Уочимо 16 дисјунктних подскупова чија је унија скуп $\{1, 2, \ldots, 25\}$. То су скупови: $\{1,4,9,16,25\}$, $\{2,8,18\}$, $\{3,12\}$, $\{5,20\}$, $\{6,24\}$, $\{7\}$, $\{10\}$, $\{11\}$, $\{13\}$, $\{14\}$, $\{15\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{21\}$, $\{22\}$, $\{23\}$. Како је изабрано 17 бројева, то по Дирихлеовом принципу бар два броја морају бити из истог подскупа. Међутим, очигледно је да су свака два броја из истог подскупа таква да им је производ потпуни квадрат. Тиме је тврђење доказано.

610. Уочимо да је $4a + 1 < 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$, па је $\sqrt{4a+1} < \sqrt{(2a+1)^2} = 2a+1$. Слично је $\sqrt{4b+1} < 2b+1$, $\sqrt{4c+1} < 2c+1$, $\sqrt{4d+1} <$

$2d+1$. Сабирањем ове четири неједнакости добијамо $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}<2(a+b+c+d)+4=2\cdot 1+4=6$.

611. Нека је

$$x=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{\ddots\,1996+\cfrac{1}{1997}}}}}.$$

Тада је лева страна датог израза једнака

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1}{2+x}+\frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}}=\frac{2+x}{2+x}=1.$$

612. Ако је $p=2$, онда је

$$\begin{aligned}1997^p+p^{1997}&=1997^2+2^{1997}=1997^2-1+2^{1997}+1\\&=(1997-1)(1997+1)+(2+1)(2^{1996}-2^{1995}+2^{1994}-2^{1993}+\cdots-2+1)\\&=1996\cdot 1998+3(2^{1996}-2^{1995}+2^{1994}-2^{1993}+\cdots-2+1)\\&=1996\cdot 3\cdot 666+3A=3(A+1996\cdot 666),\end{aligned}$$

дељиво са 3, па је 1997^p+p^{1997} сложен број.

Ако је $p\ge 3$, онда је p непаран број, па су 1997^p и p^{1997} такође непарни бројеви, а њихов збир је паран, дакле и сложен. Тиме је доказ завршен.

613. Нека је $AD=AE$ (слика). Како је $CD=AB$, тј. $AC+AD=AE+BE$, то је и $AC=BE$. Како је $AC=BC=BE$, то су троуглови ADE и BCE једнакокраки.

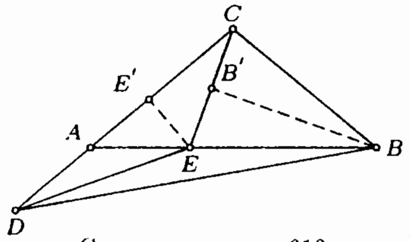
У троуглу BCE је $\sphericalangle CBE=40°$, па је $\sphericalangle BCE=\sphericalangle BEC=70°$. Слично, у троуглу ADE је $\sphericalangle DAE=140°$, па је $\sphericalangle ADE=\sphericalangle AED=20°$. Нека је B' подножје нормале из темена B на CE, а E' подножје нормале из тачке E на AC. Како је $\sphericalangle ECE'=30°$, а $\sphericalangle EE'C=90°$, то је $\sphericalangle CEE'=60°$, па је $EE'=\frac{CE}{2}=B'E$. Сада су троуглови DEE' и BEB' подударни, јер је $\sphericalangle DE'E=\sphericalangle BB'E=90°$, $EE'=EB'$ и $\sphericalangle DEE'=\sphericalangle BEB'=70°$. Из подударности је $DE=BE$, па је троугао BDE једнакокрак, што значи да је $\sphericalangle BDE=\sphericalangle DBE=10°$. Дакле, $\sphericalangle CDB=20°+10°=30°$, а $\sphericalangle CBD=10°+40°=50°$.

614. I решење: У спољашности троугла ABC конструишимо тачку D, тако да је $\triangle BCD\cong\triangle ACM$ (слика). Ако је $\sphericalangle ACM=\varphi$, онда је $\sphericalangle BCD=\varphi$, па

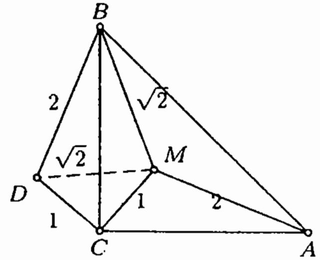
је $\triangle CDM$ једнакокрако-правоугли ($CM=CD=1$ и $\sphericalangle DCM=\varphi+\alpha=90°$). Тада је $DM=\sqrt{2}$. Како је $BD=AM=2$, $BM=DM=\sqrt{2}$, то је и троугао BDM једнакокрако-правоугли. Значи, $\sphericalangle BDM=45°$ и $\sphericalangle CDM=45°$, па је $\sphericalangle CDB=90°$. Дакле, $BC^2=CD^2+BD^2=1^2+2^2=5$.

Површина је

$$P_{\triangle ABC}=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{BC\cdot BC}{2}=\frac{5}{2}.$$



Слика уз задатак 613



Слика уз задатак 614

II решење: Нека је $BC=x$. Тада је $AB=x\sqrt{2}$, а троуглови BCM и ABM су слични, јер је

$$\frac{BC}{AB}=\frac{x}{x\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{CM}{MB}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad\text{и}\quad\frac{MB}{MA}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из сличности следи да су одговарајући углови једнаки, па је $\sphericalangle ABM=\sphericalangle BCM=\alpha$, $\sphericalangle BMC=\sphericalangle AMB=135°$ и $\sphericalangle AMC=360°-135°-135°=90°$. Значи, $AC^2=CM^2+AM^2=1^2+2^2=5$, и

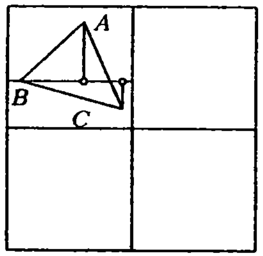
$$P_{\triangle ABC}=\frac{CA\cdot CA}{2}=\frac{BC\cdot BC}{2}=\frac{5}{2}.$$

615. Поделимо дати квадрат на четири подударна квадрата. Тада је страница сваког од тих квадрата $\frac{1}{2}$ и, на основу Дирихлеовог принципа, постоји квадрат у коме има бар три тачке. Уочимо један квадрат и у њему три тачке A, B и C (слика). Даље, уочимо такво теме троугла ABC да права која га садржи и паралелна је једној од страница квадрата сече наспрамну страницу троугла. Нека је то нпр. теме B и нека та права сече страницу AC у тачки D. Тада је $P_{\triangle ABC}=P_{\triangle ABD}+P_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AA_1+\frac{1}{2}BD\cdot CC_1=\frac{1}{2}BD(AA_1+CC_1)$, при чему су A_1 и C_1 редом подножја висина троуглова ABD и CBD из темена A и C. Како је $BD\le\frac{1}{2}$ и $AA_1+CC_1\le\frac{1}{2}$, то је $P_{\triangle ABC}\le\frac{1}{8}$, што је и требало доказати.

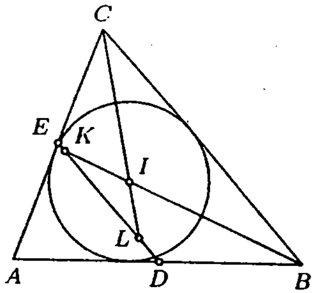
616. Из дате релације следи да је $\dfrac{(x^2+y^2)^2+(x^2-y^2)^2}{x^4-y^4} = k$, односно $\dfrac{2(x^4+y^4)}{x^4-y^4} = k$. Одавде је $\dfrac{x^4}{y^4} = \dfrac{k+2}{k-2}$. С друге стране,

$$\frac{x^8+y^8}{x^8-y^8}+\frac{x^8-y^8}{x^8+y^8} = \frac{2(x^{16}+y^{16})}{x^{16}-y^{16}} = 2\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^{16}+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^{16}-1}$$

$$= 2\frac{\left(\frac{k+2}{k-2}\right)^4+1}{\left(\frac{k+2}{k-2}\right)^4-1} = \cdots = \frac{k^4+24k^2+16}{4k^3+16k}.$$



Слика уз задатак 615



Слика уз задатак 617

617. Како су BI и CI редом симетрале углова β и γ, то је $DK = DB = \frac{1}{2}AB$ и $EL = EC = \frac{1}{2}AC$ (слика). Дакле, $AB + AC = 2KL + BC$, тј. $2s = AB + AC + BC = 2KL + 2BC$, при чему је s полуобим датог троугла ABC. Одавде је $s = KL + BC$, а како је лако доказати да је $AI+BI+CI > s$ (јер је $AI+BI > AB$, $BI+CI > BC$, $AI+CI > AC$), то је $AI+BI+CI > BC+KL$.

618. Како је из услова задатка $R(b+c) = a\sqrt{bc}$, то је

$$\frac{a}{R} = \frac{b+c}{\sqrt{bc}}, \quad \text{тј.} \quad \frac{a}{2R} = \frac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}}. \qquad (1)$$

Будући да је $\dfrac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$, тј. $\dfrac{b+c}{2} : \sqrt{bc} \geq 1$, а са друге стране $\dfrac{a}{2R} \leq 1$ (јер страница троугла не може бити већа од пречника круга описаног око

овог троугла), закључујемо да је једнакост (1) могућа само ако је $\dfrac{a}{2R} = 1$ и $\dfrac{\frac{b+c}{2}}{\sqrt{bc}} = 1$, тј. ако је $b = c$ и $R = \dfrac{a}{2}$. Дакле, троугао ABC је једнакокрако-правоугли и његови углови су $90°$, $45°$, $45°$.

619. Не може бити само број n_{1998} паран, јер би тада збир непарног броја непарних бројева $n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{1997}^2$ био паран, што није могуће. Такође, не може бити ни само један од првих 1997 бројева паран, нпр. n_1, јер би тада било $n_1^2 = n_{1998}^2 - n_2^2 - \cdots - n_{1997}^2$, а десна страна је непаран број.

Доказаћемо да сви дати бројеви не могу бити непарни. Наиме, за сваки непаран број $2k-1$ важи: $(2k-1)^2 = 4k^2-4k+1 = 4k(k-1)+1 = 8p+1$, јер је $k(k-1)$ паран број. Дакле, $(2k-1)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$. Због тога је $n_1^2+n_2^2+\cdots+n_{1997}^2 \equiv 1997 (\mathrm{mod}\, 8) \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$, а $n_{1998}^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$, што је контрадикција.

Дакле, бар два од датих бројева су парни.

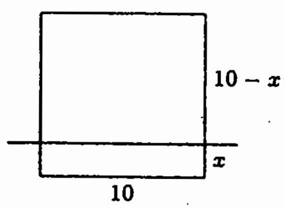
1998. година

620. Како је $9999 : 3 = 3333$ и $1001 : 11 = 91$, то је тражена разлика $3333 - 91 = 3242$.

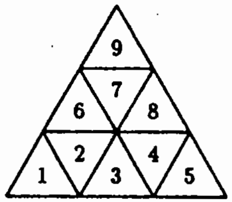
621. Не може, јер од два узастопна природна броја један је увек паран, а други непаран, па је њихов збир увек непаран број.

622. Када би сви дали по 6 динара сакупили би $32 \cdot 6 = 192$ динара. Значи да су преосталих $246 - 192 = 54$ динара обезбедили дечаци. Како су они дали $9 - 6 = 3$ динара више него девојчице њих има $54 : 3 = 18$, а девојчица је $32 - 18 = 14$.

623. Збир обима оба правоугаоника је $40 + 20 = 60\,cm$, јер они садрже обим квадрата и још две веће странице правоугаоника (слика). Како је $60 : 5 = 12$ и како је двоструки обим једног правоугаоника једнак троструком обиму другог правоугаоника, то је $O_1 = 36\,cm$ и $O_2 = 24\,cm$.



Слика уз задатак 623



Слика уз задатак 624

624. Тражени троуглови су: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1236, 3458, 6789$ и 123456789, па их има укупно $9 + 3 + 1 = 13$ (слика).

625. Како је $A = \{1, 8, 9, 10\}$, $B = \{4, 11, 12, 13\}$ и $C = \{2, 9, 10, 11\}$, то је $A \cap B = \emptyset$ и $(C \setminus A) \cup (A \setminus C) = \{2, 11\} \cup \{1, 8\} = \{1, 2, 8, 11\}$.

626. $\frac{71}{1998} < \frac{72}{1998} = \frac{8 \cdot 9}{9 \cdot 222} = \frac{8}{222} < \frac{8}{221}$.

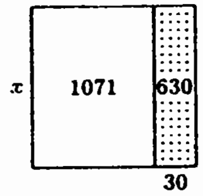
627. Са слике је очигледно да је $x = (1701 - 1071) : 30 = 630 : 30 = 21$. Тражени бројеви су $1071 : 21 = 51$ и 21.

628. Угао $\alpha = 33°18'$; $\beta = 90° - \alpha = 56°42'$; $\gamma = 180° - \alpha = 146°42'$.

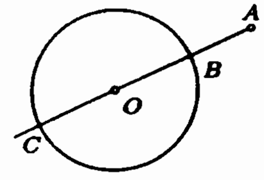
629. Полупречник круга је $OA - AB = 5 - 3 = 2\,cm$, па је највеће растојање $AC = AO + OC = 5 + 2 = 7\,cm$ (слика).

630. Решењем једначина добија се $a = -1800$ и $b = -2196$. Тада је вредност разломка $\frac{a+b}{1998} = \frac{-3996}{1998} = -2$.

631. Како је $3888 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^5$ то је $m = 3$ и $n = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. Тада је $3888 \cdot m = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^6 = (2^2 \cdot 3^3)^2 = 108^2$ и $3888 \cdot n = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^6 \cdot 3^6 = (2^2 \cdot 3^2)^3 = 36^3$.



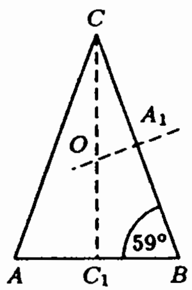
Слика уз задатак 627



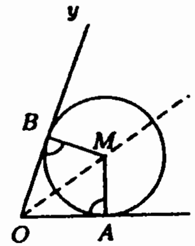
Слика уз задатак 629

632. Аца за један сат окречи $\frac{1}{10}$ стана. Ако Аца ради 6 сати (4 сам и 2 са Бором) окречиће $\frac{6}{10}$ стана. Значи да Бора за два сата окречи $1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$ стана. Дакле, Бора за један сат окречи $\frac{2}{10}$ стана, што значи да би цео стан самостално окречио за 5 сати.

633. Како је $\sphericalangle A_1OC_1 = 121°$, то је $\sphericalangle A_1OC = 180° - 121° = 59°$ (слика). Тада је $\sphericalangle A_1CO = 90° - 59° = 31°$, па је $\sphericalangle BCA = 62°$, а $\sphericalangle ABC = 59°$. Тада је наспрам већег угла већа страница, па је $AB > AC = BC$.



Слика уз задатак 633



Слика уз задатак 634

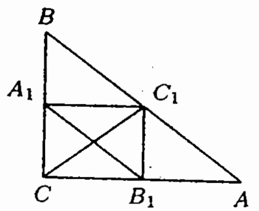
634. Ако је центар круга M, онда је $AM = BM = r$ (слика). Троуглови AMO и BMO су подударни ($OM = OM$, $AM = BM$ и $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$), па из подударности закључујемо да је и $OA = OB$.

635. Решавањем једначина добијамо $x = 2001$, $y = 669$ и $z = 1998 + \sqrt{3}$, па је $x + y + z = 4668 + \sqrt{3}$.

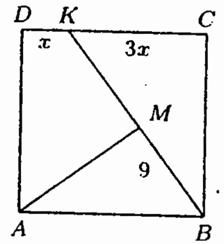
636. Из $\frac{1998^{1998} + 1998^{1999}}{1999^{1999}} = \frac{1998^{1998}(1 + 1998)}{1999^{1998} \cdot 1999}$ следи $x^{1998} = \frac{1998^{1998}}{1999^{1998}} = (\frac{1998}{1999})^{1998}$, па је $x = \frac{1998}{1999}$.

637. Како је $\alpha - \beta = 3\gamma$ и како је $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, то је $2\alpha + \gamma = 3\gamma + 180°$. Дакле, $2\alpha = 2\gamma + 180°$, а само $\alpha = \gamma + 90°$, што значи да је $\alpha > 90°$, а одатле следује да је дати троугао тупоугли.

638. Тражени круг је круг описан око правоугаоника $A_1CB_1C_1$ (слика). Дијагонала d тог правоугаоника је половина хипотенузе $c = 10\,cm$, дакле $5\,cm$, па је тражени полупречник $r = 2.5\,cm$.



Слика уз задатак 638



Слика уз задатак 642

639. Тражени производ је мањи од $100 \cdot 100 = 1000$ и дељив са 45, дакле са 5 и са 9. Како је $9 = 3^2$ то број $*2*\cdot 5$ мора бити потпун квадрат мањи од $9999 : 9 = 1111$, што значи да је број $*2*$ мањи од $1111 : 5 = 222$ и дељив са 5. Због тога се $*2*$ завршава 0 или 5. У обзир долазе само бројеви 120, 125 и 220. Како је само $125 \cdot 5 = 625 = 25^2$ потпун квадрат то је тражени производ $125 \cdot 45 = 75^2$.

640. Нека је тражени двоцифрени број $\overline{xy}$. Из услова задатка је $9(10x + y) = 100x + y$. Значи да је $10x = 8y$ или $5x = 4y$. Тражене цифре су $x = 4$ и $y = 5$, а тражени број 45, јер је $9 \cdot 45 = 405$.

641. Дата једначина је еквивалентна са следећом једначином: $|x-1| + |x-3| = 1998$. Добијена једначина има два решења: $x = 1001$ или $x = -997$.

642. Ако је страница квадрата једнака $4x$, онда је $KD = x$ и $CK = 3x$ (слика). Правоугли троуглови AMB и BCK су слични (имају све углове једнаке). Из сличности је $BC : CK = AM : BM = 4 : 3$, па је $AM = 12\,cm$. Тада се применом питагорине теореме добија да је $AB = 15\,cm$, па је површина квадрата $225\,cm^2$.

643. Дијагонала квадра $D = \sqrt{1^2 + 5^2 + 7^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}\,cm$. Како је $5\sqrt{3}\,cm$ и дужина дијагонале коцке, то је дужина ивице коцке $a = 5\,cm$. Површина и запремина коцке су редом $P = 150\,cm^2$ и $V = 125\,cm^3$.

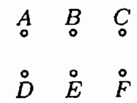
644. Тражени збир је $(11 + 12 + 13 + 14 + 15) \cdot (11 + 12 + 13 + 14 + 15) = 65^2 = 4225$.

645. Нека јесен има x дана. Тада зима има $x - 1$ дан, лето $x + 4$ и пролеће $x + 2$ дана. Дакле $x + x - 1 + x + 4 + x + 2 = 365$, па је $4x + 5 = 365$. Одавде је $x = 90$, тј. јесен има 90 дана, зима 89 дана, лето 94 дана и пролеће 92 дана.

646. Нека је чинилац који је остао исти x. Тада је $24 \cdot x = 1998 - 1110$. Дакле, $24x = 888$ или $x = 888 : 24 = 37$. Други чинилац је $1998 : 37 = 54$.

647. Све масе од $1\,kg$ до $13\,kg$: $1 = 1$; $2 = 3 - 1$; $3 = 3$; $4 = 3 + 1$; $5 = 9 - 3 - 1$; $6 = 9 - 3$; $7 = 9 + 1 - 3$; $8 = 9 - 1$; $9 = 9$; $10 = 9 + 1$; $11 = 9 + 3 - 1$; $12 = 9 + 3$; $13 = 9 + 3 + 1$.

648. Ако дате тачке обележимо са A, B, C, D, E и F, онда су тражени троуглови: ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF, BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF (слика). Има их укупно 18.



Слика уз задатак 648

5	1	6	5	1	6	5	1
5	6	1	5	6	1	5	6
5	2	3	5	2	3	5	2
5	3	2	5	3	2	5	3

Слика уз задатак 649

649. Има укупно 4 решења (слика).

650. Како је $NZD(6, 9, 12, 15) = 3$, то највећа могућа коцка има ивицу $3\,cm$, па коцка садржи $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ таквих мањих коцки, а квадар $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ мањих коцки. Како је то укупно 68 мањих коцки то се од њих не може направити нова коцка (могло би ако би их било $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$ или $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$).

651. Нека је резултат свих наведених операција број $2k$. Тада је први број $2k - 2$, други $2k + 2$, трећи $2k : 2 = k$ и четврти $2k \cdot 2 = 4k$. Њихов збир је $2k - 2 + 2k + 2 + k + 4k = 9k = 1998$. Дакле $k = 1998 : 9 = 222$. Према томе, први број је 442, други 446, трећи 222, а четврти 888.

652. Производ 24 је могућ у комбинацијама: $1 \cdot 3 \cdot 8$, $1 \cdot 4 \cdot 6$, $2 \cdot 2 \cdot 6$, $2 \cdot 3 \cdot 4$. Тражени бројеви су $164, 416, 324, 432$, јер су само њихови двоцифрени завршеци дељиви са 4.

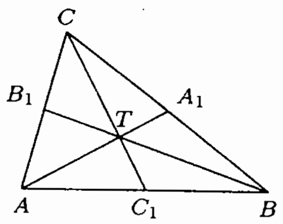
653. Мајка је 25 година старија од Раше. Према томе 1992. године Раша је имао x година, а његова мајка $6x$. Дакле, $6x - x = 5x = 25$, па је $x = 5$. То значи да је 1992. године Раша имао 5 година, а његова мајка 30 година. Сада Раша има 11 година, а његова мајка 36 година.

654. Правоугаоника од 12 поља има три врсте: $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$ и $3 \cdot 4$. Како први правоугаоник не постоји на табли $8x8$, то остају само друга два. Правоугаоника $2 \cdot 6$ има $7 \cdot 3 \cdot 2 = 42$, а правоугаоника $3 \cdot 4$ има $6 \cdot 5 \cdot 2 = 60$, па је укупан број тражених правоугаоника 102.

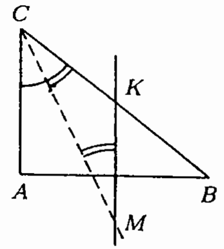
655. Нека је у понедељак било $3x$ гледалаца. У уторак је било за $1/3$ више, дакле $4x$ гледалаца. У среду је опет било $3x$ гледалаца, што значи да их је било за $1/4$ мање него у уторак.

656. Најмањи такав број био би број облика $\overline{1abc}$. Тада је $a+b+c$ једнако 8, или 17 или 26, $a\cdot b\cdot c = 180 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5 = 4\cdot 5\cdot 9 = 6\cdot 6\cdot 5$. Дакле најмањи такав број је 1566, јер 1459 не долази у обзир пошто није дељив са 9.

657. Нека је T тежиште троугла ABC (слика). Из троугла ATC_1 је $\frac{2}{3}t_a + \frac{1}{3}t_c > \frac{c}{2}$. Слично се из троуглова BTA_1 и CTA_1 добија да је $\frac{2}{3}t_b + \frac{1}{3}t_a > \frac{a}{2}$ и $\frac{2}{3}t_c + \frac{1}{3}t_b > \frac{b}{2}$. Сабирањем добијених неједнакости добија се тражена неједнакост.



Слика уз задатак 657



Слика уз задатак 658

658. Нека се симетрала угла γ и симетрала странице AB секу у тачки M и нека симетрала странице AB сече страницу BC у тачки K (слика). Како је $\sphericalangle ACM = \sphericalangle KCM = \sphericalangle CMK = \frac{\gamma}{2}$, то је права KM паралелна са AC (паралелни краци). Како је права KM нормална на AB, то је и права CA нормална на AB, па је троугао ABC правоугли.

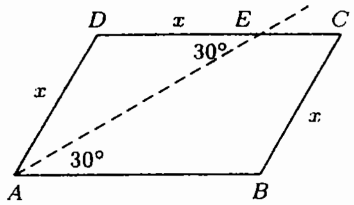
659. Све ученике поделимо у 7 категорија: прву чине они који су поклонили једну књигу; другу они који су поклонили две књиге; ... седму чине они који су поклонили 7 књига (у осмој категорији је само Дуле, јер је он поклонио највише књига). Како имамо 29 ученика (Дула не рачунамо) распоређених у 7 категорија, то на основу Дирихлеовог принципа $29 : 7 = 4(1)$ постоји категорија у којој има бар 5 ученика.

660. Ако је $x = 19.9819981998\ldots$ онда је $10000x = 199819.9819981998\ldots$, па је $10000x - x = 9999x = 199800$. Значи $x = \frac{199800}{9999} = 19\frac{1091}{1111}$.

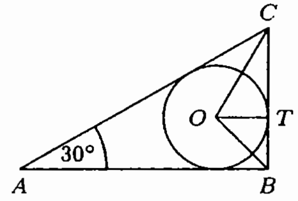
661. Нека је $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \overline{xxx} = 111x$ $(1 \le x \le 9)$. Дакле $n(n+1) = 222x = 2\cdot 3\cdot 37\cdot x$. Како је лева страна производ два узастопна природна броја и како је 37 прост број то $2\cdot 3\cdot x$ мора бити 36 или 38. Како 38 није дељиво са 3, у обзир долази само 36, па је $x = 6$, а $n = 36$.

662. Нека је $DE = x$ (слика). Тада је $CE = 30 - x$. Из услова задатка $P_{ABCE} = \frac{30+30-x}{2}\cdot h = 2P_{\triangle ADE} = 2\cdot\frac{x}{2}h$, па је $2x = 60 - x$. Дакле $x = 20\,cm$. Тада је очигледно $h = 10\sqrt{3}\,cm$ и $P = 300\sqrt{3}\,cm^2$.

663. Нека је $\sphericalangle BOT = 3x$ (слика). Тада је $\sphericalangle COT = 4x$, па је $\sphericalangle TBO = 90° - 3x$ и $\sphericalangle TCO = 90° - 4x$. Одавде следи да је $30° + 180° - 6x + 180° - 8x = 180°$. Дакле $14x = 210°$, па је $x = 15°$, одакле добијамо да је $\sphericalangle ABC = 90°$ и $\sphericalangle BCA = 60°$. Како је $OT = 3\,cm$, то је $OC = 6\,cm$, а $TC = \sqrt{3}\,cm$, па је $BC = 3 + \sqrt{3}\,cm$.



Слика уз задатак 662



Слика уз задатак 663

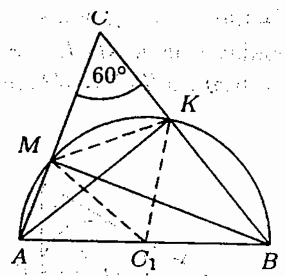
664. I решење: Ако би сви ученици имали мање или једнако 10 динара, онда сви укупно не би имали више од 55 динара, јер је $1+2+\cdots 10 = 55$. Дакле бар један ученик има 11 или више динара. Ако први ученик има 1 динар, други 2 динара, трећи 3 динара, онда седми има најмање 7, осми најмање 8, девети најмање 9, а десети најмање 11 динара (јер сви морају имати различите суме новца). Последња четири имају заједно најмање $11+9+8+7 = 35$ динара, према томе преосталих 6 ученика имају највише 65, дакле мање од 66 динара.

II решење: Ако 10 ученика има 100 динара, тада „свако“ од њих има просечно 10 динара. Зато шесторица „најсиромашнијих“ не могу имати више од 60 динара.

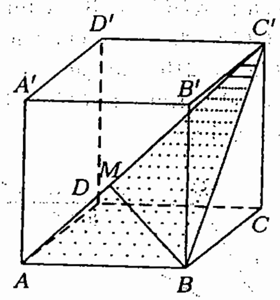
665. Решавањем дате једначине по x добија се да је $x = 2 + \frac{p}{3}$. Како x може бити само -1, 0 или 1, то је $p = -9$, $p = -6$ или $p = -3$. Дакле, $p \in \{-9, -6, -3\}$.

666. Ако је $h_c = h_a + h_b$, онда је $\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b}$ или $\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Како најкраћој страници одговара највећа висина и како је највећа висина h_c, то је најмања страница c па је $\frac{1}{2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ или $ab - 2a - 2b + 4 = (a-2)(b-2) = 4$. Једначина има три пара решења $(6,3)$, $(4,4)$ и $(3,6)$ од којих је само $a = b = 4\,cm$ право решење. Код осталих не добијамо троугао, јер је збир две странице мањи од треће $(2+3 < 6)$. Површина добијеног троугла је $\sqrt{15}\,cm^2$.

667. Како је $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AKB = 90°$, то је C_1 центар кружнице која садржи тачке A, M, K и B (слика). Дакле, $MC_1 = KC_1$. Ако је $\sphericalangle ACB = 60°$, онда је $\sphericalangle CAK = \sphericalangle CBM = 30°$. Тада је $\sphericalangle MC_1K = 60°$ (као централни угао над тетивом KM), па је троугао MKC_1 једнакостраничан.



Слика уз задатак 667



Слика уз задатак 668

668. Нека је мерни број ивице дате коцке a (слика). Тада је $AB = a$ и у троуглу ABC' страница $AC' = a\sqrt{3}$, а $BC' = a\sqrt{2}$. Како је троугао ABC' правоугли, његова површина је $\dfrac{AB \cdot BC'}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2} = \dfrac{AC' \cdot BM}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 7$. Одавде је $a = 7\sqrt{\dfrac{3}{2}}\,cm$. Површина коцке је $P = 6a^2 = 6 \cdot 49 \cdot \dfrac{3}{2} = 441\,cm^2$.

669. Запремина коцке је $14 \cdot 14 \cdot 14 = 2744\,m^3$ и коцка се може изделити на 2744 коцке странице $1\,m$, чије су стране паралелне странама коцке сира. Како у коцки сира има 1998 мишева, онда на основу Дирихлеовог принципа постоји бар једна коцка странице $1\,m$ унутар које се не налази ниједан миш.

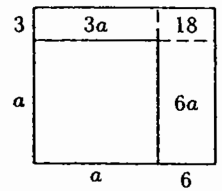
670. Ако првобитни број означимо са $10x$, тада је новодобијени број x. Дакле, $10x - x = 9x = 1998$, па је $x = 1998 : 9 = 222$. Тражени број је $10x = 2220$.

671. Ако Жарко има x динара, Лека има три пута више дакле $3x$. Када потроше по 10 динара, Жарко ће имати $x - 10$, а Лека $3x - 10$. Из услова задатка је $3x - 10 = 4(x - 10) = 4x - 40$. Решавањем претходне једначине добија се $x = 30$, па је Жерко имао 30, а Лека 90 динара.

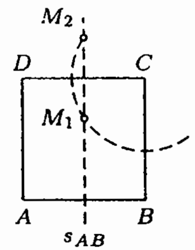
672. Ради се о сабирању $ABBA + CDC = 1998$. Како је $A = 1$, добијамо $1BB1 + CDC = 1998$, па је $C = 7$. Онда је $1BB1 + 7D7 = 1998$, одакле је очигледно $B = 2$ и $D = 7$. Дакле $1221 + 777 = 1998$.

673. Нека је страница датог квадрата a (слика). Када се једна страница квадрата повећа за $3\,cm$, а друга за $6\,cm$, онда се површина повећа за $3 \cdot a + 6 \cdot a + 3 \cdot 6 = 1998$, па је $9a + 18 = 1998$. Одавде је $9a = 1980$, тј. $a = 1980 : 9 = 220\,cm$.

674. Ако су учествовала 4 такмичара (два оца и два сина) онда је одиграно 6 партија. У случају да је било 3 такмичара (деда, отац и син) одигране су 3 партије.



Слика уз задатак 673



Слика уз задатак 677

675. За један дан Душко заврши 1/12, Ташко 1/15, а Рашко 1/20 посла, а сви заједно $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}$ посла. За 4 дана, завршиће 4/5 посла, а преосталу 1/5 Ташко ће завршити за $\dfrac{1}{5} : \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{5} \cdot \dfrac{15}{1} = 3$ дана. Дакле Ташко је радио укупно $4 + 3 = 7$ дана.

676. Како је $1998 = 27 \cdot 2 \cdot 37$, то су могући следећи случајеви: $\dfrac{a}{27} + \dfrac{b}{74} = \dfrac{145}{1998}$, $\dfrac{a}{37} + \dfrac{b}{54} = \dfrac{145}{1998}$ и $\dfrac{a}{74} + \dfrac{b}{54} = \dfrac{145}{1998}$. Тада је $74a + 27b = 145$, $54a + 37b = 145$, $27a + 37b = 145$. Прва једначина нема решење. Решење друге једначине је $a = 2$, $b = 1$, а тражени разломци су $\dfrac{2}{37}$ и $\dfrac{1}{54}$. Решење треће једначине је $a = 4$, $b = 1$, а тражени разломци су поново $\dfrac{4}{74} = \dfrac{2}{37}$ и $\dfrac{1}{54}$.

677. Све тачке које су једнако удаљене од темена A и B припадају симетрали дужи AB (слика). Све тачке које су од темена C удаљене $3\,cm$ припадају кружници са центром у тачки C полупречника $3\,cm$. Постоје две такве тачке M_1 и M_2.

678. Како је збир цифара броја ЈОВАН једнак 10 и како су све цифре Ј, О, В, А и Н различите једина могућност је $0+1+2+3+4 = 10$. Тражени збир је тада очигледно 44444 па је ЈОВАН$\in \{10243, 14203, 30241, 34201\}$.

679. Обележимо златнике словима a, b, c, d, e, f, g, h. На један тас ставимо златнике a, b и c, а на други тас d, e и f. Разликујемо три случаја:

(1) Ако је $a + b + c > d + e + f$, неисправан златник је d, e или f. У другом мерењу упоређујемо d и e: ако је $d \neq e$, неисправан је лакши златник, а ако је $d = e$, неисправан је златник f.

(2) Ако је $a+b+c = d+e+f$, неисправан је лакши од два преостала златника.

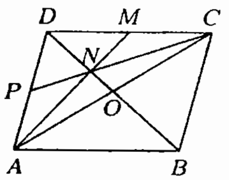
(3) Ако је $a+b+c < d+e+f$, као у случају (1), једним мерењем проналазимо лакши златник међу златницима a, b, c.

680. Очигледно је $\dfrac{3}{4}$ прве цистерне једнако са $\dfrac{4}{5}$ друге и $\dfrac{4}{7}$ треће цистерне, тј.

$\frac{12}{16}$ прве, једнако је са $\frac{12}{15}$ друге, односно $\frac{12}{21}$ треће цистерне. Дакле, количине млека у цистернама се односе као $16 : 15 : 21$, па је $16k + 15k + 21k = 52k = 780$. Одавде је $k = 15$, што значи да је у првој цистерни било 240, у другој 225, а у трећој 315 литара млека.

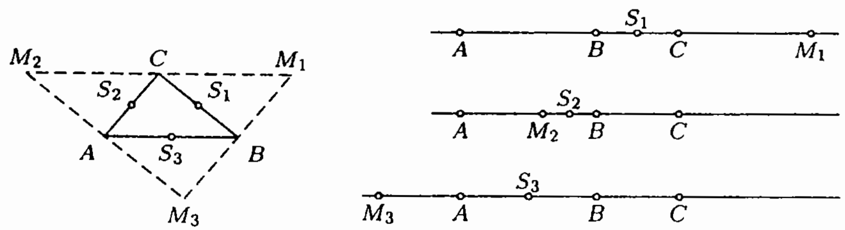
681. Како је $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ једина могућа комбинација пет различитих целих бројева чији је производ 12, то је $(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e) = (-2)+(-1)+1+2+3 = 3$, односно $20-(a+b+c+d+e) = 3$, па је $a+b+c+d+e = 20-3 = 17$.

682. Нека је тачка O пресек дијагонала AC и BD паралелограма $ABCD$ (слика). Тада је $AO = CO$. У троуглу ACD праве AM и DO су тежишне дужи. Значи да је тачка N тежиште. Тада је и дуж CP тежишна дуж (јер садржи тежиште), а то значи да дуж CP дели наспрамну страницу AD на два једнака дела, односно $AP = PD$.



Слика уз задатак 682

683. Задатак има 3 решења. Тачка M је централно симетрична слика једне од тачака A, B, C, у односу на средиште дужи одређене са преостале две тачке (слика). Треба разликовати случајеве када тачке A, B и C припадају једној правој и када то није случај.



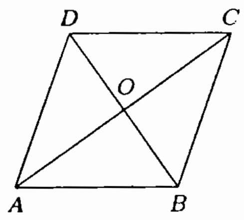
Слика уз задатак 683

684. Израз $(12\frac{1}{2} \cdot 2 + 0.2 \cdot 25) : 5 - 5 \cdot (1\frac{8}{15} : \frac{2}{3} - 1.1)$ има вредност $(25+5) : 5 - 5 \cdot (\frac{23}{15} \cdot \frac{3}{2} - \frac{11}{10}) = 6 - 6 = 0$.

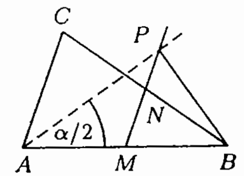
685. Како је $n^3 + 1997n + 1998 = n^3 - n + 1998n + 1998 = n(n^2-1) + 1998(n+1) = (n-1)n(n+1) + 6 \cdot 333(n+1)$, то је дати број дељив са 6 јер је $(n-1)n(n+1)$ производ три узастопна природна броја.

686. Нека је тачка O пресек дијагонала ромба (слика). Површина датог ромба је $P = 4 \cdot (AO \cdot BO) : 2 = 2 \cdot AO \cdot BO$. Из правоуглог троугла AOB следи да је $AB^2 = AO^2 + BO^2 = 81$. Како је $AC + BD = 24\,cm$ то је $AO+BO = 12\,cm$ и $(AO+BO)^2 = AO^2+2 \cdot AO \cdot BO+BO^2 = AO^2+BO^2+P = 12^2 = 144$. Одавде је $P = 144 - 81 = 63\,cm^2$.

687. Нека је број страница датог конвексног многоугла једнак је n. Тада је $\frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 1998$. Из добијене једнакости следи $4n^2 - 6n - n^2 + 3n = 3n^2 - 3n = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ или $3n(n-1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdot 37$. Дељењем са 3 добијамо $n(n-1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37 = 37 \cdot 36$. Одавде је $n = 37$, а $2n = 74$. Збир унутрашњих углова првог многоугла је $35 \cdot 180°$, а другог је $72 \cdot 180°$, па је тражена повећање $37 \cdot 180° = 6660°$.



Слика уз задатак 686



Слика уз задатак 688

688. Како су тачке M и N редом средишта страница AB и BC троугла ABC, то је MN средња линија троугла, па је MN, а и MP паралелно са AC (слика). Тада је $\measuredangle MAP = \measuredangle CAP = \measuredangle MPA = \frac{\alpha}{2}$ (као углови са паралелним крацима). Дакле, троугао AMP је једнакокрак и $AM = MP$. Како је $AM = MB = MP$, то је и троугао MBP једнакокрак. Како је $\measuredangle BMP = \alpha$, то је $\measuredangle MBP = \measuredangle MPB = 90° - \alpha/2$. Тада је $\measuredangle APB = \alpha/2 + 90° - \alpha/2 = 90°$.

689. Цифре A, A, B и C се могу распоредити на 12 начина: $AABC$, $AACB$, $ABAC$, $ABCA$, $ACAB$, $ACBA$, $BAAC$, $BACA$, $BCAA$, $CAAB$, $CABA$, $CBAA$. У конкретном случају постоје три могуће комбинације цифара A, A, B, C: 1, 1, 8, 9; 8, 8, 1, 9 и 9, 9, 1, 8. Дакле, укупан број таквих четвороцифрених бројева је $12 \cdot 3 = 36$.

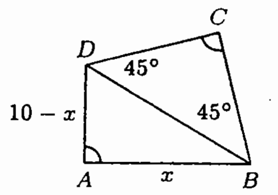
690. Значи да треба одредити све парове природних бројева (x, y) који задовољавају дату једначину, јер су у првом квадранту обе координате позитивне. Како је $4x+7y = 1998$, то је $4x = 1996-8y+y+2$. Дакле, $x = 499-2y+\frac{y+2}{4}$. Број x је цео само, ако је $y+2$ дељиво са 4, тј. ако је $y = 4k-2$. Тада је $x = 499 - 8x + 4 + k = 503 - 7k$. Решење једначине тада можемо приказати таблицом:

k	0	1	2	...	70	71	72
$x = 503 - 7k$	503	496	489	...	13	6	-1
$y = 4k - 2$	-2	2	6	...	278	282	286

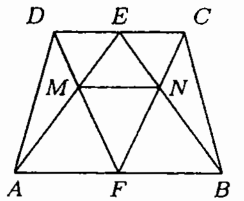
Из таблице је јасно да тражених тачака (x, y) има тачно 71. Тражени број тачака се може добити и из неједнакости $0 < x = 503 - 7k$ или $0 < y = 4k - 2 < 285$, $k \in N$.

691. Очигледно су златници само у непарним редовима па је укупан број златника $1 + 3 + 5 + \cdots + 2k - 3 + 2k - 1 = 625$. Дакле, $2k \cdot k : 2 = k^2 = 625$, па је $k = 25$. Значи да је последњи ред са златницима био $2 \cdot 25 - 1 = 49$–ти. Према томе, сребрњаци се завршавају или са 48-им или са 50-им редом. У првом случају сребрњака има $2 + 4 + 6 + \cdots + 48 = 50 \cdot 12 = 600$, а у другом случају $600 + 50 = 650$.

692. Ако је $AB = x$, онда је $AD = 10 - x$ (слика). Троугао ABD је правоугли, па је $P_{\triangle ABD} = \dfrac{AB \cdot AD}{2} = \dfrac{x \cdot (10 - x)}{2} = 5x - \dfrac{x^2}{2}$. Троугао BCD је једнакокрако-правоугли, па је $P_{\triangle BCD} = \dfrac{BC \cdot CD}{2} = \dfrac{BC^2}{2} = \dfrac{BD^2}{4}$. Користећи Питагорину теорему, добија се $BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + (10 - x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$, па је $P_{\triangle BCD} = \dfrac{x^2}{2} - 5x + 25$. Површина четвороугла $ABCD$ је збир површина троуглова ABD и BCD тј. $P = 5x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{2} - 5x + 25 = 25\,cm^2$.



Слика уз задатак 692

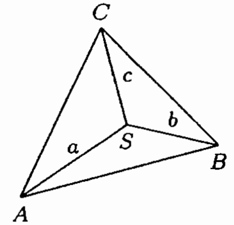


Слика уз задатак 693

693. Троуглови AMF и EMD су слични јер су им сви углови једнаки (слика). Из сличности следи да је $AM : ME = 6a : 2a = 3 : 1$. Из сличности троуглова FBN и CEN добијамо $BN : NE = 3 : 1$. Како је $AM : ME = BN : NE = 3 : 1$, то је $AB \parallel MN$. Тада су слични и троуглови ABE и EMN (сви углови су им једнаки). Из сличности уочених троуглова је $AB : MN = AE : ME = (AM + ME) : ME = 4 : 1$. Из ове релације је $MN = 12a : 4 = 3a$.

694. Нека је $AS = a$, $BS = b$ и $CS = c$ (слика). Тада је запремина дате

пирамиде $V = \dfrac{ab}{2} \cdot \dfrac{c}{3} = \dfrac{abc}{6}$. Како је $P_{\triangle ABS} = \dfrac{ab}{2} = 54$, $P_{\triangle BCS} = \dfrac{bc}{2} = 96$ и $P_{\triangle CAS} = \dfrac{ac}{2} = 72$, то се множењем ових трију релација добија $a^2b^2c^2 : 8 = 54 \cdot 96 \cdot 72$ или $a^2b^2c^2 = 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 16 \cdot 8 \cdot 9$. Дакле, $abc = 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 4$, и $ab = 108 = 2 \cdot 9 \cdot 6$, па је $c = 16\,cm$. Слично је $a = 8 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 4 : (2 \cdot 6 \cdot 16) = 9\,cm$ и $b = 12\,cm$. Користећи Питагорину теорему добија се да је $AB = 15\,cm$, $BC = 20\,cm$ и $CA = \sqrt{337}\,cm$.



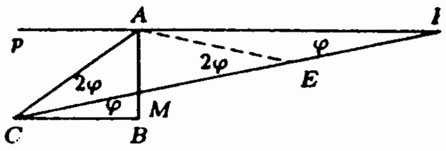
Слика уз задатак 694

695. Очигледно је број јабука које има Гоца дељив са 3, а број јабука које има Нина дељива са 2. С друге стране, тај број је када се јабуке саставе дељив са 5. То значи да су Гоца и Нина имале по $30\,k$ јабука. Ако продају појединачно, Гоца ће зарадити $10\,k$ динара, а Нина $15\,k$ динара, што укупно износи $25\,k$ динара. Ако продају заједно, онда ће зарада бити $(60\,k : 5) \cdot 2 = 24\,k$ динара. Како је $25\,k = 24\,k + 4$, то је $k = 4$, па су и Гоца и Нина имале по 120 јабука.

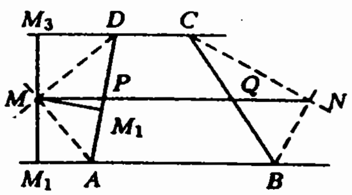
Задатак се може решити и једначином: ако су Гоца и Нина имале по x јабука, онда је $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{2x}{5} \cdot 2 + 4$, одакле је $x = 120$.

696. Ако Пеђа стазу претрчи за 24 минута, онда он за 9 минута претрчи $\dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$ стазе. Дакле, за то исто време Дејан претрчи $\dfrac{5}{8}$ стазе. Ако трче у истом смеру, то значи да сваких 9 минута Дејан побегне Пеђи за $\dfrac{5}{8} - \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$ дужине стазе. То значи да ће му цео круг побећи за $4 \cdot 9 = 36$ минута. За 36 минута Пеђа претрчи један и по круг, а Дејан два и по круга. То значи да ће се у почетној тачки наћи поново после 72 минута, када Пеђа претрчи 3, а Дејан 5 кругова.

697. Нека је тачка E средиште дужи KM, а $\sphericalangle KCB = \varphi$ (слика). Како је троугао AMK правоугли, то је $KE = ME = AE = AC$. Дакле, троугао ACE је једнакокрак ($AE = AC$). Како је $\sphericalangle KCB = \varphi$, то је и $\sphericalangle AKC = \varphi$ (као углови са паралелним крацима). Тада је у једнакокраком троуглу AEK и $\sphericalangle EAK = \varphi$. Тада је $\sphericalangle AEC = 2\varphi$ (као спољашњи несуседни угао за троугао AEK), па је и $\sphericalangle ACE = 2\varphi$. Коначно, $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACE + \sphericalangle KCB = 2\varphi + \varphi = 3\varphi = 3\sphericalangle KCB$.



Слика уз задатак 697



Слика уз задатак 698

698. I решење: Тачка M припада симетрали спољашњег угла код темена A па је M једнако удаљена од правих AB и AD, тј. $MM_1 = MM_2$ (слика). Међутим, тачка M припада и симетрали спољашњег угла код темена D, па је једнако удаљена од правих AD и CD, тј. $MM_2 = MM_3$. Одавде следи да је $MM_1 = MM_3$, тј тачка M је једнако удаљена од правих AB и CD, што значи да припада правој која садржи средњу линију датог трапеза. На сличан начин се доказује да и тачка N припада правој која садржи средњу линију трапеза.

Нека права MN сече краке AD и BC датог трапеза у тачкама P и Q. Троуглови ADM и BCN су правоугли (доказати), а тачке P и Q су средишта хипотенуза, па је $AD = 2\,MP$ и $BC = 2\,NQ$. Како је $AB + CD = 2\,PQ$, то је обим датог трапеза $O = AD + AB + CD + BC = 2\,MP + 2\,PQ + 2\,QN = 2(MP + PQ + QN) = 2 \cdot MN = 1998\,cm$.

II решење: Слично можемо дефинисати тачке N_1, N_2 и N_3. Тада је $2\,MN = M_1N_1 + M_3N_3 = M_1A + AB + BN_1 + M_3D + DC + CN_3 = AM_2 + AB + BN_2 + M_2D + DC + CN_2 = AB + CD + AD + BC$.

699. Нека је Миле продао x килограма пасуља. Укупан приход је $8x$. Трошкови су: порез, који износи $0.23 \cdot 8x = 1.84\,x$, затим набавка пасуља за 5 динара за који је плаћено $(x - 163) \cdot 5 = 5x - 815$ динара и набавка скупљег пасуља за који је плаћено $163 \cdot 10 = 1630$ динара. Дакле, $8x - 1.84\,x - (5x - 815) - 1630 = 1998$, одакле се добија $x = 2415\,kg$.

700. Нека су дати бројеви $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ и $n+2$. Збир њихових квадрата је $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 2$. Број $5n^2$ се завршава цифрама 0 или 5 па се број $5n^2+2$ завршава цифрама 2 или 7. Како се квадрат ниједног природног броја не завршава цифрама 2 или 7, то збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити потпун квадрат.

701. Ради се о сабирању $1000 + 100a + 10b + c + 1000c + 100b + 10a + 1 = 1000b + 100b + 10d + d$. После сређивања добијамо једнакост $1001 + 110a + 110b + 1001c = 1100b + 11d$. Очигледно је и лева и десна страна једнакости дељива са 11, па је $91 + 10a + 10b + 91c = 100b + d$, тј., $90 + 10a + 90c + c + 1 = 90b + d$.

Одавде је јасно да је $d = c + 1$, па се дељењем са 10 добија $9 + a + 9c = 9b$, одакле је, због дељивости са 9, a једнако 0 или 9.

Ако је $a = 0$, онда је $b = c + 1 = d$, што је немогуће, јер су бројеви b и d по услову задатка различити. Дакле, $a = 9$, па је $b = c + 2$. Како је $c \neq 0$, то добијамо следећа решења:

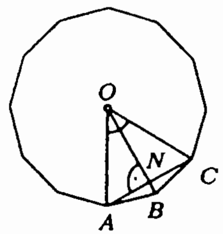
(1) $c = 1, b = 3, d = 2, a = 9$; тј. $1931 + 1391 = 3322$;
(2) $c = 2, b = 4, d = 3, a = 9$; тј. $1942 + 2491 = 4433$;
(3) $c = 3, b = 5, d = 4, a = 9$; тј. $1953 + 3591 = 5544$;
(4) $c = 4, b = 6, d = 5, a = 9$; тј. $1975 + 5791 = 7766$;
(5) $c = 5, b = 7, d = 6, a = 9$; тј. $1975 + 5791 = 7766$;
(6) $c = 6, b = 8, d = 7, a = 9$; тј. $1986 + 6891 = 8877$.

702. Површина $P = 6 \cdot P_{OABC} = 6\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 3(2+\sqrt{3})\,cm^2$ (слика). Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ABM добијамо

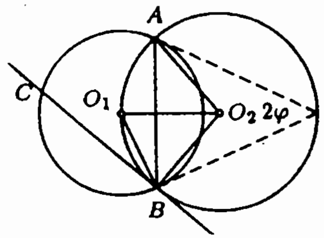
$$(AB)^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 \left(1 + (2-\sqrt{3})^2\right) = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})(1+4-4\sqrt{3}+3) = 1.$$

Према томе, $AB = 1\,cm$, а обим правилног дванаестоугла је $O = 12\,cm$.



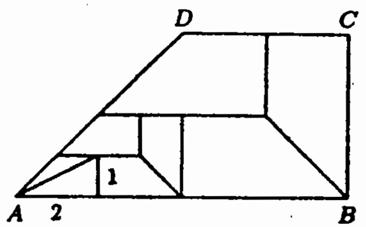
Слика уз задатак 702



Слика уз задатак 703

703. Нека су O_1 и O_2 редом центри кружница k_1 и k_2 и нека је φ угао између тангенте CB и тетиве O_1B, тј. $\sphericalangle O_1BC = \varphi$ (слика). Тада је периферијски угао над тетивом O_1B једнак φ, а централни $\sphericalangle BO_2O_1 = 2\,\varphi$. Тада је $\sphericalangle AO_2B = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi$, па је периферијски угао над тетивом AB кружнице k_2 једнак 2φ. Угао између тетиве AB и тангенте BC је тада $\sphericalangle ABC = 2\varphi$. Тада је $\sphericalangle ABO_1 = \sphericalangle ABC - \sphericalangle O_1BC = 2\varphi - \varphi = \varphi$. Из подударности једнакокраких троуглова AO_1B и CO_1B следи да је $AB = BC$.

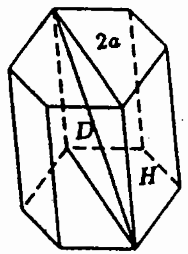
704. Дати трапез поделимо на четири подударна трапеза, а затим сваки од добијених трапеза поделимо опет на четири подударна трапеза (слика).



Слика уз задатак 704

Како имамо 17 тачака, а 16 трапеза, на основу Дирихлеовог принципа постоји трапез унутар кога се налазе бар две тачке датог скупа. Како је највеће растојање унутар једног од 16 добијених подударних трапеза, дијагонала трапеза која је једнака $\sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}\,cm$, то увек постоје две тачке чије растојање није веће од $\sqrt{5}\,cm$.

705. Како је $x^2+y^2 = 4x+4y-3$, то је $(x-2)^2+(y-2)^2 = 5$. Слично, из $y^2+z^2 = 4y+4z+5$ следи $(y-2)^2+(z-2)^2 = 13$, а из $z^2+x^2 = 4z+4x+2$ добијамо $(z-2)^2+(x-2)^2 = 10$. Нека је $(x-2)^2 = a$, $(y-2)^2 = b$ и $(z-2)^2 = c$. Тада је $a+b = 5$, $b+c = 13$ и $c+a = 10$. Решење добијеног система је $a = 1$, $b = 4$ и $c = 9$. Тада је $(x-2)^2 = 1$, $(y-2)^2 = 4$ и $(z-2)^2 = 9$. Зато је $x-2 \in \{1,-1\}$, $y-2 \in \{2,-2\}$, $z-2 \in \{3,-3\}$, односно $x \in \{3,1\}$, $y \in \{4,0\}$, $z \in \{5,-1\}$. Постоји осам решења датог система: $(3,4,5)$, $(3,4,-1)$, $(3,0,5)$, $(3,0,-1)$, $(1,4,5)$, $(1,4,-1)$, $(1,0,5)$, $(1,0,-1)$.

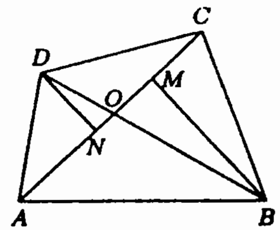


Слика уз задатак 707

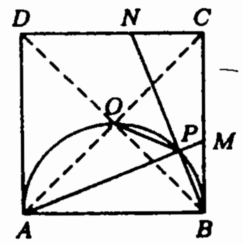
706. Ако је k неки природан број, онда су остаци при дељењу броја k са 15 једнаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14. Тада су остаци при дељењу броја k^4 са 15 редом 0, 1, 1, 6, 1, 6, 1, 1, 6, 10, 1, 6, 1, 1. Дакле, појављују се само 4 различита остатка: 0, 1, 6 и 10. Како имамо 5 различитих природних бројева, а 4 остатка, онда на основу Дирихлеовог принципа, постоје два броја чији су остаци једнаки, тј. постоје бројеви $m^4 = 15a+r$ и $n^4 = 15b+r$. Тада је $m^4-n^4 = 15(a-b)$, што је очигледно дељиво са 15.

707. Дужа дијагонала призме је дефинисана релацијом $D^2 = (2a)^2+H^2$ (слика). Како је $a+H = 10$, то је $D^2 = 4a^2+(10-a)^2 = 5(a-2)^2+80$. Дужа дијагонала призме D је најмања и износи $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}\,cm$ када је $a-2 = 0$, тј. када је $a = 2\,cm$ и $H = 8\,cm$. Површина добијене призме је $P = (96+12\sqrt{3}) = 12(8+\sqrt{3})\,cm^2$, а запремина је $V = 48\sqrt{3}\,cm^3$.

708. Нека је N подножје нормале из тачке D на дијагоналу AC (слика). Тада су троуглови OBM и ODN слични, јер је $\sphericalangle BOM = \sphericalangle DON$ (унакрсни углови) и $\sphericalangle DNO = \sphericalangle BMO = 90°$. Из уочене сличности је $BM : BO = DN : DO = 2k$. Тада је $DN = 2k \cdot DO$, па је $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \dfrac{AC \cdot BM}{2} + \dfrac{AC \cdot DN}{2} = \dfrac{AC}{2}(2k \cdot BO + 2k \cdot DO) = k \cdot AC(BO+DO) = k \cdot AC \cdot BD$, што је и требало доказати.



Слика уз задатак 708



Слика уз задатак 709

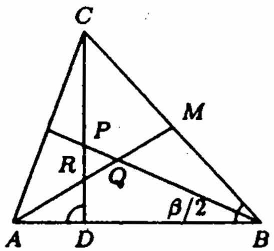
709. Троуглови ABM и BCN су подударни ($AB = BC$, $BM = CN$ и $\sphericalangle ABM = \sphericalangle BCN = 90°$) (слика). Из подударности је $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CBN$, па пошто су краци BA и CB нормални, то су и краци AM и BN такође нормални, што значи да је угао $\sphericalangle APN = \sphericalangle APB = 90°$. Како је и $\sphericalangle AOB$ прав, то тачке A, O, P и B припадају једној кружници чији је пречник AB. Тада је $\sphericalangle APO = \sphericalangle ABO$ (као периферијски углови над тетивом AO) и како је $\sphericalangle ABO = 45°$, то је и $\sphericalangle APO = 45°$. Дакле, $\sphericalangle NPO = \sphericalangle APN - \sphericalangle APO = 90° - 45° = 45°$, па је права BO симетрала угла $\sphericalangle APN$.

710. Из услова задатка да две јабуке теже као 3 крушке и да три јабуке теже као 4 поморанџе следи да 6 јабука тежи као 9 крушака и да 6 јабука теже као 8 поморанџи. Одавде следи да 9 крушака теже као 8 поморанџи. Из услова да 6 крушака кошта као 5 поморанџи, закључујемо да 18 крушака кошта као 15 поморанџи. Како 18 крушака тежи као 16 поморанџи, закључујемо да је килограм поморанџи скупљи од килограма крушака.

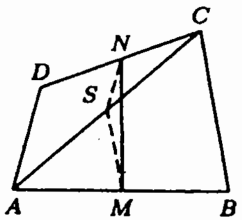
711. а) На основу услова задатка добијамо да су бројеви a, b и c редом једнаки: $a = \overline{ABCD}$; $b = \overline{ADDE}$ и $c = \overline{DBCA}$. Како је $\overline{ABCD} + \overline{ADDE} = \overline{DBCA}$, прво закључујемо да је $D = 9$. Даље је $A = 4$. Из $D+E = 10+A$ следи да је $E = 5$, па је $b = 4995$.

б) Како B и C могу бити произвољни бројеви из скупа $\{0,1,2,\dots 9\}$, то постоји 100 могућности за број a.

712. Претпоставимо супротно, тј. да је троугао PQR једнакостраничан (слика). Тада је у правоуглом троуглу $\sphericalangle BPD = 60°$, па је $\frac{\beta}{2} = 30°$. Даље, нека је тачка M средиште странице BC. Тада је у троуглу BMQ угао $\sphericalangle BQM = 60°$, па је угао $\sphericalangle QMB = 90°$, тј. AM је нормално на BC и троугао ABC је једнакокраки, са једним углом на основици једнаким 60°. Дакле, троугао ABC је једнакостраничан, што је супротно претпоставци задатка.



Слика уз задатак 712



Слика уз задатак 713

713. Нека је S средиште дијагонале AC (слика). Тада је MS средња линија троугла ABC, а NS средња линија троугла ACD, па је $BC = 2\cdot MS$ и $AD = 2\cdot NS$. Сабирањем добијених једнакости следи да је $AD + BC = 2MS+2NS \geq 2MN$. Ако важи једнакост онда су тачке M, S и N колинеарне, па је $AD \parallel MN \parallel BC$, тј. дати четвороугао је трапез.

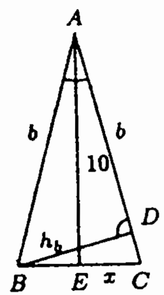
714. Најпре бројимо троуглове „ једако усмерене " као дати троугао.
Постоји $8+7+\cdots+1 = 36$ троуглова странице $1\,cm$, $7+6+\cdots+1 = 28$ троуглова странице $2\,cm$, $6+5+\cdots+1 = 21$ троуглова странице $3\,cm$, $5+4+\cdots+1 = 15$ троуглова странице $4\,cm$, $4+3+2+1 = 10$ троуглова странице $5\,cm$, $3+2+1 = 6$ троуглова странице $6\,cm$, $2+1 = 3$ троугла странице $7\,cm$, 1 троугао странице $8\,cm$.
Потом бројимо троуглове „обрнуто усмерене " у односу на дати троугао. Постоји $7+6+\cdots+1 = 28$ троуглова странице $1\,cm$, $5+4+\cdots+1 = 15$ троуглова странице $2\,cm$, $3+2+1 = 6$ троуглова странице $3\,cm$, 1 троугао странице $4\,cm$.
Дакле, укупан број троуглова је 170.

715. Из дате једнакости $\frac{1}{x+y+z} = \overline{0.xyz}$ следи $(100x+10y+z)(x+y+z) = 1000 = 2^3\cdot 5^3$. Како су x, y и z цифре, највећа могућа вредност $x+y+z$ је 27, а највећа могућа вредност за $100x+10y+z$ је 999. Могући су следећи случајеви $500\cdot 2$; $250\cdot 4$; $200\cdot 5$; $125\cdot 8$; $100\cdot 10$; $50\cdot 20$ и $40\cdot 25$. Испитивањем закључујемо да само пар $x+y+z = 8$, $100x+10y+z = 125$, испуњава

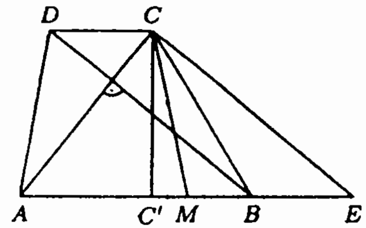
поменуте услове, па је једино решење дате једначине $x = 1$, $y = 2$ и $z = 5$, а тражени број је 0.125.

716. Из услова да је $a^2+9ab+b^2$ дељиво са 11 закључујемо да је и $a^2 - 2ab + b^2 + 11ab$ дељиво са 11, па је $(a-b)^2$ дељиво са 11. Како је 11 прост број, то је $a-b$ дељиво са 11, те је израз $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$, такође дељив са 11.

717. Нека су BD и AE висине датог троугла ABC (слика). У правоуглом троуглу ABD је угао $BAD = 30°$, па је $BD = \frac{b}{2}$. Нека је $CE = x$. Тада је основица $BC = 2x$, а из израза за површину троугла ABC добијамо једнакост: $AB\cdot BD = BC\cdot AE$, односно $\frac{b^2}{2} = 4x$, јер је $AE = 2$. Одавде је $b^2 = 8x$. Из правоуглог троугла ABE је $b^2 = 4 + x^2$, па је $8x = 4 + x^2$, а одавде следи $x^2 - 8x + 16 = 12$, тј. $(x-4)^2 = 3\cdot 4$. Дакле, $x - 4 = -2\sqrt{3}$, па је $x = 4 - 2\sqrt{3}$. Сада из $b^2 = 8x$ добијамо: $b^2 = 8(4-2\sqrt{3}) = 4\cdot 2(\sqrt{3}-1)^2$. Одавде је $b = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)$, па је $m = 2$, $n = 1$ и $p = -1$ или $m = 1$, $n = 2$ и $p = -2$.



Слика уз задатак 717



Слика уз задатак 718

718. Уочимо тачку E на продужетку основице AB преко темена B, тако да је $BE = CD$ (слика). Нека је M средиште дужи AE. Тада је, због нормалности дијагонала, троугао ACE правоугли. Како је $AE = AB+BE = AB+CD$, то је $MC = m$. Како је MC хипотенуза правоуглог троугла MCC', а $CC' = h$ катета, то је $m \geq h$. Једнакост важи када је $MC = CC'$, тј. $AC = CE$, а то значи, када да је дати трапез једнакокраки.

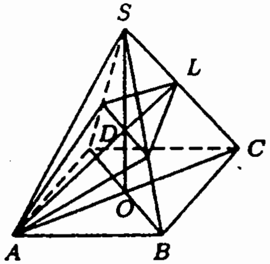
719. Нека на олимпијади има n учесника. Пошто сваки учесник има 3 пријатеља значи има $3n$ парова пријатеља. Ако узмемо да је пријатељ учесника A учесник B, онда је један од пријатеља учесника B сигурно учесник A. Дакле, сваки пар се појављује два пута, те је број различитих парова пријатеља $\frac{3n}{2}$. Како 1999 није дељив са 2, то је одговор на постављено питање негативан.

720. Напишимо број n у облику $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$. Тада је број делилаца броја n једнак $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$. Како је $1998 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 37^1$, то 1998 има $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ делилаца. Како је $16 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, бројеви са 16 делилаца морају бити неког од следећих облика: p^{15}; $p^7 q^1$; $p^3 q^3$; $p^3 q^1 r^1$; $p^1 q^1 r^1 s^1$. Најмањи бројеви тих облика су $2^{15} = 32768$; $2^7 \cdot 3 = 384$; $2^3 \cdot 3^3 = 216$; $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ и $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Према томе, најмањи природан број са тачно 16 делилаца је 120.

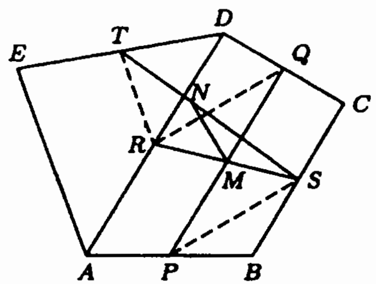
721. I решење: Ако је трећи исказ тачан тј. ако је $n + k = 3m$, онда други исказ није тачан јер би из $n = 2k + 5$ следило да је $n - 2k = n + k - 3k = 5$, или $3m - 3k = 3(m - k) = 5$, што је немогуће. Такође, ако је трећи исказ тачан, онда ни четврти није тачан, јер је $n+7k = n+k+6k = 3m+6k$, а то је увек сложен број. Према томе, трећи исказ мора бити нетачан, а остала три су тачна. То значи да је $n + 1 = ak$ и $n = 2k + 5$, па је $2k + 6 = ak$. Одавде следи да је $k \cdot (a - 2) = 6$, па је $k \in \{1, 2, 3, 6\}$. Тада је $n \in \{7, 9, 11, 17\}$ и $(n + 7k) \in \{14, 23, 32, 59\}$. Према томе, једина решења су $(n, k) = (9, 2)$ или $(17, 6)$.

II решење: Постоје четири могућности.

Ако су искази 1), 2) и 3) тачни, а исказ 4) нетачан, онда из $n = 2k+5$, следи да је $n + k = 3k + 5$, па исказ 2) искључује исказ 3). Слично је и у случају да су искази 2), 3) и 4) тачни, а исказ 1) нетачан. Ако су искази 1), 3) и 4) тачни, а исказ 2) је нетачан, онда је $n + k = 3m$, па је $n + 7k = 3m + 6k$, а то не може бити прост број, па и ова комбинација отпада. Дакле, једина преостала комбинација је 1), 2) и 4) су тачни искази, а 3) је нетачан.



Слика уз задатак 722



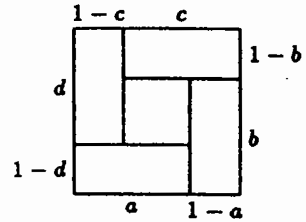
Слика уз задатак 723

722. а) Правоугли троуглови SKL и SML су подударни, па је $SK = SM$ (слика). Због тога је $SK : SB = SM : SD$, па је према обратној Талесовој теореми KM паралелно са BD.

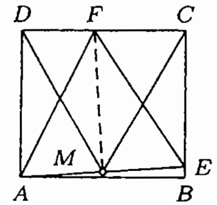
б) Троуглови AON и SOC су слични, па је $AO : ON = SO : OC$, односно $6 : ON = 8 : 6$. Одавде је $ON = 4.5\,cm$, па је $SN = 3.5\,cm$. Из а) следи

$MK : BD = SN : SO$, одакле је $MK = 5.25\,cm$. Из површине једнакокраког троугла SAC, добијамо једнакост $AC \cdot SO = AL \cdot SC$, тј. $12 \cdot 8 = AL \cdot 10$, па је $AL = 9.6\,cm$. Лако се доказује да је $AK = AM$, што значи да је пресек $AKLM$ делтоид, па је тражена површина $P = KM \cdot AL : 2 = 25.2\,cm^2$.

723. Нека је R средиште дужи AD (слика). Тачке P, S, Q и R су средишта страница четвороугла $ABCD$, па је $PSQR$ паралелограм. Дијагонале PQ и RS секу се у тачки M, што значи да је MN средња линија троугла RST, па је $MN = \frac{1}{2}TR$. Дуж TR је средња линија троугла ADE, па је $TR = \frac{1}{2}AE$. Дакле, $MN = \frac{1}{4}AE = 1\,cm$.



Слика уз задатак 724



Слика уз задатак 726

724. Нека је дати квадрат јединични (слика). Нека су дужине већих страница правоугаоника редом a, b, c и d при чему је a већа или једнака од осталих. Тада је $a \geq b$ и $1 - d \geq 1 - a$. Како су површине правоугаоника једнаке, то је $a(1 - d) = b(1 - a)$, па (због претходног услова) следи да је $a = b$ и $1 - d = 1 - a$ тј. $a = d$. Дакле, $a = b = d$. Слично се доказује да је и $b = c$, па је $a = b = c = d$. Због тога је унутрашњи правоугаоник квадрат.

725. Нека је разбојник изнео x килограма злата и y килограма дијаманата. Бројеви x и y задовољавају следеће релације:

(1) $x + y \leq 100$, јер разбојник не може понети више од $100\,kg$;

(2) $\frac{x}{200} + \frac{y}{40} = 1$, јер $1\,kg$ злата заузима $\frac{1}{200}$ део сандука, а $1\,kg$ дијаманата заузима $\frac{1}{40}$ део сандука;

(3) $x \leq 100$, $y \leq 40$.

Из релације (2) следи да је $x + 5y = 200$. Како је $x + y \leq 100$, то је $200 = x + y + 4y \leq 100 + 4y$. Дакле, $4y \geq 100$, а $y \geq 25$. Нека је $y = 25 + k$ $(0 \leq k \leq 15)$. Тада је $x + 5y = x + 5(25 + k) = 200$, тј. $x + 125 + 5k = 200$, или $x = 75 - 5k$. Вредност блага је $f(x, y) = 20x + 60y$ (јер $1\,kg$ злата вреди 20, а $1\,kg$ дијаманата 60 дуката), па је $f(x, y) = 20(75 - 5k) + 60(25 + k) = 1500 - 100k + 1500 + 60k = 3000 - 40k \leq 3000$, јер је k позитиван број или 0.

Дакле, максимална вредност блага је 3000 дуката и добијамо је за $k = 0$, па је $x = 75\,kg$, а $y = 25\,kg$.

726. Како је $AM = ME$ то је $AE \perp FM$ и $\sphericalangle AMF = 90° = \sphericalangle ADF$, па је четвороугао $AMFD$ тетивни (слика).

Даље, како је $\sphericalangle AFM = 30° = \sphericalangle ADM$, то је $\sphericalangle MDC = 60°$. Четвороугао $MECF$ је тетивни, јер је $\sphericalangle EMF = \sphericalangle FCE = 90°$. Како је $\sphericalangle MFE = 30° = \sphericalangle MCE$, то је $\sphericalangle MCD = 60°$, па је троугао CDM једнакостраничан.

727. I решење: Из услова задатка и

$$\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{1998}+\sqrt{n})^2}{1998-n} = \frac{1998+n+2\sqrt{1998\cdot n}}{1998-n}$$

следи да мора бити $1998 \cdot n = k^2$, тј. $2 \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot n = k^2$. Најмањи такав природан број n је $n_{min} = 2 \cdot 3 \cdot 37 = 222$. Тада је вредност израза једнака 2.

II решење: Како је $\dfrac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{\frac{1998}{n}}+1}{\sqrt{\frac{1998}{n}}-1} = \dfrac{k+1}{k-1} = 1 + \dfrac{2}{k-1}$, то је вредност датог израза природан број уколико је $k - 1 \in \{1, 2\}$, тј. $k = 2$ или $k = 3$. Како се за $k = 2$ добија да n није природан број, то је једина могућност $k = 3$ и $n = 222$.

III решење: Нека је $\dfrac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = k \in N$. Тада је $\sqrt{1998}+\sqrt{n} = k\sqrt{1998} - k\sqrt{n}$, одакле се добија да је $(k-1)\sqrt{1998} = (k+1)\sqrt{n}$, тј. $3(k-1)\sqrt{222} = (k+1)\sqrt{n}$. Одавде, из $\dfrac{3(k-1)}{k+1} = \sqrt{\dfrac{n}{222}}$ следи да је $n = 222$.

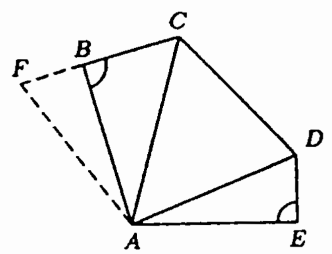
728. Како је

$$\begin{aligned}
\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5 &= \underbrace{11\ldots111}_{1997}\cdot 10^{1999} + \underbrace{22\ldots222}_{1998}\cdot 10 + 5 \\
&= \frac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999} + 2\cdot\frac{10^{1998}-1}{9}\cdot 10 + 5 \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{3996} - 10^{1999} + 2\cdot 10^{1999} - 20 + 45\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{3996} + 2\cdot 5\cdot 10^{1998} + 25\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{1998}+5\right)^2,
\end{aligned}$$

то је

$$\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5 = \left(\frac{\overbrace{1000\ldots05}^{1998}}{3}\right)^2 = \left(\underbrace{333\ldots335}_{1998}\right)^2,$$

што је и требало доказати.



Слика уз задатак 729

729. I решење: Посматрајмо дијагонале AC и AD датог конвексног петоугла $ABCDE$. Како је $AB = AE$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEA = 90°$, могуће је конструисати троугао чија је висина $AB = AE = 1$ и основица $BC + DE = 1$ (користећи троуглове ABC и AED) (слика). Тада је површина овог троугла једнака $\frac{1}{2}$. Конструисани троугао је подударан троуглу ACD, па је површина петоугла $ABCDE$ једнака 1.

II решење: Нека је AF висина троугла ADC. Уведимо ознаке: $FD = x$, $DE = y$. Тада је, из услова задатка, $BC = 1 - y$ и $CF = 1 - x$. Користећи Питагорину теорему добија се: $AC^2 = 1 + (1-y)^2$, $AD^2 = 1 + y^2$ и $AF^2 = AC^2 - (1-x)^2 = AD^2 - x^2$, одакле је $x = y$. Одавде следи да су троуглови AED и ADF подударни, па је $AF = 1$ и $P_{ABCDE} = P_{\triangle ACB} + P_{\triangle ADC} + P_{\triangle AED} = \dfrac{1\cdot(1-x)}{2} + \dfrac{1\cdot 1}{2} + \dfrac{1\cdot y}{2} = 1$.

730. Како су x и y природни бројеви, то је x^y природан број, па и y^{x-y} мора бити природан број. Одавде следи да је $x - y \ge 0$, тј. $x \ge y$.
Када је $x = y$, дата једначина се своди на једначину $x^x = x^0 = 1$, тј. $x = y = 1$.
У случају када је $y = 1$, очигледно је да мора бити $x = 1$.
Нека је $x > y \ge 2$. Тада је дата једначина еквивалентна једначини $\left(\dfrac{x}{y}\right)^y = y^{x-2y}$ (1). Како је $\dfrac{x}{y} > 1$ и y природан број, то мора бити $x - 2y > 0$, тј. $\dfrac{x}{y} > 2$. Одавде следи да и $\dfrac{x}{y}$ мора бити природан број. Једначина (1) се

може записати у облику $\frac{x}{y} = y^{\frac{x-2y}{y}} = y^{\frac{x}{y}-2}$ (2). Како смо закључили да је $y \geq 2$, то из једначине (2) следи да је $\frac{x}{y} \geq 2^{\frac{x}{y}-2}$, па је $\frac{x}{y} \leq 4$. Дакле, $\frac{x}{y} \in \{3,4\}$. За $\frac{x}{y} = 3$, добија се $x = 9$ и $y = 3$, а за $\frac{x}{y} = 4$, добија се $x = 8$ и $y = 2$. Дакле, скуп решења дате једначине је: $\{(1,1),(8,2),(9,3)\}$.

731. Претпоставимо да можемо написати 16 таквих бројева. Како има осам парних и осам непарних остатака при дељену са 16, то је осам од тих бројева парно, а осам непарно. Одавде следи да цифре не могу бити све непарне или све парне. Разматрајмо случај када су дате цифре две парне и једна непарна. (Случај са две непарне и једном парном је сличан.) Можемо написати тачно девет непарних троцифрених бројева са датим цифрама: $\overline{a_1k}$, $\overline{a_2k}, \ldots, \overline{a_9k}$, при чему су $a_1, a_2, \ldots, a_9$ двоцифрени бројеви и k дата непарна цифра.

Међу бројевима A_1, $a_2, \ldots, a_9$ три су непарна, тако да међу осам изабраних непарних троцифрених бројева бар пет бројева имају парни „почетак“ a_i (парну цифру десетица). Нека су a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 парни двоцифрени бројеви и нека су $\overline{a_1k}$, $\overline{a_2k}$, $\overline{a_3k}$, $\overline{a_4k}$ и $\overline{a_5k}$ пет изабраних троцифрених бројева. Бројеви $a_1, \ldots, a_5$ при дељењу са 8 могу имати остатке 0, 2, 4 или 6. Зато је разлика нека два од њих, рецимо $a_1 - a_2$, дељива са 8, па 16 дели $\overline{a_1k} - \overline{a_2k}$, јер је $\overline{a_1k} - \overline{a_2k} = (a_1 - a_2) \cdot 10$.
Дакле, не можемо написати таквих 16 троцифрених бројева.

1999. година

732. $23456 - 19876 + 99999 - 100 = 103479$.

733. $29 + 25 + 22 = 76$.

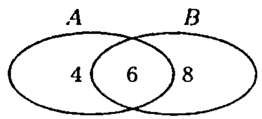
734. Како је $1999 = 83 \cdot 24 + 7$, то ће кроз 1999 сати бити $17 + 7 = 24$ сата, то јест поноћ, па никако не може бити сунчано време.

735. Свих 1000 страница има дебљину $(1000 : 200) \cdot 2 = 10\,mm = 1\,cm$. Књига од 1 999 000 страница ће имати $1\,999 \cdot 1 = 1999\,cm$.

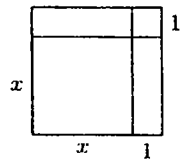
736. $435\,768\,a = 43\,576\,800\,m^2 > 43\,050\,000\,m^2 = 43\,km^2\,5\,ha$.

737. $423 \cdot 54 = 22\,842$.

738. $18 - 6 - 4 = 8$ елемената (слика).



Слика уз задатак 738



Слика уз задатак 741

739. Углови $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ разликују се за 2β. Дакле 2β је $38°41'24''$, а $\beta = 19°20'42''$.

740. 102348 и 987651.

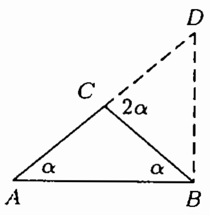
741. Означимо ивицу коцке са x (слика). Свака страна коцке повећала се за два правоугаоника страница x и $1\,cm$ и један квадрат странице $1\,cm$. Takође, површина сваке стране коцке повећала се за $66 : 6 = 11\,cm^2$. Дакле, $2x + 1 = 11$, па је ивица коцке $5\,cm$. Њена запремина повећала се за $6 \cdot 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 \cdot 5 = 216 - 125 = 91\,cm^3$.

742. Како је $xy > 0$ и $z < 0$, то је $xyz < 0$.

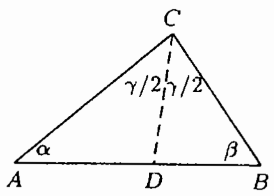
743. $80.25 \cdot 0.16 = 12.84\,kg$.

744. $x = -1$ и $y = -19$, па је $x + y = -20$.

745. Ако је $\sphericalangle BAC = \alpha$, онда је $\sphericalangle BCD = 2\alpha$, а $\sphericalangle ADB = 90° - \alpha$ (слика). Тада је $\sphericalangle ABD = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$, а то је и требало доказати.



Слика уз задатак 745



Слика уз задатак 746

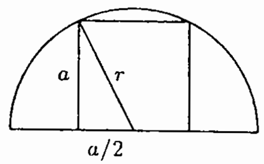
746. Како је $AC > BC$, то је и $\sphericalangle ABC = \beta > \sphericalangle BAC = \alpha$ (слика). Даље је $\sphericalangle ADC = \beta + \frac{\gamma}{2}$, а $\sphericalangle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, па је због $\beta > \alpha$ и $\sphericalangle ADC = \beta + \frac{\gamma}{2} > \sphericalangle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$.

747. Како је $5 + 2\sqrt{7} = \sqrt{25} + \sqrt{28}$, а $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = \sqrt{27} + \sqrt{24}$ и како је $\sqrt{25} > \sqrt{24}$, а $\sqrt{28} > \sqrt{27}$, то је $5 + 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

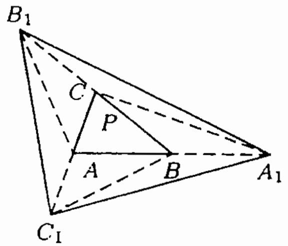
748. $16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$.

749. $13\,728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 22 \cdot 26 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 22 \cdot 24 \cdot 26$.

750. $P = a^2$, а како је $a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} = r^2$, то је $a^2 = \frac{4r^2}{5}$, па је $P = \frac{4r^2}{5}$ (слика).



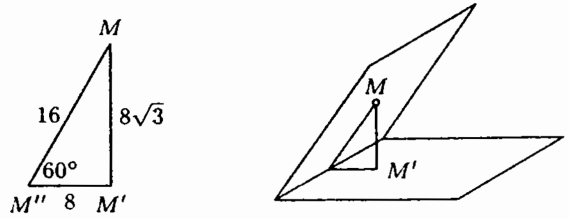
Слика уз задатак 750



Слика уз задатак 751

751. Површина троугла $A_1B_1C_1$ је седам пута већа од површине троугла ABC и износи $13\,993\,cm^2$ (слика). Заиста, тежишна дуж дели троугао на два троугла једнаких површина. Зато је $P_{\triangle A_1BB_1} = 2P_{\triangle A_1BC} = 2P_{\triangle ABC}$ и слично, $P_{\triangle B_1CC_1} = 2P_{\triangle C_1AA_1} = 2P_{\triangle ABC}$.

752. Тражено одстојање је $16\,cm$. Заиста, ако су M' и M'' нормалне пројекције тачке M редом на страну диедра и на ивицу, тада је: $\sphericalangle MM'M'' = 90°$, $\sphericalangle MM''M' = 60°$ (слика).

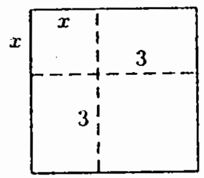


Слика уз задатак 752

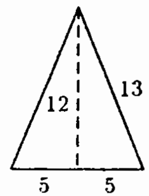
753. Ако је дужина пута x, онда је $\frac{4}{9}x + \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{9}x + 330 = x$. Дакле, $16x + 9x + 330 \cdot 36 = 36\,x$, па је $11\,x = 330 \cdot 36$, а $x = 1080\,km$.

754. Решења су $x_1 = 0.35$ или $x_2 = 0.15$.

755. Нека је основна ивица призме једнака x (слика). Како је $(x+3)^2 \cdot 10 = x^2 \cdot 10 + 210$, то је $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 21$, па је $x = 2$. Површина призме је $88\,cm^2$, а запремина $40\,cm^3$.



Слика уз задатак 755



Слика уз задатак 756

756. Дужа висина датог троугла одговара мањој страници, дакле основици и износи $12\,cm$ (слика). Како је висина сличног троугла $24\,cm$, то је коефицијент сличности 2, па је основица другог троугла $20\,cm$, а површина $(20 \cdot 24) : 2 = 240\,cm^2$.

757. а) 203 567 и 876 532; б) 200 022 и 888 777.

758. Ако је у другом сандуку x јабука, у првом је $x+1999$. После преношења, у првом сандуку ће бити $x+1999-1000 = x+999$, а у другом $x+1000$ јабука. Дакле, једна јабука је више у другом сандуку.

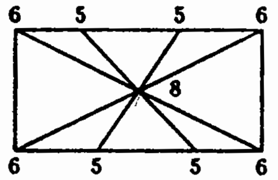
759. I решење: Површина просторије је $12 \cdot 27 = 324\,m^2 = 324 \cdot 10\,000\,cm^2 = 3\,240\,000\,cm^2$. Површина једне плочице је $15 \cdot 15 = 225\,cm^2$. Према томе, потребно је $3\,240\,000 : 225 = 14\,400$ плочица.

II решење: Како је $1200\,cm : 15\,cm = 80$ и $2700\,cm : 15\,cm = 180$, то је број потребних плочица $80 \cdot 180 = 14\,400$.

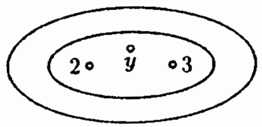
760. Једно од могућих решења дато је на слици.

30	35	32
33	38	37
36	31	34

761. Дужи има $(4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 8) : 2 = 26$, а троуглова $8 + 4 + 2 + 4 = 18$ (слика).



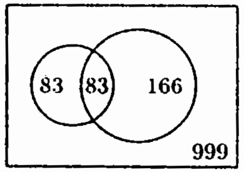
Слика уз задатак 761



Слика уз задатак 762

762. Како је $B \subset A$, то мора бити $x = 3$. Тада y може бити било који од бројева 1, 5 или 9 (слика).

763. Бројева који су мањи од 1 000, а дељиви су са 4 има $1000 : 4 - 1 = 250 - 1 = 249$; дељивих са 6 има $996 : 6 = 166$, а дељивих са 4 и 6, тј. дељивих са 12 има $996 : 12 = 83$. Према томе, бројева који су мањи од 1 000, а нису дељиви ни са 4 ни са 6 има $999 - 249 - 166 + 83 = 667$.



Слика уз задатак 763

764. Број x је елемент скупа $\{4, 5, 6\}$.

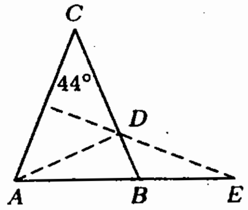
765. Први радник за 1 сат ископа $\frac{2}{25}$ дужине канала, а други $\frac{2}{23}$ дужине канала. Како је $\frac{2}{23} > \frac{2}{25}$, то други радник има бољи учинак.

766. Очигледно је $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 180°$. Дакле, $2\alpha = 180°$, а $\alpha = 90°$. Како је $\beta = 90° : 8$, то је $\beta = 11°15'$.

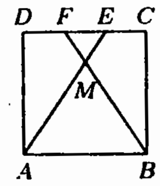
767. Бициклиста је првог дана прешао 25%, а другог 30% пута, што укупно износи 55%. Дакле, преосталих 45% износи 180 km, па је 1% једнако $180\,km : 45 = 4\,km$. Цео пут је тада $4\,km \cdot 100 = 400\,km$.

768. $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$.

769. Израчунавањем углова ΔABD и ΔBDE, добија се: $\sphericalangle BAD = 24°$, $\sphericalangle ABD = 68°$, $\sphericalangle BED = 22°$, $\sphericalangle DBE = 112°$ (слика). Тада је $AD = CD$ (јер је ΔACD једнакокрак); $BD < AD$ (јер је $\sphericalangle BAD = 24° < \sphericalangle ABD = 68°$); $BD < DE$ (јер је $\sphericalangle BED = 22° < \sphericalangle DBE = 112°$); $AD < DE$ (јер је $\sphericalangle BAD = 24° > \sphericalangle BED = 22°$). Дакле, $BD < AD = CD < DE$.



Слика уз задатак 769



Слика уз задатак 770

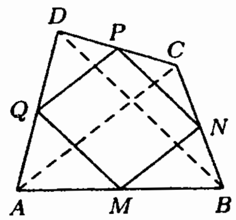
770. Троуглови AED и BFC су подударни ($AD = BC = a$; $\sphericalangle ADE = \sphericalangle BCF = 90°$ и $DE = CF = \frac{2a}{3}$). Из ове подударности је $\sphericalangle AED = \sphericalangle BFC$, па је и $\sphericalangle MEF = \sphericalangle MFE$. Дакле, троугао MEF је једнакокрак.

771. Ако би из сваког разреда било 24 или мање ученика, укупан број такмичара би био мањи или једнак $5 \cdot 24 = 120$. Како такмичара има тачно 123, то је број такмичара бар из једног разреда већи од 24.

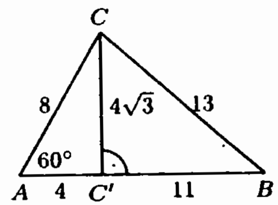
772. Нека је тражено снижење $x\%$. Тада је $25000(1 - x)(1 - x) = 16000$. Тада је $(1 - x)^2 = \frac{16000}{25000} = \frac{16}{25}$. То значи да је $1 - x = \frac{4}{5}$, па је тражено снижење $x = \frac{1}{5} = 20\%$.

773. Очигледно је $\sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$. Тада је $\sqrt{6 + \sqrt{6}} < \sqrt{6 + 3} = \sqrt{9} = 3 < 3.00001$.

774. Дуж MN је средња линија троугла ABC, а дуж PQ средња линија троугла ACD (слика). Одавде следи да су дужи MN, PQ и $\frac{AC}{2}$ подударне и паралелне. Према томе, четвороугао $MNPQ$ је паралелограм.



Слика уз задатак 774



Слика уз задатак 775

775. Из правоуглог троугла ACC' је $AC' = 4\,cm$ (слика). Тада је $BC' =$

$15 - 4 = 11\,cm$, а висина $CC' = 4\sqrt{3}\,cm$. Из Питагорине теореме је $BC^2 = (BC')^2 + (CC')^2 = 121 + 48 = 169$, па је $BC = 13\,cm$. Површина троугла је $P = (15 \cdot 4\sqrt{3}) : 2 = 30\sqrt{3}\,cm^2$. Из површине су висине BB' и AA' редом једнаке $\frac{15\sqrt{3}}{2}\,cm$ и $\frac{60\sqrt{3}}{13}\,cm$.

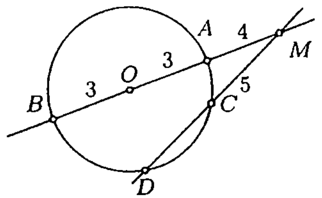
776. Како су изрази $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ и $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ ненегативни, то су апсолутне вредности датих израза сами ти изрази, а њихов збир је $a^2 + b^2$.

777. Ако се из друге цистерне одлије x литара на сат, онда се из прве одлије $3x$ литара на сат. Дакле, $540 - 6 \cdot 3x = 360 - 6 \cdot x - 60$. Решавањем једначине добија се $x = 20$ литара, па се из прве цистерне сваког сата одлије 60 литара, а из друге 20 литара воде.

778. Дата неједначина је еквивалентна са $(x-3)^2 - x(x-3) = (x-3)(x-3-x) = (x-3)(-3) < 0$. Дакле, $x - 3 > 0$, па је $x > 3$ решење дате неједначине.

779. Дијагонала основе квадра је $10\,cm$, па је и висина $10\,cm$. Површина квадра је $376\,cm^2$, а запремина $480\,cm^3$.

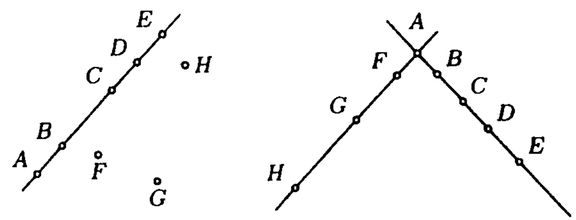
780. Троуглови MAD и MCB су слични (слика), јер је $\sphericalangle AMD = \sphericalangle BMC$ и $\sphericalangle MDA = \sphericalangle MBC$, (као периферијски над тетивом AC). Из ове сличности је $AM : MD = MC : MB$, па је $MD = (MA \cdot MB) : MC = (4 \cdot 10) : 5 = 8\,cm$. Тада је $CD = MD - MC = 8 - 5 = 3\,cm$.



Слика уз задатак 780

781. Највише троуглова има ако су тачке F, G, H неколинеарне и ако су у паровима неколинерне са тачкама A, B, C, D, E (слика). Тада је број троуглова $10 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 = 46$ (на правој p има 10 дужи од којих свака са 3 преостале тачке F, G и H даје 30 троуглова, три дужи FG, GH и FH са 5 тачака праве p граде 15 троуглова и додаје се троугао FGH).

Најмање троуглова има ако су тачке F, G, H колинеарне и ако су колинеарне са једном од тачака на правој p, на пример A. Тада је број троуглова $10 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 42$ (на правој p има 10 дужи од којих свака са 3 преостале тачке F, G и H даје 30 троуглова, три дужи FG, GH и FH са 4 тачке праве p граде 12 троуглова, јер овакви троуглови са тачком A не постоје, као ни троугао FGH).



Слика уз задатак 781

782. Сваког минута први моторциклиста прелази $200\,m$ више од другог. То значи да за $66\,km = 66000\,m$ треба $66000 : 200 = 330$ минута вожње до сусрета. Дакле, први моторциклиста за то време пређе $330 \cdot 1\,km = 330\,km$, а други $66\,km$ мање, тј. $264\,km$. Према томе, растојање између места A и места B је $330 + 264 = 594\,km$.

783. Површина баште је $4 \cdot 5 = 20$ пута мања од површине винограда. Површина баште је $199900\,m^2 : 20 = 9995\,m^2$.

784. Нека од могућих решења су: $(2+4-6) \cdot 8 \cdot 10 = 9-9 = 0$; $2+4-6+8+10 = 9+9 = 18$; $(2+4) : 6 + 8 \cdot 10 = 9 \cdot 9 = 81$.

785. Постоје четири решења: $222 \cdot 9 + 1 = 1999$; $333 \cdot 6 + 1 = 1999$; $666 \cdot 3 + 1 = 1999$ и $999 \cdot 2 + 1 = 1999$.

786. Ако је Миша 8 пута победио компјутер, он је добио $8 \cdot 5 = 40$ жетона, што са 5 које је сам купио износи 45 жетона. Дакле, Миша је могао одиграти највише 45 игара. Према томе, Горан је био у праву.

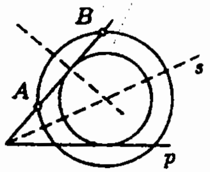
787. I решење: Како је $5.7 + 12.3 = 18$ и како је $18 : 4.5 = 4$, то следи да је Јоца замислио број 4.
II решење: Ако је замишљени број x, онда је $x \cdot 4.5 - 12.3 = 5.7$. Решење једначине је $x = 4$.

788. На преостали део канапа од $1.5\,m$ најпре додамо $0.5\,m$ и добијемо $2\,m$. Дакле, други део канапа је $2 \cdot 2\,m = 4\,m$. Опет додамо $0.5\,m$ и добијемо $4.5\,m$. Дакле, цео канап је $2 \cdot 4.5\,m = 9\,m$.

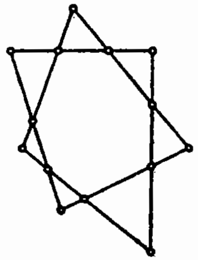
789. Број је дељив са 36 ако је дељив са 4 и са 9, па његов двоцифрени завршетак мора бити дељив са 4, а збир цифара је број дељив са 9. Како је $0+1+2+3+4+5+6 = 21$, то је најмањи могући збир цифара једнак 27. Ако је најмањи такав број $1023***$, онда је збир преостале три различите цифре 21. Дакле, могући су само следећи случајеви: $9+8+4$; $9+7+5$; $8+7+6$. Најмањи такав број је дакле 1 023 768.

790. Кружнице k_1 и k_2 имају заједнички центар O (слика). Како кружница k_1 додирује праве AB и p, то се O налази на симетрали угла који чине ове две праве. Како кружница k_2 садржи тачке A и B, то се тачка O налази на симетрали дужи AB. Према томе, тачка O је пресек симетрале угла између правих AB и p и симетрале дужи AB. Кружница k_1 има центар O и полупречник једнак растојању тачке O од праве p, а кружница k_2 има центар O и полупречник $OA = OB$.

Задатак има два решења, јер праве p и AB имају две симетрале угла.



Слика уз задатак 790


Слика уз задатак 791

791. Једно од могућих решења дато је на слици.

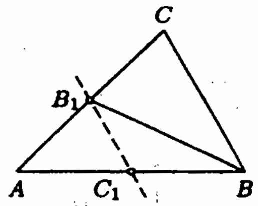
792. Како је $\alpha = 0.4\,\beta$ и $\gamma = 4\,\alpha$, то је $\gamma = 4 \cdot 0.4\beta = 1.6\beta$. Тада је $\alpha + \beta + \gamma = 0.4\,\beta + \beta + 1.6\,\beta = 3\beta = 180°$, па је $\beta = 60°$. Дакле, $\alpha = 0.4\,\beta = 0.4 \cdot 60° = 24°$ и $\gamma = 4\,\alpha = 4 \cdot 24° = 96°$.

793. Нека су и Јанко и Марко имали по x динара. Марко је купио $\frac{x}{40}$ килограма бомбона, а Јанко $\frac{x}{60}$ килограма бомбона. Када се бомбоне помешају добије се $\frac{x}{40} + \frac{x}{60} = \frac{3x}{120} + \frac{2x}{120} = \frac{5x}{120} = \frac{x}{24}$ килограма бомбона. Како је за њих плаћено $x + x = 2\,x$ динара, то је цена једног килограма мешавине једнака $2\,x : \frac{x}{24} = 48$ динара.

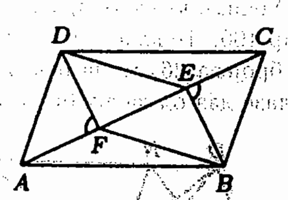
794. Анализа: Нека је B_1 средиште странице AC (слика). Тачка B_1 припада средњој линији C_1B_1 и од тачке B је удаљена $5\,cm$.

Конструкција: Најпре се конструише дуж $AB = 4\,cm$ и код темена B угао $\beta = \sphericalangle ABp = 60°$. Затим се конструише тачка C_1, која представља средиште дужи AB. Средња линија C_1B_1 је на правој q која је паралелна са краком BC угла β. Тачка B_1 добија се у пресеку праве q и кружнице $k\,(B,\, r = 5\,cm)$. Теме C је пресек крака Bp и праве AB_1.

795. Слика: $\Delta AFD \cong \Delta CEB$ ($\sphericalangle FAD = \sphericalangle ECB$- као углови са паралелним крацима; $AD = BC$; $\sphericalangle ADF = \sphericalangle CBE$ - као углови са паралелним крацима, јер је $DF \parallel BE \perp AC$). Из подударности је $DF \# BE$ (симбол # је ознака за паралелне и једнаке дужи). Према томе четвороугао $BEDF$ је паралелограм.



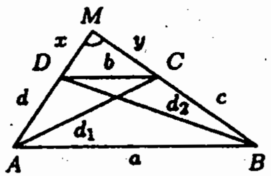
Слика уз задатак 794



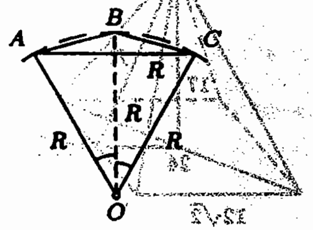
Слика уз задатак 795

796. Од свих простих бројева само један, број 2, је паран, а сви остали су непарни. Ако су свих 1999 простих сабирака непарни њихов збир ће бити непаран. Према томе, један од датих сабирака је сигурно 2, а осталих 1998 су непарни. Према томе, производ тих 1999 бројева је паран, јер је један чинилац број 2. Ако саберемо 1998 непарних простих бројева збир је паран број. Ако саберемо 1997 непарних бројева са бројем 2, збир је непаран број.

797. Нека се краци трапеза секу у тачки M (слика). Тада је $\sphericalangle AMB$ прав. Нека су мерни бројеви основице трапеза a и b, кракова c и d, дијагонала d_1 и d_2, а дужи DM и CM, x и y. Из Питагорине теореме је $a^2 + b^2 = (x+d)^2 + (c+y)^2 + x^2 + y^2 = (x+d)^2 + y^2 + (c+y)^2 + x^2 = d_1^2 + d_2^2$.



Слика уз задатак 797



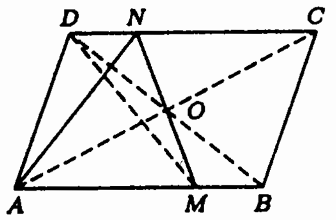
Слика уз задатак 798

798. Површина правилног дванаестоугла једнака је површини 6 подударних делтоида (слика). Површина једног делтоида је $6 \cdot 6 : 2 = 18\,cm^2$, па је површина дванаестоугла $6 \cdot 18 = 108\,cm^2$.

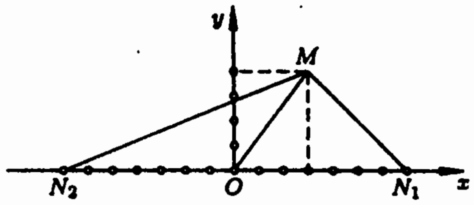
799. Како је $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = (x+1)^2 + (y-3)^2 = 0$ и како је збир квадрата једнак 0 ако и само ако је сваки од сабирака једнак 0, то је $x + 1 = 0$ и $y - 3 = 0$. Дакле, $x = -1$ и $y = 3$, па је $x^{1999} + 1999y = (-1)^{1998} + 3 \cdot 1999 = 1 + 5997 = 5998$.

800. Нека права MO сече страницу CD у тачки N (слика). Из услова задатка је $\sphericalangle MAD = \sphericalangle AMO$, па је трапез $AMND$ једнакокрак. Зато су дијагонале трапеза подударне, тј. $AN = MD$. Како је $\Delta AND \cong \Delta CMB$ ($AD = BC$, $\sphericalangle ADN = \sphericalangle MBC$, $DN = MB$- као дужи централно-симетричне у односу на тачку O), то је из подударности $AN = MC$. Због $AN = MD$, следи да је $MC = MD$.

801. Уочимо класе бројева тако да сваку класу чине два непарна броја чији је збир 100. Те класе су: $(1,99)$; $(3,97)$; $\ldots(47,53)$; $(49,51)$. Како класа има 25, а бројева 26, то на основу Дирихлеовог принципа постоји класа у којој се налазе два од датих бројева. Та два непарна броја имају збир 100.

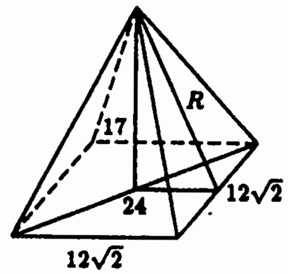


Слика уз задатак 800

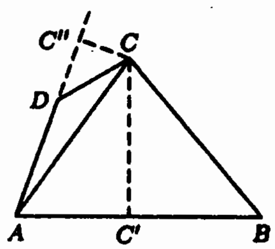


Слика уз задатак 802

802. Висина троугла OMN је 4 (слика). Да би површина троугла OMN била 14, то основица ON мора бити 7. Дати услов задовољавају две тачке: $N_1(7,0)$ и $N_2(-7,0)$. Једначине тражених правих су:
$OM: y = \frac{4}{3}x$; $MN_1: y = -x+7$; $MN_2: y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$.



Слика уз задатак 803



Слика уз задатак 805

803. Како је површина дијагоналног пресека $204\,cm^2$, а висина пирамиде $17\,cm$, то је дијагонала основе једнака $2 \cdot 204 : 17 = 24\,cm$ (слика). Тада је основна ивица пирамиде $12\sqrt{2}\,cm$. Бочна висина пирамиде је $h^2 = 289+72 = 361$, па је $h = 19\,cm$. Површина пирамиде је $P = B + M = 288 + 4 \cdot 12\sqrt{2} \cdot 19 : 2 = (288 + 456\sqrt{2})\,cm^2$, а запремина $V = 288 \cdot 17 : 3 = 1632\,cm^3$.

804. Број чији декадни запис садржи само цифре 2 и 6 у било ком поретку је облика $4k+2$, јер његов двоцифрени завршетак може бити 22, 26, 62 или 66. Дакле, $x^2 - y^2 = 4k+2$, па је $(x+y)(x-y) = 2(2k+1)$, што значи да је један од бројева $x+y$ и $x-y$ паран, а други непаран. Како је то немогуће, јер су $x+y$ и $x-y$ бројеви исте парности, то једначина нема решења.

805. Очигледно да за површину конвексног четвороугла $ABCD$ важи $P = AB \cdot CC' : 2 + AD \cdot CC'' : 2 \le AB \cdot BC : 2 + AD \cdot CD : 2$ (слика). Дакле, $AB \cdot BC + CD \cdot DA \ge 2P$.

806. Први топ се може распоредити на 64 поља, други на преосталих $64 - 15 = 49$ ненападаних поља, а трећи на преосталих $49 - 13 = 36$ ненападаних поља. Дакле, три топа се могу разместити на $64 \cdot 49 \cdot 36 = 112\,896$ начина.

807. Како је $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, то су за једначину $x^2 - y^2 = 5^{1999}$ могући следећи случајеви:

$x+y$	5^{1999}	5^{1998}	5^{1997}	$\ldots$	5^{1001}	5^{1000}
$x-y$	1	5	5^2	$\ldots$	5^{998}	5^{999}

Дакле, једначина $x^2 - y^2 = 5^{1999}$ има 1000 решења у скупу природних бројева. Како бројеви $x+y$ и $x-y$ морају бити исте парности, за једначину $x^2 - y^2 = 4^n = 2^{2n}$ су могући следећи случајеви:

$x+y$	2^{2n-1}	2^{2n-2}	2^{2n-3}	$\ldots$	2^{n+2}	2^{n+1}
$x-y$	2	2^2	2^3	$\ldots$	2^{n-2}	2^{n-1}

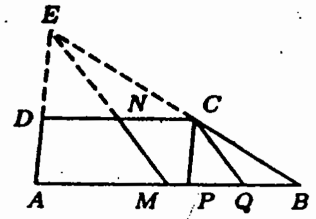
То значи да једначина $x^2 - y^2 = 4^n$ има $n-1$ решење.
Према томе, $n - 1 = 1000$, па је $n = 1001$.

808. Претпоставимо супротно, тј. да је могуће написати деветоцифрени број од кога се брисањем цифара никада не добија најмање двоцифрени квадрат. У том броју, цифра 1 је иза цифре 6, јер због 16, цифра 6 не сме бити иза цифре 1. Цифра 4 мора бити испред цифре 6, јер ако би била иза, онда би се брисањем преосталих цифара добио број 64. Слично и цифра 9 мора бити испред цифре 4, јер ако би било супротно, онда би се брисањем преосталих цифара добио број 49. Дакле, поредак цифара је несумњиво $\ldots 9 \ldots 4 \ldots 6 \ldots 1 \ldots$
Ако се избрише цифра 4 и све остале цифре, остаје број $961 = 31^2$, што је контрадикција са почетном претпоставком.

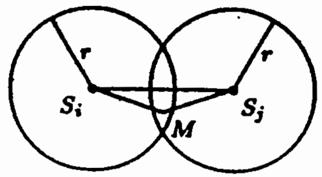
809. Нека је Јелена одабрала бројеве чији је збир A, онда су Ивану остали бројеви чији је збир B. Како је $A+B = 1+3+5+7-8-12+13-14-16+21 = 0$, то је $A = -B$, па је $|A| = |B|$. Дакле, ма како Јелена бирала бројеве никада не може победити, јер је апсолутна вредност збира њених бројева једнака апсолутној вредности збира Ивanових бројева.

810. Нека је P тачка дужи AB таква да је $CP \parallel AD$ и нека је Q тачка дужи AB таква да је $CQ \parallel MN$ (слика). Како је $AP = CD$, то је $BP = AB - CD$. Како је $MN = CQ$ и $MN = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}BP$, то је $CQ = \frac{1}{2}BP$. Троуглови ABE и BCP су слични и како је M средиште AB, то је и Q средиште BP (лако доказујемо да права MN садржи тачку E). Дакле, $PQ =$

$QB = QC$, што значи да је троугао BCP правоугли, па је и троугао AEB правоугли, а $\sphericalangle AEB = 90°$.



Слика уз задатак 810



Слика уз задатак 811

811. Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_n$ центри датих кругова полупречника r (слика). Како тачка M припада свим круговима, то је $S_1M < r$, $S_2M < r, \ldots, S_nM < r$. Како је тачка S_1 изван свих осталих кругова, то је $S_1S_2 > r$, $S_1S_3 > r, \ldots, S_1S_n > r$. Слично је $S_iS_j > r$. Дакле, у троуглу S_iS_jM је $S_iS_j > r$, $S_iM < r$ и $S_jM < r$. Наспрам највеће странице је највећи угао, па је $\sphericalangle S_iMS_j > 60°$. Ако би било 6 тачака, тада би за збир дисјунктних углова важило $\sphericalangle S_1MS_2 + \sphericalangle S_2MS_3 + \sphericalangle S_3MS_4 + \sphericalangle S_4MS_5 + \sphericalangle S_5MS_6 + \sphericalangle S_6MS_1 > 6 \cdot 60° = 360°$, што је немогуће. Према томе, тачака је највише 5.

812. Одузимањем друге од прве дате једнакости и треће од друге, редом се добија $a^3-b^3+(a-b)x = 0$ и $b^3-c^3+(b-c)x = 0$, тј. $(a-b)(a^2+ab+b^2+x) = 0$ и $(b-c)(b^2+bc+c^2+x) = 0$. Како је $a \neq b$ и $b \neq c$, то су ове једнакости могуће само ако је $a^2+ab+b^2+x = 0$ и $b^2+bc+c^2+x = 0$. Одузимањем последњих добијених једнакости добија се $a^2+ab-bc-c^2 = 0$, тј. $(a-c)(a+c)+b(a-c) = 0$. Тада је $(a-c)(a+c+b) = 0$, а како је $a \neq c$, то је $a+b+c = 0$.

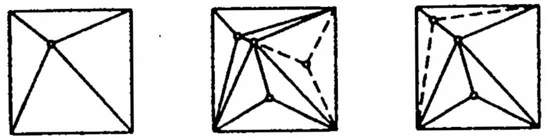
813. Како је $A_0 = 2^0+3^2+5^2 = 35$, за $n = 0$, то највећи заједнички делилац бројева $A_0, A_1, \ldots, A_n$ може бити само 35, 7, 5 или 1.
За $n = 1$ је $A_1 = 2^3+3^8+5^8 = 397194$, па бројеви 5 и 35 не могу бити заједнички делиоци, јер број 397194 није дељив са 5. Дакле, остаје да се провери дељивост бројем 7.
Како је

$$\begin{aligned} A_n &= 2^{3n}+3^{6n+2}+5^{6n+2} = (2^3)^n + 3^2\cdot(3^3)^{2n} + 5^2\cdot(5^3)^{2n} \\ &= 8^n + 9\cdot 27^{2n} + 25\cdot 125^{2n} \end{aligned}$$

и како је $8 \equiv 1 (\mathrm{mod} 7)$, $27 \equiv (-1)(\mathrm{mod} 7)$ и $125 \equiv (-1)(\mathrm{mod} 7)$, то је $A_n \equiv 1^n + 9\cdot(-1)^{2n} + 25\cdot(-1)^{2n} \ (\mathrm{mod} 7)$, тј. $A_n = 1+9+25 \equiv 35 \equiv 0(\mathrm{mod} 7)$. Према томе, највећи заједнички делилац бројева $A_0, A_1, \ldots, A_n$ је број 7.

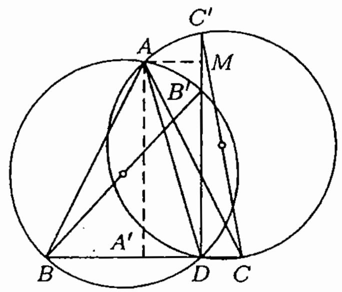
814. Докажимо да се квадрат може разделити на троуглове са теменима из скупа M, и одредимо број тих троуглова. Оба циља ћемо постићи додавањем једне по једне од 1999 тачака. Прва тачка разлаже квадрат на 4 троугла

(лева слика). Свака нова тачка припада унутрашњости неког претходно одређеног троугла (слика у средини) или припада страници нека два суседна претходно одређена троугла (десна слика). У првом случају додавање нове тачке увећава број троуглова за 2 (један стари замењује се са 3 нова), а у другом случају додавањем нове тачке се поново број троуглова увећава за 2 (два стара замењују се са 4 нова). Зато ће додавањем последње, 1999-те тачке квадрат бити раздељен на $4 + 1998 \cdot 2 = 4000$ троуглова. Како је површина квадрата једнака $20 \cdot 20 = 400$, то бар један од ових троуглова има површину мању или једнаку $\frac{400}{4000} = \frac{1}{10}$.

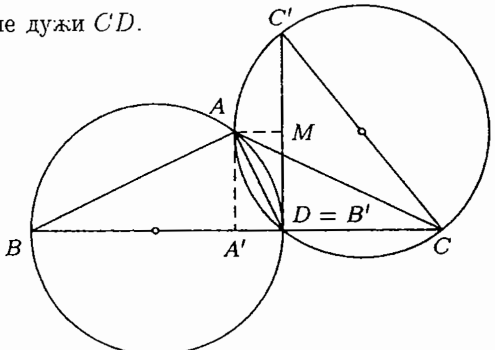


Слика уз задатак 814

815. Нека су O_1 и O_2 редом центри датих кругова k_1 и k_2. Како је $\sphericalangle CAD < \sphericalangle BAD$, то је $\sphericalangle CAD < \frac{\pi}{2}$. Зато су тачке O_2 и A са исте стране дужи CD, па су и тачке C' и A са исте стране дужи CD.



Слика (а) уз задатак 815



Слика (б) уз задатак 815

(а) Нека је $\sphericalangle BAD < \frac{\pi}{2}$ (слика (а)). Тада су тачке O_1 и A са исте стране дужи BD, па су и тачке B' и A са исте стране дужи BD.

(1) Како је BB' пречник круга k_1, то је $\sphericalangle BDB' = 90°$. Слично је CC' пречник круга k_2, па је и $\sphericalangle CDC' = 90°$. Одавде следи да су тачке B' и C' колинеарне, јер је $B'D \perp BC$ и $C'D \perp BC$.

(2) Нека је $\sphericalangle ABB' = \varphi$. Тада је и $\sphericalangle ADB' = \varphi$, као периферијски угао над истим луком AB' круга k_1. Ако је $\sphericalangle ADB' = \sphericalangle ADC' = \varphi$, онда је и $\sphericalangle ACC' = \varphi$, као периферијски углови над истим луком AC' круга k_2.

(3) Троуглови ABB' и ACC' су подударни, јер су оба правоугла ($\sphericalangle BAB' = 90° = \sphericalangle CAC'$), $AB = AC$ и $\sphericalangle ABB' = \sphericalangle ACC'' = \varphi$. Из подударности ових троуглова следи да је $AB' = AC'$, па је троугао $AB'C'$ једнакокрак.

(4) Како је $B'M = C'M$, то је $AM \perp B'C''$, па је $AM \parallel BC$. Тада је $P_{\triangle BMC} = \dfrac{BC \cdot DM}{2} = \dfrac{BC \cdot AA'}{2} = P_{\triangle ABC}$. Дакле, површина троугла BMC је константна и не зависи од положаја тачке D.

(б) Ако је $\sphericalangle BAD = \dfrac{\pi}{2}$, као и $\sphericalangle BAD > \dfrac{\pi}{2}$, распоред тачака на правој MD није исти као у случају (а), али тврђење задатка и тада важи (слика (б)). Решење задатка у овом случају препуштамо читаоцу.

2000. година

816. Ученик је добио збир већи за $842 - 379 = 463$.

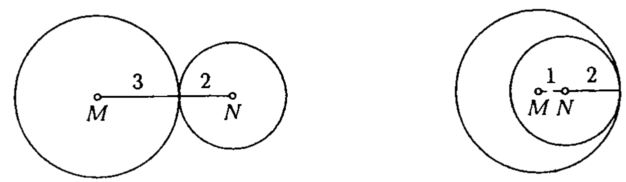
817. Нада је првог и трећег месеца заједно потрошила $2 \cdot 1350 - 856 - 800 = 2700 - 1656 = 1044$ динара.

818. Решење је: $x = 10^5 - 2000 = 100000 - 2000 = 98000$.

819. Обим једног правоугаоника је $360\,cm : 3 = 120\,cm$. Пола обима је $60\,cm$, па је дужина правоугаоника $35\,cm$, а ширина $25\,cm$.

820. На датој слици има 18 троуглова.

821. Очигледно је $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ и $A \cap B = \{3\}$. Тада је $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = \{1,2\}$ и $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B = \{1,2\}$.



Слика уз задатак 822

822. Ако се кружнице додирују споља $MN = 3\,cm + 2\,cm = 5\,cm$, а ако се додирују изнутра онда је $MN = 3\,cm - 2\,cm = 1\,cm$ (слика).

823. Како је $1 + 1000 = 2 + 999 = 3 + 998 = \cdots = 1001$ и како таквих парова има $1000 : 2 = 500$, то је збир свих природних бројева од 1 до 1000 једнак $500 \cdot 1001$. Како је $1001 = 11 \cdot 7 \cdot 13$, то је тражени збир дељив са 7.

824. Трећина угла α и трећина угла β износе заједно $180° : 3 = 60°$. Како је пет шестина угла α, за три шестине веће од трећине тог угла то значи да три шестине угла α износе $90° - 60° = 30°$, па је једна шестина $10°$, а цео угао $\alpha = 60°$. Дакле, угао β је $120°$.

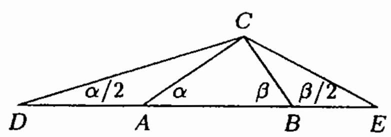
825. Ради се о сабирању $18 + 180 + 1802 = 2000$.

826. Како су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни то су подударни и сви њихови елементи, дакле $AB = A'B'$, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$ и $BC = B'C'$. Тада су и троуглови BCM и $B'C'M'$ подударни, јер је $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A'B'C'$, $BC =$

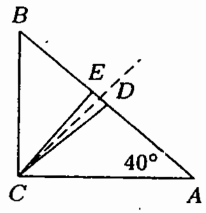
$B'C'$ и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle B'C'M'$. Из подударности је $BM = B'M'$. Тада је и $AM = AB - BM = A'B' - B'M' = A'M'$.

827. Да би број био дељив са 36 мора бити дељив са 4 и 9. Према томе двоцифрени завршетак $\overline{0b}$ може бити 00, 04 или 08, па је $b = 0$, $b = 4$ или $b = 8$. Како број мора бити дељив и са 9, то збир његових цифара мора бити дељив са 9. Дакле, $a = 9 - 2 - 0 = 7$ или $a = 9 - 2 - 4 = 3$ или $a = 18 - 2 - 8 = 8$. Тражени бројеви су: 720000, 320004, 820008.

828. Троуглови ACD и BCE су једнакокраки (слика). Због тога је $\sphericalangle DCA = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle BCE = \frac{\beta}{2}$. Како је $\sphericalangle DCE = \sphericalangle DCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCE$, то је $\sphericalangle DCE = \frac{\alpha}{2} + 90° + \frac{\beta}{2} = 90° + 45° = 135°$.



Слика уз задатак 828

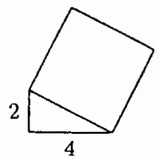


Слика уз задатак 830

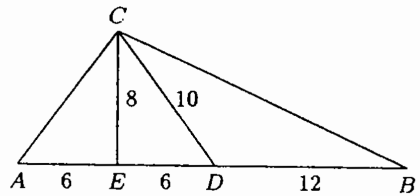
829. Како је $|x + 2| \geq 0$, то дату неједначину задовољавају сви природни бројеви за које је $5x - 15 > 0$, а не задовољавају они за које је $5x - 15 \leq 0$. Дакле, $5x \leq 15$, тј. $x \leq 3$. Према томе, тражени бројеви су 1, 2 и 3.

830. Нека је $\sphericalangle CAB = 40°$ и нека тежишна дуж сече хипотенузу у тачки D, висина у тачки E, а симетрала правог угла у тачки F (слика). Тада је троугао DCA једнакокраки ($AD = BD = CD$), па је и $\sphericalangle DCA = 40°$. Како је $\sphericalangle BCF = \sphericalangle ACF = 45°$, то је $\sphericalangle ECF = \sphericalangle BCF - \sphericalangle BCE = 45° - 40° = 5°$. Дакле, $\sphericalangle ECF = \sphericalangle DCF = 5°$.

831. Очигледно је $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \sqrt{50} + \sqrt{48}$ и $3\sqrt{5} + 7 = \sqrt{45} + \sqrt{49}$. Како је $50 > 49$ и $48 > 45$, то је и $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5} + 7$.



Слика уз задатак 832



Слика уз задатак 834

832. Страница квадрата је $\sqrt{20}\,cm = 2\sqrt{5}\,cm$, па тражени квадрат треба

конструисати над хипотенузом правоуглог троугла чије су катете $4\,cm$ и $2\,cm$ (слика). Могућа су и друга решења.

833. Број дечака је за 252 већи од броја девојчица, а то је 30% укупног броја ученика (јер дечака има 65%, а девојчица 35%). Зато је 10% броја ученика једнако 84, па је у тој школи било 840 ученика: 294 девојчица и 546 дечака.

834. Нека је дата страница $AB = 24\,cm$ и нека тежишна дуж сече AB у тачки D, а висина у тачки E (слика). Тада је, користећи Питагорину теорему, $DE = 6\,cm$, па је $BC = \sqrt{8^2 + 18^2} = \sqrt{388}\,cm$. Слично је $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,cm$. Дакле, обим троугла је $O = 24 + 10 + \sqrt{388} = (34 + 2\sqrt{97})\,cm$.

835. Славина A за 1 сат напуни $\frac{1}{12}$ базена, а славина B напуни $\frac{1}{15}$ базена. Одводна цев за један сат испразни $\frac{1}{10}$ базена. Дакле, за један сат напуниће се $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$ базена. Цео базен ће се напунити за 20 сати.

836. Сваке две праве одређују једну раван, па је укупан број равни $2000 \cdot 1999 : 2 = 1\,999\,000$ равни.

837. Ако је Лека добио x динара, Жарко је добио $1416 - x$. Тада је $\frac{3}{7}$ Лекиног дела једнако са $\frac{5}{8}$ Жарковог дела, тј. $\frac{3}{7}x = \frac{5}{8}(1416 - x)$. Решавањем једначине се добија да је $x = 840$. Дакле, Лека је добио 840, а Жарко 576 динара.

838. Коцка ивице a има површину $6a^2$ и запремину a^3. Како коцка ивице $1.3\,a$ има површину $6 \cdot 1.69\,a^2$ и запремину $2.197\,a^3$, то се површина коцке повећала за 69%, а запремина за 119.7%.

839. Углови троугла су $27°$, $117°$ и $36°$.

840. Како је $n^2 + 2n + 2000 = k^2$, то је $n^2 + 2n + 1 + 1999 = k^2$. Дакле, $(n+1)^2 + 1999 = k^2$, тј. $k^2 - (n+1)^2 = 1999$. Тада је $(k+n+1)(k-n-1) = 1999$. Број 1999 је прост, па је $k + n + 1 = 1999$ и $k - n - 1 = 1$. Решење је $n = 998$.

841. За један сат бродови се приближе за $22\,km + 28\,km = 50\,km$. За 40 сати они пређу $40 \cdot 50\,km = 2000\,km$.

842. После размене кликера Пера и Васа ће имати по x кликера, а Огњен $x + x = 2x$ кликера, што укупно износи $x + x + 2x = 4x = 160$ кликера. Сада Пера и Васа имају по 40, а Огњен 80 кликера. Према томе, Пера је имао $40 + 17 = 57$ кликера, Васа $40 + 12 = 52$ кликера, а Огњен $80 - 17 - 12 = 51$ кликер.

843. Ако је дужина странице квадрата $x\,mm$, онда се обим квадрата повећао за $x+22\,mm+x+22\,mm = 2000\,mm$. Одавде је $2x+44 = 2000$, тј. $2x = 1956$ и $x = 978$. Дакле, дужина странице квадрата је $978\,mm$.

844. Нека је дати број $\overline{xy}$. Добијени број је $\overline{xyxy}$. Однос добијеног и датог броја дефинисан је количником $\overline{xyxy} : \overline{xy} = 101$, тј. добијени број је 101 пут већи од датог.

845. Једно од могућих решења дато је на слици.

25	11	21
15	19	23
17	27	13

Слика уз задатак 845

846. Како је $X \subset (A \cup B)$, то је $X \subset \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Слично је $X \cap A = A \setminus B = \{1,2,3\}$ и $X \cap B = B \setminus A = \{6,7,8\}$. Дакле, $X = \{1,2,3,6,7,8\}$.

847. Веснин, односно Иванов корак има дужину $\frac{67}{77} = \frac{67\cdot 8}{7\cdot 11\cdot 8} = \frac{536}{7\cdot 11\cdot 8}\,m$ тј. $\frac{78}{88} = \frac{78\cdot 7}{8\cdot 11\cdot 7} = \frac{546}{7\cdot 11\cdot 8}\,m$.

Значи да је Иванов корак дужи од Весниног за $\frac{10}{7\cdot 11\cdot 8} = \frac{5}{308}\,m$.

848. Дати збир се може представити као $7085 + 3405 + 10210 + \overline{aaaa} = 20700 + \overline{aaaa}$. Како је број 20700 дељив са 9, то мора бити и број $\overline{aaaa}$, тј. $4\cdot a$ мора бити дељиво са 9, па је $a = 0$ или $a = 9$.

849. Из услова задатка је $a + b = 180°$ и $b + c = 90°$, што значи да се углови a и c разликују за $90°$. Како је $a + c = 142°$, то је $a = 116°$ и $c = 26°$, па је $b = 64°$.

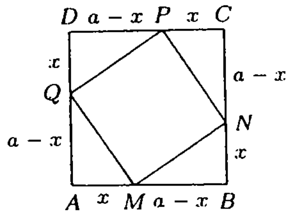
850. Свих 60 коња поделе се у 5 група (A, B, C, D, E) по 12 коња. Како има 48 поткивача, у првом кораку за 5 минута поткивају се групе A, B, C и D; у другом групе B, C, D и E; у трећем C, D, E и A; у четвртом D, E, A и B и у петом E, A, B и C. Тако ће после 25 минута сви коњи бити потковани.

851. Јасно је да је $-(-x) = x$, па је очигледно $6 < x < 10$, или $x \in \{7,8,9\}$. Како је $|x| < 8$, то је $x = 7$.

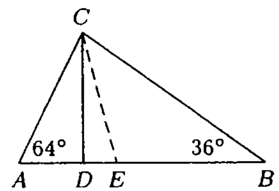
852. Ако је x сума која се дели онда је Жарко добио $\frac{x}{3}$, Лека $\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3} = \frac{x}{6}$, а Пеђа $x - \frac{x}{3} - \frac{x}{6} = \frac{x}{2}$ динара. Како је Пеђа добио 100 динара више од Жарка, то $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$ износи 100 динара, па је цела сума 600 динара. Жарко је добио 200, Пеђа 300, а Лека 100 динара.

853. Нека је страница датог квадрата a и нека је $AM = BN = CP = DQ = x$ (слика). Тада је $MB = NC = PD = QA = a - x$. Троуглови MBN, NCP, PDQ и QAM су подударни, јер поред наведених једнаких страница имају и једнаке праве углове. Из подударности троуглова следи да су једнаки и њихови углови. Ако је $\sphericalangle BMN = \alpha$, онда је $\sphericalangle AMQ = 90° - \alpha$, па је $\sphericalangle QMN = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$. На сличан начин се доказује да су и остали углови четвороугла $MNPQ$ прави.

854. Углови троугла су $36°$, $64°$ и $80°$ (слика). Нека је D подножје висине из C, а E тачка у којој симетрала $\sphericalangle ACB$ сече страницу AB. Тада је $\sphericalangle ACD = 90° - 64° = 26°$. Како је $\sphericalangle ACE = 40°$, то је $\sphericalangle DCE = 40° - 26° = 14°$.



Слика уз задатак 853



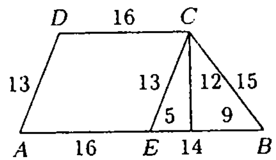
Слика уз задатак 854

855. Површина шуме је $2\,100\,m^2$, а површина парчета земље $60\,m^2$, што значи да се шума може поделити на $5\cdot 7 = 35$ таквих парчића. Како има 34 стабла, то значи да на основу Дирихлеовог принципа постоји бар један део у коме нема ниједног стабла.

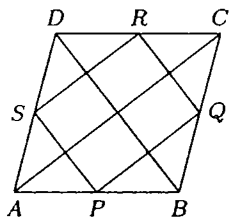
856. Како је $a = 2^{45} = (2^5)^9 = 32^9$, $b = 3^{36} = (3^4)^9 = 81^9$, $c = 4^{27} = (4^3)^9 = 64^9$, $d = 5^{18} = (5^2)^9 = 25^9$, то је $d < a < c < b$.

857. Вредност израза је $-\frac{13}{4} = -3\frac{1}{4}$.

858. Нека је дат трапез $ABCD$ (слика). Нека права p која је паралелна са AD и садржи теме C сече основицу AB у тачки E. У троуглу EBC странице су $13\,cm$, $14\,cm$ и $15\,cm$, а висина CC' која одговара страници EC једнака је $12\,cm$ (доказати). Према томе површина трапеза је $P = 276\,cm^2$.



Слика уз задатак 858



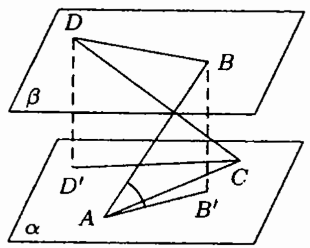
Слика уз задатак 859

859. Доказ да је четвороугао $PQRS$ правоугаоник се изводи применом особина средње линије троугла или подударности троуглова (слика). Коришћењем Питагорине теореме добија се да је дужина друге дијагонале ромба $6\,cm$. Како су странице правоугаоника средње линије троуглова чије су основице дијагонале ромба, то су њихове дужине $4\,cm$ и $3\,cm$, па је површина правоугаоника $12\,cm^2$.

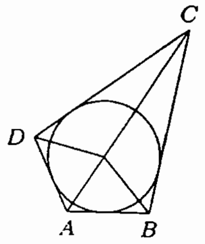
860. Ако Аца има $6x$ динара, онда Богдан има $9x$ динара. Тада Цеца има $5x$ динара, а сви заједно имају $20x$ динара. То значи да је $x = 100$ динара, па Аца треба да добије 600 динара, Богдан 900 динара, а Цеца 500 динара.

861. Нека је x број седишта у једном аутобусу. Тада је на основу задатка $18(x+5) = 21x - 6$. Решавањем једначине се добије да је $x = 32$. Дакле, број ученика у тој школи је $18(32+5) + 174 = 840$.

862. Ако је $x < 0$, онда је $|x| + x = 0$, па се једначина своди на $|x| = 2000$, што значи да је решење $x = -2000$. Ако је $x \geq 0$, онда су све „апсолутне заграде" сувишне, па једначина постаје $5x = 2000$, а $x = 400$.



Слика уз задатак 863

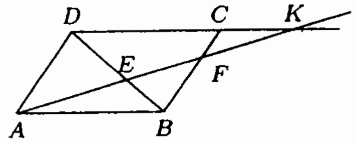


Слика уз задатак 864

863. Нека су B' и D' пројекције тачака B и D на раван α (слика). Како је $BB' = 12\,cm$, а $\sphericalangle BAB' = 30°$, то је $AB = 24\,cm$. Тада је $CD = 48 - 24 = 24\,cm$, а како је DD' такође $12\,cm$, то је и $\sphericalangle DCD' = 30°$.

864. Нека су α, β, γ и δ углови датог четвороугла (слика). Тада је $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\delta}{2} = 360° - (\alpha+\beta+\gamma+\delta) : 2 = 360° - 180° = 180°$.

865. Како је $AB \parallel DK$, то је $AE : EK = BE : DE$ (слика). Слично је $AD \parallel BF$, па је $BE : DE = EF : AE$. Следи да је $AE : EK = EF : AE$ или $AE^2 = EF \cdot EK$.



Слика уз задатак 865

866. Површина њиве је $750 \cdot 200 = 150\,000\,m^2 = 1\,500\,a$. Маса траве је тада $1\,500 \cdot 240 = 360\,000\,kg = 360\,t$. Према томе, маса сена је $360\,t : 4 = 90\,t$.

867. Нека је први број x. Тада је други број $3x$, а трећи $x - 5$. Следи да је $x + 3x + x - 5 = 6\,000$, па је $5x - 5 = 6\,000$. Дакле, $5x = 6\,005$, а $x = 1\,201$. Први број је 1 201, други 3 603, а трећи је 1 196.

868. Ако преведемо на језик сабирања добиће се $2\,000 + ABA = CDDC$. Очигледно је $C = 2$, јер збир броја 2 000 и било ког троцифреног броја не прелази 2 999. Тада је и $A = 2$, јер је само $0 + 2 = 2$ (цифра јединица). Јасно је да је тада $D = 2 + 0 = 2$, а из истих разлога је и $B = 0 + 2 = 2$.

869. Радници су на свака 3 дана уштедели по 1 дан. Како су цео посао скратили за $70 - 55 = 15$ дана, то значи да су убрзаним темпом уместо $3 \cdot 15 = 45$ дана, радили $2 \cdot 15 = 30$ дана. Дакле, $55 - 30 = 25$ дана радили су пре убрзавања.

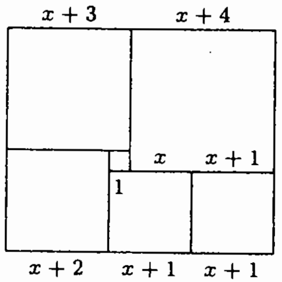
870. Како је деце било петоро, могло је остати само 1, 2, 3 или 4 бомбоне. Ако је остала 1 бомбона, онда је било $5 \cdot 1 + 1 = 6$ бомбона. Ако су остале 2, онда је било $5 \cdot 2 + 2 = 12$ бомбона, или $5 \cdot 3 + 3 = 18$ или $5 \cdot 4 + 4 = 24$ бомбоне.

871. Првог сата аутомобилиста је прешао $(360 : 15) \cdot 4 = 96\,km$. Другог сата 7/8 пређеног пута из првог сата, а то значи $(96 : 8) \cdot 7 = 84\,km$. За прва два сата је прешао укупно $96 + 84 = 180\,km$, што значи да је трећег сата прешао $180 : 2 = 90\,km$. Последњег сата аутомобилиста је прешао $360 - 180 - 90 = 90\,km$.

872. Три пекара за 2 сата умесе 67 хлебова, што значи да за 6 сати рада један пекар умеси 67 хлебова или $\frac{67}{6}$ хлебова на сат. Четири пекара за три сата имају 12 радних сати, па ће умесити $12 \cdot \frac{67}{6} = 134$ хлеба. Да би се умесило 335 хлебова, потребно је $335 : \frac{67}{6} = 30$ радних сати. Дакле, 5 пекара треба да раде по 6 сати.

873. Ако је $q = 2$, онда је $2p + 6 = 100$, па је $2p = 94$, а $p = 47$. Ако је q прост број већи од 2, онда је q непаран, па је и $3q$ непаран број, што значи да је и $2p + 3q$ непаран број и да не може никада бити 100. Дакле, једино решење је $p = 47$, $q = 2$.

874. Нека је x број математичара који су и филозофи. Тада је $13x - x = 12x$ математичара који нису филозофи и $8x - x = 7x$ филозофа који нису математичари. Дакле, $12x + x + 7x = 20x = 2\,000$, па је $x = 2\,000 : 20 = 100$. Значи само математичара је 1 200, само филозофа 700, а математичара који су и филозофи 100.

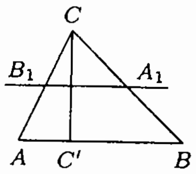


Слика уз задатак 875

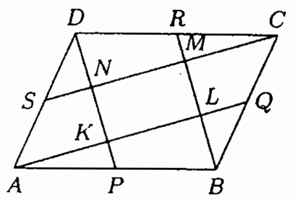
875. Ако се ланчано рачунају димензије квадрата на датој слици, онда су димензије највећег квадрата $x + 4$, односно $x + x + 1$, па је $x + 4 = x + x + 1$ или $x = 3\,cm$. Тада су димензије правоугаоника $13\,cm$ и $11\,cm$, па је његов обим $48\,cm$, а површина $143\,cm^2$.

876. Нека је та једнака количина јабука $10x$. Тада је у продавницама било редом $10x + 2x = 12x$, $10x + 3x = 13x$ и $10x + 5x = 15x$. Према томе, $12x + 13x + 15x = 40x = 2\,000$, па је $x = 50\,kg$. У првој продавници је било $600\,kg$, у другој $650\,kg$, а у трећој $750\,kg$ јабука.

877. Нека је делилац у оба случаја био број x. Тада је $1\,000 = ax + 8$, а $900 = bx + 1$. Тада је $ax = 992 = 31 \cdot 32$ и $bx = 899 = 31 \cdot 29$. Како су 32 и 29 узајамно прости бројеви, очигледно је делилац $x = 31$, а тражени количници су $a = 32$ и $b = 29$.



Слика уз задатак 878



Слика уз задатак 879

878. Тачка C је симетрична датој тачки C' у односу на средњу линију A_1B_1 (слика). Права p садржи тачку C', садржи и страницу AB и паралелна је са A_1B_1. Теме A је пресек праве p и праве CB_1, а теме B је пресек правих p и CA_1.

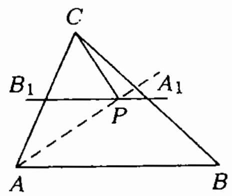
879. Четвороуглови $PBRD$ и $AQCS$ су паралелограми, па је $KN \parallel LM$ и $KL \parallel MN$ (слика). Дакле, четвороугао $KLMN$ је паралелограм. Како су KP и MR средње линије троуглова ABL и CDN, то је $AK = KL = MN = MC$. Како је LQ половина дужи MC, то је $KL = \frac{2}{5}AQ$.

880. Четврти дечак је добио половину преосталих кликера и још један кликер, што значи да половина броја кликера износи 1 кликер, а он је дакле добио $1 + 1 = 2$ кликера. Пред трећим дечаком је било $2(2 + 1) = 6$ кликера. Пред другим дечаком је било $2(6 + 1) = 14$ кликера, а пред првим $2(14 + 1) = 30$ кликера. Дакле, први дечак је добио $15 + 1 = 16$ кликера, други $7 + 1 = 8$ кликера, трећи $3 + 1 = 4$ кликера, а четврти 2 кликера.

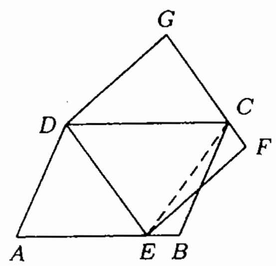
881. Ако је $x = 1.49494949\ldots$, онда је $100x = 149,494949\ldots$. Следи да је $100x - x = 99x = 149,494949\cdots - 1,494949\cdots = 148$. Дакле, $x = \frac{148}{99}$, па је x рационалан број. Како су бројеви $7 + 4\sqrt{3} = (2 + \sqrt{3})^2$ и $7 - 4\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^2$, то је $y = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$. Вредност израза $x + y$ је $\frac{148}{99} + 4 = 5\frac{49}{99}$, тј. рационалан број.

882. Ако је $(ab + cd)^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$, онда је $a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 = a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2$, па је $2adbc = a^2d^2 + c^2b^2$, односно $a^2d^2 - 2adbc + c^2b^2 = (ad - bc)^2 = 0$. Јасно је да је тада и $ad - bc = 0$, па је $ad = bc$.

883. Како је A_1B_1 средња линија троугла ABC, то је $B_1P \parallel AB$ (слика). Тада је $\sphericalangle BAP = \sphericalangle APB_1 = \frac{\alpha}{2}$ (углови са паралелним крацима) и $\sphericalangle BAP = \sphericalangle B_1AP = \frac{\alpha}{2}$ (права AP је симетрала угла). Одавде следи да је $\sphericalangle APB_1 = \sphericalangle B_1AP = \frac{\alpha}{2}$, па је троугао APB_1 једнакокрак и $AB_1 = B_1P = B_1C$. Због тога је AC пречник круга описаног око троугла APC, па је $\sphericalangle APC = 90°$.



Слика уз задатак 883



Слика уз задатак 884

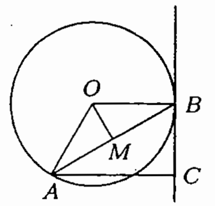
884. Очигледно је троугао CDE заједнички за оба паралелограма (слика). Како је површина паралелограма $ABCD$ двострука површина троугла CDE, а површина паралелограма $DEFG$ такође двострука површина троугла CDE, то су површине ова два паралелограма једнаке.

885. Када се изаберу било која три темена седмоугла добије се један троугао. Преостала четири темена су темена четвороугла. То значи да сваки одабрани троугао има свој одговарајући четвороугао, тј. да троуглова и четвороуглова има једнако.

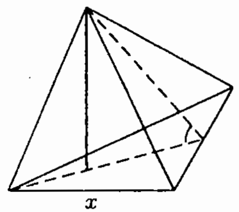
886. Нека је x број кифли, y број погачица и z број ђеврека који су купљени. Тада важи $x + y + z = 100$ и $\frac{1}{2}x + 2y + 5z = 100$. Ако се друга једначина помножи са 2 и од ње одузме прва, добија се $x+4y+10z-x-y-z = 200-100$, тј. $3y + 9z = 100$. Једначина нема решења у скупу целих бројева, јер је лева страна дељива са 3, а десна није.

887. Решавањем једначине добија се $x = \frac{2(3-2m)}{m-4}$. Из услова задатка је $x < 0$, па је $m < \frac{3}{2}$ или $m > 4$.

888. Нека је M средиште тетиве AB (слика). Како су троуглови BOM и ABC слични, то је $AB : AC = BO : MB$. Тада је $AB \cdot MB = AC \cdot BO$, па је $AB \cdot 2MB = AC \cdot 2BO$. Дакле, $AB \cdot AB = AC \cdot 8$, тј. $AB^2 : AC = 8$.



Слика уз задатак 888



Слика уз задатак 889

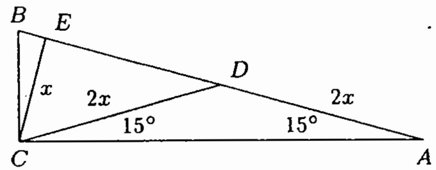
889. Из једнакости мерних бројева површине $P = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$ и запремине $V = \frac{x^3\sqrt{3}}{24}$, добија се $x = 18$ (слика).

890. У први ред ученици могу да седну на $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ начина, у други на $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ начина, а преостала 3 ученика ће сести на $3 \cdot 2 \cdot 1$ начина. Дакле, укупан број распореда је $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3 \cdot (6!)^2$.

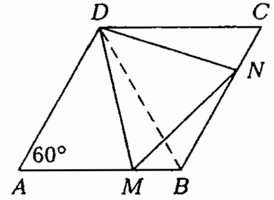
891. Из $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}$, следи да је $\frac{1}{x} = \frac{2}{73} - \frac{1}{60} - \frac{1}{3 \cdot 73} - \frac{1}{4 \cdot 73} = \frac{24-4-3}{12 \cdot 73} - \frac{1}{60} = \frac{17}{12 \cdot 73} - \frac{1}{12 \cdot 5}$ или $\frac{1}{x} = \frac{17 \cdot 5}{5 \cdot 12 \cdot 73} - \frac{73}{12 \cdot 5 \cdot 73} = \frac{12}{12 \cdot 5 \cdot 73} = \frac{1}{365}$. Дакле, $x = 365$.

892. Нека од 100% учесника такмичења $x\%$ навија за „Црвену Звезду". Тада за „Партизан" навија $(100-x)\%$ такмичара, па је $x + 0,1 \cdot (100 - x) = 46$. Из добијене једнакости је $x + 10 - 0,1x = 46$ или $0,9x = 36$, па је $x = 40\%$.

893. Углови правоуглог троугла су $\sphericalangle CAB = 15°$ и $\sphericalangle CBA = 75°$ (слика). Нека је хипотенуза $AB = 4x$ и нека су D и E редом подножја тежишне дужи и висине из темена правог угла. Тада је $AD = BD = CD = 2x$ и $\sphericalangle CDE = 30°$. Како је троугао CDE правоугли, то је наспрам угла од 30° катета једнака половини хипотенузе, па је $CE = \frac{CD}{2} = \frac{2x}{2} = x$. Дакле, $AB = 4CE$.



Слика уз задатак 893



Слика уз задатак 894

894. Како је $MB + BN = AB = a$, то је $MB = a - BN$. Следи да је $CN = BC - BN = a - BN = MB$ (слика). Троуглови ABD и BCD су једнакостранични, па је $AB = BC = CD = DA = BD = a$. Сада је јасно да су троуглови MBD и NCD подударни ($MB = NC$, $\sphericalangle MBD = \sphericalangle NCD = \varphi + 60°$ и $BD = CD$). Из подударности следи да је $MD = ND$ и $\sphericalangle MDB = \sphericalangle NDC = \varphi$. Како је $\sphericalangle MDN = \sphericalangle MDB + \sphericalangle BDN = \varphi + 60° - \varphi = 60°$, то је троугао MND једнакостраничан.

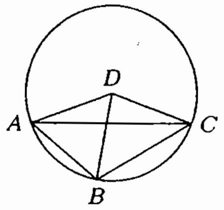
895. Из услова (в) јасно је да Милан може бити 1., 2., 5. или 6.. Милан није 1., јер би тада Жана била 2., што је у супротности са условом (а). Милан није ни 2., јер би тада Горан био 1., што је у супротности са условом (г). Милан није 6., јер би тада Зоран био 2., а Горан 1., што је опет у супротности са условом (г). Дакле, Милан је 5.. Онда је Зоран 1., а Горан 2.. Тада је Ана 3. (услов (г)), а Жана 4. (услов (б)) и Дана 6..

896. Бројеви $\underbrace{111\ldots111}_{2000}$ и $\underbrace{222\ldots222}_{1000}$ могу се написати као $999\ldots999 : 9$, односно $2 \cdot 999\ldots999 : 9$, па дати израз постаје $\frac{10^{2\,000}-1}{9} - 2\frac{10^{1\,000}-1}{9} = \frac{10^{2\,000} - 1 - 2 \cdot 10^{1\,000} + 2}{9} = \left(\frac{10^{1\,000}-1}{3}\right)^2$. Дакле, дати израз је квадрат броја $333\ldots333$ (1 000 тројки).

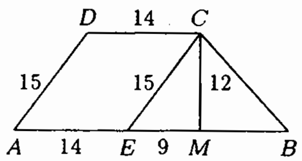
897. Именилац дате једначине мора бити различит од нуле. Како је за

$x \leq 0$, $x + |x| = 0$, то значи да је $x > 0$. Сада је јасно да су сва решења дате једначине $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$.

898. Како је $AD = BD$, конструише се кружница са центром у тачки D, полупречника $AD = BD$ (слика). Како је $\sphericalangle ACB = 20°$, а централни угао $\sphericalangle ADB = 40°$, то и тачка C припада конструисаној кружници. Како је $\sphericalangle BDC = 80°$, то је као периферијски угао над тетивом BC, $\sphericalangle CAB = 40°$.



Слика уз задатак 898



Слика уз задатак 899

899. Ако се конструише паралелограм $ADCE$, онда је јасно да је троугао BCE правоугли, пошто су углови на основици комплементни (899). Тада је $EM^2 = 15^2 - 12^2 = 81 = 9^2$, па је $EM = 9\,cm$. Сада је $BC^2 = (x+9)^2 - 15^2 = x^2 + 12^2$. Решавањем једначине добија се $x = 16\,cm$, а тада је крак $BC = 20\,cm$. Обим трапеза је $88\,cm$, а површина $318\,cm^2$.

900. Прво пређу отац и мајка и потроше 2 минута. Затим се за 1 минут отац врати и преда фењер сину који са баком пређе мост за 10 минута. Мајка се са фењером врати (2 минута) и заједно са оцем (2 минута) коначно цела породица пређе мост. Утрошено је $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ минута.

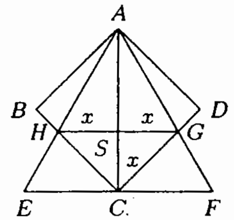
901. Како је лева страна једнакости увек мања или једнака 2, а десна већа или једнака 2, једнакост важи само када су и лева и десна страна једнакости једнаке 2. Дакле $x = -1$ је једино решење једначине.

902. Из $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ множењем са c^2 (јер је c природан број) добија се да је $a^2 + bc = ac + b^2$, тј. $a^2 - b^2 = c(a-b)$. Одавде је $(a-b)(a+b-c) = 0$. Дакле, једнакост важи увек када је $a = b$ или када је $a + b = c$.

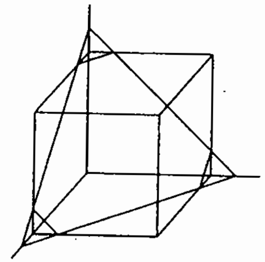
903. Из једнакости површина квадрата и троугла добија се да је $EF = AC = 3a\sqrt{2}$ (слика). Нека је $HS = CS = GS = x$. Из сличности троуглова AEF и AGH је $3a : 2x = 3a : (3a - x)$, па је $x = a$. Странице делтоида $AHCG$ су $CH = 2a$ и $AH = a$, обим је $2a(2 + \sqrt{10})$, а површина $6a^2$.

904. Добијени пресек је шестоугао чије су три странице дужине $\sqrt{2}\,cm$, а друге три дужине $2\sqrt{2}\,cm$ - шестоугао који представља једнакостранични троугао странице $4\sqrt{2}\,cm$ од кога су исечена три вршна једнакостранична

троугла странице $\sqrt{2}\,cm$ (слика). Обим пресечног шестоугла је $9\sqrt{2}\,cm$, а површина је $\frac{13\sqrt{3}}{2}\,cm^2$.

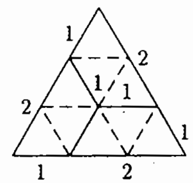


Слика уз задатак 903



Слика уз задатак 904

905. Може, јер се једнакостранични троугао странице $30\,cm$ може поделити на 100 једнакостраничних троуглова странице $3\,cm$, а једнакостранични троугао странице $3\,cm$, на три трапеза чије су три странице $1\,cm$, а једна $2\,cm$ (слика).



Слика уз задатак 905

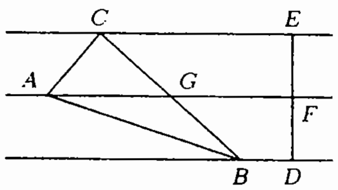
906. Из $x^2 + \frac{6}{y} = 10$ следи да је $\frac{6}{y} = 10 - x^2$. Како је x цео број, такав је и x^2, па је и $10 - x^2$ цео број. Одавде следи да је и $\frac{6}{y}$ цео број, па је y делилац броја 6, односно $y \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Тада је $x^2 = 10 - \frac{6}{y} \in \{4, 16, 7, 13, 8, 12, 9, 11\}$, па у обзир долазе само бројеви 4, 16 и 9. Сва решења су дакле: $(x,y) \in \{(2,1), (-2,1), (4,-1), (-4,-1), (3,6), (-3,6)\}$.

907. Како је $0 < \frac{7m - 17n}{17 \cdot 7} < \frac{1}{100}$, тј. $0 < \frac{7m - 17n}{119} < \frac{1}{100}$, то је $7m - 17n = 1$, па је $m = 5$ и $n = 2$.

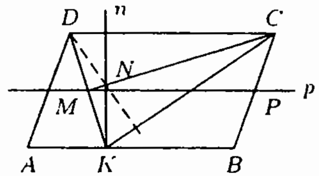
908. Анализа: Претпоставимо да је задатак решен (слика).
По услову задатка је $DF = FE$. Четвороугао $BDEC$ је трапез, па је FG његова средња линија, одакле следи да је $BG = GC$.

Конструкција: Конструишимо праву која садржи тачку A и средиште дужи BC (тачку G). Тачкама B и C конструишимо праве паралелне конструисаној правој.
Доказ: Следи из анализе.
Дискусија: Размотримо случајеве:
(1) A, B и C су неколинеарне тачке. Задатак има три решења.
(2) A, B и C су колинеарне тачке и
(а) $AB = BC$. Задатак је неодређен (има бесконачно много решења).
(б) $AB \neq BC$. Задатак нема решења.

909. Уочимо да је $\sphericalangle CDK = \sphericalangle AKD$ (углови са паралелним крацима), одакле следи, користећи услове задатка, да је $\sphericalangle CDK = \sphericalangle DKC$ (слика). Дакле, троугао CDK је једнакокраки са основицом DK. Права p је средња линија трапеза $BCDK$, па је тачка M средиште дужи DK. Самим тим је $CM \perp DK$ (особина једнакокраког троугла). Даље је $KN \perp CD$, јер је $AB \parallel CD$. Одавде следи да је тачка N ортоцентар троугла CDK, па је DN трећа висина, која одговара страници CK, што потврђује да је $DN \perp CK$.



Слика уз задатак 908



Слика уз задатак 909

910. Инспектор најпре иде до краја улице OC; ако је преступник у тој улици, он ће га ухватити, а ако није, он се враћа у O и зна да је преступник у једној од улица OA или OB. Сада он може ићи у улице OA или OB, али мора водити рачуна да преступник не умакне у OC. Он иде у улицу OA до тачке $2r$ (максималном брзином и стално се тако даље креће) и зна да ако је преступник у OA онда се налази између тачака $3r$ и $4r$ (иначе би га видео). Потом се враћа у O. За време одсуствовања инспектора из O, преступник није могао стићи у улицу OC даље од r јер се инспектор враћа у O пре него он стигне у r.
Вративши се у O, инспектор продужава, не задржавајући се, у улицу OB, и при том се може удаљити од O за $3r$. Ако је преступник у OB он ће га видети (ухватити), а ако није у OB, онда је у OA, па инспектор иде до краја OA.

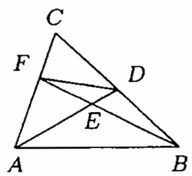
911. 1) Ако је $p = 2$, онда је $4 - 2q^2 = 1$ што је немогуће, јер је лева страна ове једнакости парна, а десна непарна.

2) Ако је $p \geq 3$, онда постоји природан број k такав да је $p = 4k \pm 1$, па је $(4k \pm 1)^2 - 2q^2 = 1$, тј. $16k^2 \pm 8k + 1 - 2q^2 = 1$. Тада је $8k(2k \pm 1) = 2q^2$ тј. $4k(2k \pm 1) = q^2$, што значи да је q паран прост број, тј. $q = 2$. Одавде следи да је $p^2 - 8 = 1$, тј $p^2 = 9$, па је $(p, q) = (3, 2)$ једино решење.

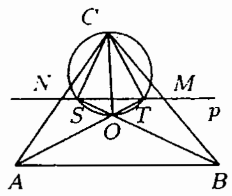
912. Из услова задатка следи да је $(1 + ab)^2 < (a + b)^2$, тј. $1 + 2ab + a^2b^2 < a^2 + 2ab + b^2$, тј. $1 - a^2 - b^2(1 - a^2) < 0$, тј. $(1 - a^2)(1 - b^2) < 0$. Одавде следи да је $(1 - a^2) < 0$ и $(1 - b^2) > 0$ или $(1 - a^2) > 0$ и $(1 - b^2) < 0$, тј. $a^2 > 1$ и $b^2 < 1$ или $a^2 < 1$ и $b^2 > 1$. Дакле, $|a| > 1$ и $|b| < 1$ или $|a| < 1$ и $|b| > 1$.

913. Нека је $P_{\triangle ABE} = mP_1$ (слика). Тада је $P_{\triangle BDE} = nP_1$. Ако је $P_{\triangle AEF} = m P_2$, онда је $P_{\triangle DEF} = n P_2$. Тада је $P_{\triangle BDF} = P_{\triangle BDE} + P_{\triangle DEF} = nP_1 + nP_2 = n(P_1 + P_2)$. Како је $P_{\triangle CDF} = P_{\triangle BDF} = n(P_1 + P_2)$, то је $P_{\triangle BCF} = n(P_1 + P_2) + n(P_1 + P_2) = 2n(P_1 + P_2)$. Слично је, $P_{\triangle ABF} = mP_1 + mP_2 = m(P_1 + P_2)$, па је $P_{\triangle ABF} : P_{\triangle BCF} = m : 2n$.

914. Из услова задатка следи да права p полови странице BC и AC троугла ABC, при чему су M и N средишта ових страница (слика). Троугао ANT је једнакокрак, јер је $\sphericalangle ATN = \sphericalangle BAT$ (углови са паралелним крацима) и $\sphericalangle NAT = \sphericalangle BAT$. Одавде следи да је $NT = AN = CN$, па је N је центар круга описаног око троугла ACT. Дакле, $\sphericalangle ATC = 90°$, као угао над пречником. Слично се доказује да је $\sphericalangle MSO = \sphericalangle MBS$ и $\sphericalangle BSC = 90°$, где је S пресек праве p и праве BO.
Због правих углова са теменима S и T, следи да кружница чији је пречник CO садржи тачке S и T. Тада је $\sphericalangle OCT = \sphericalangle OST$ (углови над истим луком), тј. $\sphericalangle OCT = \frac{1}{2}\sphericalangle ABC$, одакле следи тражени закључак.



Слика уз задатак 913



Слика уз задатак 914

915. Нека тачке M и N редом имају координате (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2). Тада се могу разликовати три случаја:
а) *Дуж* AB има празан пресек са унутрашњошћу правоугаоника, чија су наспрамна темена M и N. У овом случају најкраћи пут има дужину $|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1|$, која се може постићи сваком комбинацијом хоризонталних и вертикалних потеза, усмерених од M ка N.

б) Претходно утврђена дужина је најмања могућа и у случају када су дужи AB и MN „супротно нагнуте“, кад једна од њих заклапа са позитивним смером X-осе угао из интервала $(0°, 90°)$, а друга угао из интервала $(90°, 180°)$. У том случају „коса пречица“ AB не може да се искористи за скраћење пута између M и N.
в) Уколико дуж AB има непразан пресек са унутрашњошћу правоугаоника, а дужи AB и MN су нагнуте на исту страну, онда се пречица AB може искористити за скраћење пута између M и N.
Нека је CDE правоугли троугао чије су катете CE и DE паралелне координатним осама, а чија је хипотенуза CD пресек дужи AB са правоугаоником. Најкраћу дужину имају само они путеви од T_1 до T_2 који, поред хоризонталних и вертикалних делова садрже дуж CD. Дужина тог пута је $|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1| - CE - DE + CD$.

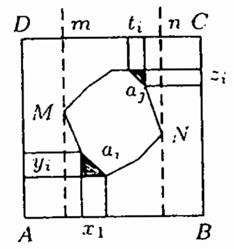
916. Нека су p, q и r три проста броја која тражимо. Дат је услов: $pqr = 7(p+q+r)$. Десна страна једнакости је дељива са 7, па како су p, q, r прости бројеви, то један од њих мора бити број 7. Нека је $r = 7$. Дати услов постаје $pq = p + q + 7$, одакле је $pq - p - q + 1 = 8$, односно $(p-1)(q-1) = 8$. Ово је могуће ако је $p - 1 = 1$, $q - 1 = 8$, или $p - 1 = 2$, $q - 1 = 4$, или $p - 1 = 4$, $q - 1 = 2$, или $p - 1 = 8$, $q - 1 = 1$. Одговарајућа решења су $p = 3$, $q = 5$, или $p = 5$, $q = 3$. Остале случајеве не узимамо у обзир јер 9 није прост број. Дакле, тражени бројеви су: 3, 5 и 7.

917. Како је $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 98! \cdot 99! \cdot 100! = (1) \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdots (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100) = 1^{100} \cdot 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdots 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100 = (2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 4^{96} \cdots 98^2 \cdot 99^2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 98 \cdot 100 = (2^{49} \cdot 3^{49} \cdot 4^{48} \cdots 98 \cdot 99)^2 \cdot 2^{50} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 49 \cdot 50) = (2^{74} \cdot 3^{49} \cdot 4^{48} \cdots 98 \cdot 99)^2 \cdot 50!$, то треба изоставити 50!.

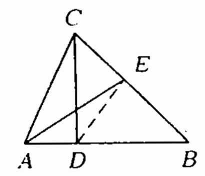
918. Нека су M и N темена многоугла, тако да трака одређена правим m и n, које су паралелне страницама AD и BC покрива цео многоугао (слика). Нека је a_i једна страница „доње“ изломљене линије датог многоугла између тачака M и N и x_i и y_i нормалне пројекције дужи a_i на странице AB и AD. Нека је, даље, a_j једна страница „горње“ изломљене линије MN и z_j и t_j нормалне пројекције дужи a_j на странице BC и CD. Из осенчених правоуглих троуглова је $a_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ и $a_j^2 = z_j^2 + t_j^2$. Узимајући у обзир све странице многоугла добија се једнакост $\Sigma a_i^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + \Sigma z_i^2 + \Sigma t_i^2$. Будући да су све дужи x_i, y_i, z_i, t_i мање од 1, то је: $x_i^2 < x_i$, $y_i^2 < y_i$, $z_i^2 < z_i$, $t_i^2 < t_i$, па је: $\Sigma a_i^2 < \Sigma x_i + \Sigma y_i + \Sigma z_i + \Sigma t_i = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. ($\Sigma x_i < AB = 1$, итд.).

919. Како је, по услову задатка, $\sphericalangle ACD = \sphericalangle ABC$ и $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CAB$, то је троугао ACD сличан троуглу ABC, па је $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AC}{AD}$. Како је (по услову

задатака) $AC = BD$, то одавде следи да је $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$ (слика). Даље, како је AE симетрала $\sphericalangle BAC$, то је $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$. Користећи претходну једнакост, одавде следи да је $\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$. На крају, применом Талесове теореме, добија се да је $ED \parallel AC$, што је и требало доказати.



Слика уз задатак 918



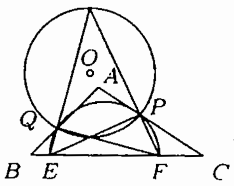
Слика уз задатак 919

920. Означимо са n број камиона. Очигледно је да је $n \geq 4$, јер ако је $n \leq 3$, тада би се могло превести највише $3 \cdot 3 = 9\,t$. Случај $n = 4$ је немогућ. Наиме, нека је $n = 4$ и нека постоји, на пример, 13 сандука једнаке масе, тј. $m_1 = m_2 = \cdots = m_{13} = \dfrac{10}{13}\,t$. Тада се роба не може превести, јер ће по Дирихлеовом принципу у једном камиону бити 4 сандука $(13 = 3 \cdot 4 + 1)$, а тај камион би онда имао масу $4 \cdot \dfrac{10}{13} = \dfrac{40}{13} > 3\,t$. Ако је $n = 5$, онда се на сваки камион може натоварити маса која је већа од $2\,t$ а мања од $3\,t$, па је 5 камиона довољно.

921. Дата једнакост је еквивалента следећим једнакостима: $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy - 3x^2y - 3xy^2 = 2\,000$, $2[(x+y)^3 - 1\,000] - 3xy(x+y-10) = 0$, $2(x+y-10)[(x+y)^2 + 10(x+y) + 100] - 3xy(x+y-10) = 0$, $(x+y-10)(2x^2 + 2y^2 + 20x + 20y + xy + 200) = 0$, $(x+y-10)[(x+10)^2 + (y+10)^2 + (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2] = 0$. Како је $(x+10)^2 + (y+10)^2 + (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$, (не могу сви сабирци истовремено бити једнаки 0), то је $x + y - 10 = 0$.

922. Нека је $n^2 + 3^n = m^2$, $m \in Z$. Тада је $m^2 - n^2 = 3^n$, тј. $(m+n)(m-n) = 3^n$, па можемо разликовати следеће случајеве:
(1) $m + n = 3^n$, $m - n = 1$, одакле је $2n = 3^n - 1$. Нека је $f(n) = 3^n - 2n - 1$. Тада је $f(1) = 0$, $f(2) = 2$, $f(3) = 20, \ldots$, и $f(n) > 0$ за $n \geq 2$. Одавде следи да је једно решење $n = 1$.
(2) $m + n = 3^{n-1}$, $m - n = 3$, одакле је $2n = 3^{n-1} - 3$. Нека је $g(n) = 3^{n-1} - 2n - 3$. Тада је $g(1) = -4$, $g(2) = -4$, $g(3) = 0$, $g(4) = 16, \ldots$, и $g(n) > 0$ за $n \geq 4$. Одавде следи да је једно решење $n = 3$.

(3) $m+n=3^{n-k}$, $m-n=3^k$ и $k<n-k$, тј. $n>2k$, тј. $n-2k\geq 1$. Одавде је $2n=3^{n-k}-3^k$. Нека је $h(n)=3^{n-k}-3^k-2n$. Тада је $h(n)>3^{n-k}-3^{\frac{n}{2}}-2n$, тј. $h(n)>3^{\frac{n}{2}}\left(3^{\frac{n}{2}-k}-1\right)-2n$. Како је $n\geq 4$, то је $3^{\frac{n}{2}-k}-1>1$ и $3^{\frac{n}{2}}\left(3^{\frac{n}{2}-k}-1\right)>3^{\frac{n}{2}}$, па је $h(n)>3^{\frac{n}{2}}-2n$, што је увек веће од 0, па нема више целих бројева n, $n>1$, који задовољавају дату неједнакост.



Слика уз задатак 923

923. Нека је $EQ\cap FP=\{D\}$ и $EP\cap FQ=\{K\}$ и нека је O_1 центар датог полукруга (слика). Уведимо ознаке: $\sphericalangle PEF=x$, $\sphericalangle QFE=y$. Како је $\sphericalangle EQF=\sphericalangle EPF=90^\circ$, као углови над пречником EF, то је четвороугао $DQKP$ тетиван. Нека је O центар круга описаног око четвороугла $DQKP$. Тада је $DO=OK$, $O\in DK$, $\sphericalangle QOP=2\sphericalangle QDP$ (централни и периферијски), тј. $\sphericalangle QOP=2(\sphericalangle QDK+\sphericalangle KDP)$. Како је тачка K ортоцентар троугла EFD, то је $\sphericalangle QDK=\sphericalangle EFQ=y$, $\sphericalangle KDP=\sphericalangle PEF=x$ (углови са нормалним крацима), па је $\sphericalangle QOP=2(x+y)$. Даље, четвороугао AQO_1P је такође тетиван, јер је $O_1P\perp AC$ и $O_1Q\perp AB$ (AC и AB су тангенте). Одавде следи да је $\sphericalangle QAP=180^\circ-\sphericalangle QO_1P=180^\circ-(180^\circ-\sphericalangle EO_1Q-\sphericalangle FO_1P)=\sphericalangle EO_1Q+\sphericalangle FO_1P=2(\sphericalangle EFQ+\sphericalangle FEP)=2(x+y)$. Како је $QA=AP$ (тангентне дужи из исте тачке A) и $\sphericalangle QAP=\sphericalangle QOP=2(x+y)$, то се тачке O и A поклапају, па како $A\in DK$ и $DK\perp EF$, то је $AK\perp EF$, што је и требало доказати.

924. Означимо са m број дечака, са v број девојчица и са x број победа девојчица против дечака. Тада је: $m=2v$, број победа дечака против девојчица је $2v^2-x$ и $\dfrac{\dfrac{v\cdot(v-1)}{2}+x}{\dfrac{2v\cdot(2v-1)}{2}+2v^2-x}=\dfrac{7}{5}$. Одавде следи $\left(\dfrac{v^2-v}{2}+x\right)\cdot 5=7\cdot\left(\dfrac{4v^2-2v}{2}\right)+14v^2-7x$, тј. $\dfrac{5}{2}v^2-\dfrac{5}{2}v+5x=\dfrac{28v^2}{2}-7v+14v^2-7x$. Сређивањем последњег израза добија се $8x=17v^2-3v$, тј. $8x=16v^2+v^2-3v$. Из $2v^2-x\geq 0$, тј. $x\leq 2v^2$ следи $v\geq 1$, а из и $v^2-3v\leq 0$, тј. $v(v-3)\leq 0$ следи $v\leq 3$, па је $1\leq v\leq 3$, одакле се провером закључује да је $v=3$ и $m=9$.

2001. година

925. Обим баште је $2\cdot(46\,m+54\,m)=200\,m$. Потребно је $200\,m$ жице и $200:2=100$ стубова.

926. Површина школског дворишта је већа за $1575\,m^2$, јер је $3975\,m^2-24a=3975\,m^2-2400\,m^2=1575\,m^2$.

927. (а) Други сабирак треба смањити за $222-150=72$.
(б) Други сабирак треба смањити за $222+50=272$.

928. $1001-998=3$.

929. Најмањи је 1 111 268, а највећи 8 621 111.

930. Тачна су тврђења: $1\in P$, $\{3,2\}\in P$, $\{\{2,3\}\}\subset P$, $3\in P$.

931. Дужи има $4+3+2+1=10$. С обзиром да две тачке одређују дуж преостале три тачке одређују троугао, па троуглова има такође 10.

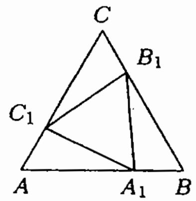
932. Већи је угао β за $\beta-\alpha=2001'-20^\circ1'=2001'-1201'=800'=13^\circ21'$.

933. С обзиром да се 3 садржи у 2001, а 4 у 2000, то је $2000\cdot2001$ дељиво са 12. Како 13 није дељиво са 12 то број $\overline{16x}$ мора бити дељив са 12. Дакле, са 3 и са 4, па је x цифра 0 или 4 или 8. Како $1+6+0$ и $1+6+4$ нису дељиви са 3, а $1+6+8$ јесте, то је тражена цифра $x=8$.

934. С обзиром да је $60=2\cdot2\cdot3\cdot5$ то су тражени бројеви 3, 4 и 5.

935. $|-8\cdot3-(-(-3))|=|-27|=27$.

936. Нека топола треба да нарасте за x метара. Тада је $9\frac{3}{4}+x=11.2+2\frac{1}{2}$, односно $x=11.2+2.5-9.75=3.95$, па топола треба да нарасте за $3.95\,m$.

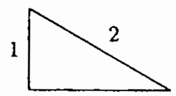


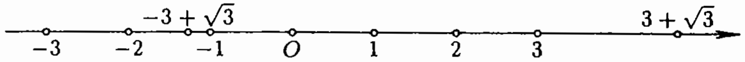
Слика уз задатак 937

937. Нека је a страница једнакостраничног троугла ABC (слика). Како је $AA_1=BB_1=CC_1=x$, $BA_1=CB_1=AC_1=a-x$ и $\sphericalangle C_1AA_1=\sphericalangle A_1BB_1=\sphericalangle B_1CC_1=60^\circ$, то су троуглови C_1AA_1, A_1BB_1 и B_1CC_1 подударни, одакле следи да су све странице троугла $A_1B_1C_1$ једнаке.

938. Бројеви 3 и 29 су узајамно прости, па $\overline{20ab}$ треба да буде дељив са 87. Како су $87\cdot23=2001$ и $87\cdot24=2088$ једини бројеви облика $\overline{20ab}$ дељиви са 87, како је 2088 дељив са 6, а 2001 није, то је $a=0$, $b=1$.

939. Нека је број планираних ученика x. Тада је број пријављених ученика $\frac{11}{9}x$,а на зимовање је отишло $\frac{8}{11}\cdot\frac{11}{9}x = \frac{8}{9}x$ ученика. Решење једначине $x - 8 = \frac{8}{9}x$ је $x = 72$. Дакле, број планираних ученика је 72, а на зимовање је отишло 64 ученика.



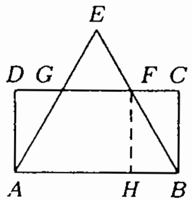


Слика уз задатак 940

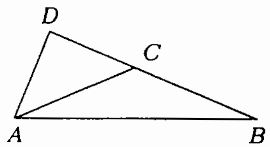
940. Конструише се дуж једнака $\sqrt{3} = \sqrt{2^2 - 1^2}$ као катета правоуглог троугла чија је хипотенуза 2, а друга катета 1 (слика). Затим се на бројевној правој од тачака 3 и -3 нанесе у позитивном смеру дуж једнака $\sqrt{3}$.

941. Како је $21^{12} = 3^{12}\cdot 7^{12}$, а $54^4 = 2^4\cdot 27^4 = 2^4\cdot 3^{12}$ и како је $7^{12} > 2^4$ то је и $21^{12} > 54^4$.

942. Нека је $ABCD$ правоугаоник, ABE једнакостранични троугао, F и G пресеци дужи BE и AE са CD и нека је H нормална пројекција тачке F на AB (слика). Тада је $FB = 2\sqrt{3}\,cm$ као страница једнакостраничног троугла висине $3\,cm$, а дуж $FG = (6 - 2\sqrt{3})\,cm$. Обим трапеза $ABFG$ је $O = (12 + 2\sqrt{3})\,cm$, а површина је $P = (18 - 3\sqrt{3})\,cm^2$.



Слика уз задатак 942



Слика уз задатак 944

943. Како је $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 3 = |1 - \sqrt{2}| + 3 = \sqrt{2} - 1 + 3 = \sqrt{2} + 2$, то је $a = 1$ и $b = 2$.

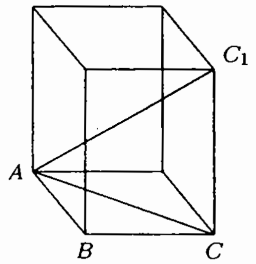
944. Нека су AB и AD редом основица и висина једнакокраког троугла ABC (слика). Троугао ACD је једнакокрако-правоугли. Користећи Питагорину теорему добија се: $AD = 3\sqrt{2}\,cm$, а површина троугла је $9\sqrt{2}\,cm^2$.

945. Нека у другом џаку има x килограма шећера. Тада у првом има $\frac{4}{5}x$, а у трећем $\frac{42.5}{100}\cdot\frac{4}{5}x$ килограма. Решење једначине $x + \frac{4}{5} + \frac{42.5}{100}\cdot\frac{4}{5}x = 64.2$ је $x = 30$, па у првом џаку има $24\,kg$ шећера.

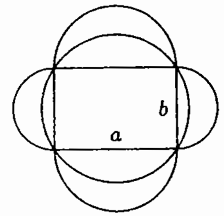
946. Распоред дечака и девојчица може бити: МЖМЖМЖ или ЖМЖМЖМ. У сваком од ова два случаја дечаци и девојчице могу сести на по $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ начина, па је број тражених начина $2\cdot 6\cdot 6 = 72$.

947. Троуглови CDB и ADC имају једнаке углове (углови са нормалним крацима) и зато су слични. Зато је $CD : BD = AD : CD$, одакле је $CD^2 = AD\cdot BD$.

948. Дијагонала AC основе $ABCD$ квадра је $AC = 25\,cm$ (слика). Ивица CC_1 је висина једнакостраничног троугла странице $2\,AC$ и зато је $CC_1 = 2\,AC\frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $CC_1 = 25\sqrt{3}\,cm$. Дакле, $V = 4\,200\sqrt{3}\,cm^3$ и $P = (336 + 1\,550\sqrt{3})\,cm^2$.



Слика уз задатак 948 ·



Слика уз задатак 949

949. Нека су a и b странице правоугаоника (слика). Полукругови над њима имају полупречнике једнаке $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, а полупречник описаног круга око правоугаоника је $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Збир површина полумесеца је једнак збиру површина полукругова и површине правоугаоника умањеним за површину круга описаног око правоугаоника $P = \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi + ab - \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\pi = ab$.

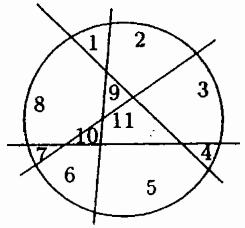
950. Умањеник треба смањити за $4567 - 1234 = 3333$.

951. Нека је у трећем павиљону било x излетника. Тада је у првом било $x + 12$, у другом $x - 14$, а у четвртом x излетника. То је укупно $4x - 2$ излетника, па је $4x - 2 = 430$ или $4x = 432$. Дакле, $x = 108$. Према томе, у првом павиљону је било 120 излетника, у другом 94, а у трећем и четвртом 108 излетника.

952. То је 11 делова (видети слику).

953. $5 \cdot (4+26) : 2 + 1926 = 2001$.

954. Решење је дато на слици.



Слика уз задатак 952

18	11	16
13	15	17
14	19	12

Слика уз задатак 954

955. Како је $M = \{$М, А, Т, Е, И, К$\}$, $T = \{$Т, А, К, М, И, Ч, Е, Њ$\}$, то је $M \cap T = \{$М, А, Т, Е, И, К$\} = M$. Скуп M има $5+4+3+2+1 = 15$ двочланих подскупова.

956. Како је $\frac{2}{29} = \frac{2 \cdot 69}{29 \cdot 69} = \frac{138}{2001} < \frac{5x}{2001} < \frac{3}{23} = \frac{3 \cdot 87}{23 \cdot 87} = \frac{261}{2001}$, то је $138 < 5x < 261$, па је $5x \in \{140, 145, 150, ..., 255, 260\}$. Тада је $x \in \{28, 29, 30, ..., 51, 52\}$. Дакле, $52 - 27 = 25$ природних бројева испуњава услове.

957. Бројеви $2p$ и 100 су дељиви са 2, па и број $3q$ мора бити дељив са 2. Дакле, $q = 2$, па је $2p = 94$ и $p = 47$. С обзиром да је 2 једини паран прост број, то је $p = 47$, $q = 2$ једино решење.

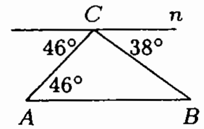
958. Како је $\sphericalangle BAC = 46°$, то је и $\sphericalangle ACn = 46°$, јер су то углови са паралелним крацима (слика). Како је $\sphericalangle BCn = 38°$, то је $\sphericalangle ACB = 180° - (46° + 38°)$, па је $\sphericalangle ACB = 96°$.

959. Трећина чоколада кошта 80 динара, па све коштају 240 динара. Дакле, једна чоколада кошта $240 : 8 = 30$ динара. Марија је уложила $3 \cdot 30 = 90$ динара, а Петар $5 \cdot 30 = 150$ динара, па је Марија узела $90 - 80 = 10$ динара, а Петар $150 - 80 = 70$ динара.

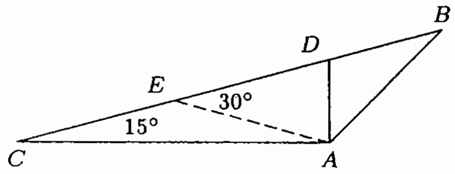
960. Претпоставимо да сваком од дечака припадне различит број кликера. Ако пођемо од могућности: $0 + 1 + ... + 16 + 17 = 18 \cdot 17 : 2 = 9 \cdot 17 = 153$, видимо да ова варијанта захтева више од 150 кликера, што значи да би свака друга варијанта, где би најмањи број кликера био већи од нуле, тим пре била немогућа.

961. На познат начин конструишемо угао од 60°, који са датим има заједничко теме и крак, а други крак му је са исте стране где и други крак угла

од 19°. Узастопном деобом угла од 60° добијамо угао од 15°. Разлику до 19° узастопно поделимо на пола и тако добијамо дужину лука који одговара углу од 2° односно 1°. На крају, овај лук наносимо на лук угла од 19°, истог полупречника. Напомена: Могуће је и друго решење: ако се угао од 19° нанесе 19 пута добија се угао од 361° који је за један степен већи од пуног угла. Потом се онда тим углом од 1° може извршити подела угла од 19°.



Слика уз задатак 958



Слика уз задатак 963

962. Како вредност израза треба да је већа од 0 и мања од 1, то израз $3x - 6$ треба да је већи од 0 и мањи од 9. Лако се израчунава да је $x \in \{3, 4\}$.

963. Нека је ABC троугао са угловима од 30° и 15° редом код темена B и C (слика). Како је троугао ACD правоугли, то је центар описане кружнице E на средини хипотенузе CD, дакле $CE = ED = AE$. Како је $\triangle CAE$ једнакокрак, јер је $CE = AE$, то је $\sphericalangle CAE = 15°$, а $\sphericalangle AED = 30°$, као спољашњи угао тог троугла. У $\triangle AEB$ је $AE = AB$, одакле следи да је $CE = ED = EA = AB$, па је $CD = 2AB$.

964. Ако се крене од краја, након сусрета са Јеленом, Ђорђе је остао без чоколаде. Јелени је дао половину свих које је имао у џепу и још пола од једне: $x - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = 0$. Следи да је $x = 1$. Из овога се јасно види да је након сусрета са Баном имао једну чоколаду. Ако број чоколада који је имао пре сусрета са Баном обележимо са y онда је $y - (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) = 1$. Дакле, $y = 3$, па је након сусрета са Аном, Ђорђу преостало 3 чоколаде. Ако је укупан број чоколада које је купио Ђорђе био n, сада је јасно $n - (\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) = 3$. Следи да је $n = 7$.

965. Уврштавањем броја m у дати израз добија се да је вредност датог израза једнака $\frac{33}{2}$.

966. Нека је $a = 3\,cm$ страница квадрата K, а a_1 страница квадрата K_1. Како је $P = \frac{3}{4}P_1$, то је $a^2 = \frac{3}{4}a_1^2$. Одавде је $9\,cm^2 = \frac{3}{4}a_1^2$, па је $a_1 = 2\sqrt{3}\,cm$. Конструкцију броја $\sqrt{3}$ (видети задатак 940) лако изводимо након чега је конструкција квадрата једноставна.

967. Нека је $a = -\frac{666}{667} = -(\frac{667-1}{667}) = -1 + \frac{1}{667}$, $b = -\frac{1333}{1334} = -(\frac{1334-1}{1334}) = -1 + \frac{1}{1334}$ и $c = -\frac{1998}{2001} = -(\frac{2001-3}{2001}) = -1 + \frac{3}{2001} = -1 + \frac{1}{667}$. Следи да је $a = c > b$.

968. Први број је 40, а нека је други број x. Тада је трећи број $40 - x$; четврти број $x - 40 + x = 2x - 40$; пети број $80 - 3x$; шести број $5x - 120$; седми број $200 - 8x$; осми број $13x - 320$ и девети број $520 - 21x$. Дакле, $520 - 21x = 100$ или $21x = 420$, па је $x = 20$. Дакле, чланови низа су $40, 20, 20, 0, 20, -20, 40, -60, 100$.

969. Како је због односа углова у ромбу и из особине да су суседни углови суплементни $\alpha + 3\alpha = 180°$, то је $4\alpha = 180°$, па је угао $\alpha = 45°$. Ако са h обележимо висину ромба, тада је страница ромба $a = h\sqrt{2}$. Како је $P = \sqrt{8}\,cm^2$ и $P = ah$, то следи да је $\sqrt{8}\,cm^2 = h\sqrt{2}\cdot h$, па је $h = \sqrt{2}\,cm$. Тада је $a = 2\,cm$, па је обим ромба $O = 8\,cm$.

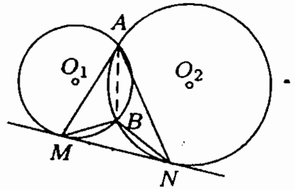
970. Да би се решила дата једначина морају се претходно размотрити карактеристични интервали: $x < 0$; $0 \le x < 1$ и $1 \le x$. У првом интервалу једначина је $x - (x-1) = 2 + x$, па је $x = -1$ и решење припада интервалу. У интервалу $[0, 1)$ једначина постаје $x - (x-1) = 2 - x$ и решење $x = 1$ очгледно не припада посматраном интервалу. Коначно, у интервалу $[1, \infty)$ једначина је $x + (x-1) = 2 - x$ и решење $x = 1$ припада интервалу. Дакле, решења дате једначине су $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Коначно, производ квадрата разлике решења и збира квадрата решења је: $(-1-1)^2(1+1) = 8$.

971. Дата неједначина $\dfrac{\frac{2}{3} - 3x}{-x + \frac{1}{2}} > 1$ еквивалентна је са неједначином $\dfrac{-12x+1}{3(-2x+1)} > 0$. Следи да је $(-12x+1 > 0$ и $-2x+1 > 0)$ или $(-12x+1 < 0$ и $-2x+1 < 0)$. Тражене вредности променљиве x су: $x < \frac{1}{12}$ или $x > \frac{1}{2}$.

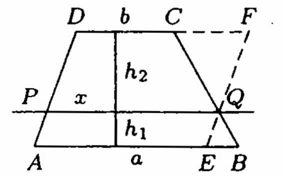
972. Како је периферијски угао једнак одговарајућем углу између тангенте и тетиве истог круга, то је $\sphericalangle MAB = \sphericalangle NMB$ и $\sphericalangle NAB = \sphericalangle MNB$ (слика). Тада је $\sphericalangle MAN + \sphericalangle MBN = \sphericalangle MAB + \sphericalangle NAB + \sphericalangle MBN = \sphericalangle NMB + \sphericalangle MNB + \sphericalangle MBN = 180°$, јер су то углови троугла MBN.

973. Нека је $ABCD$ дати трапез и нека је тражена дуж $PQ = x$ (слика). Нека је h_1 висина трапеза $ABQP$, а h_2 висина трапеза $PQCD$. Нека права која садржи Q и која је паралелна са AD сече праве AB и CD редом у тачкама E и F. По услову задатка је $P_{ABQP} = P_{PQCD}$. Добија се да је $\frac{a+x}{2}h_1 = \frac{b+x}{2}h_2$. Одавде је $\frac{a+x}{b+x} = \frac{h_2}{h_1}$. Како је троугао EBQ сличан са

троуглом FCQ, то је $\frac{a-x}{x-b} = \frac{h_1}{h_2}$ или $\frac{h_2}{h_1} = \frac{x-b}{a-x}$. Даље је $\frac{a+x}{b+x} = \frac{x-b}{a-x}$, па је $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

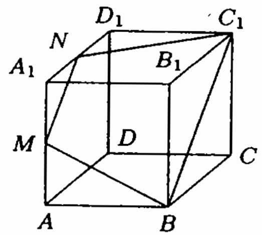


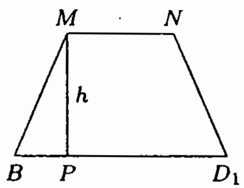
Слика уз задатак 972



Слика уз задатак 973

974. Нека је пресек коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са датом равни једнакокраки трапез BC_1NM, где су N и M редом средишта ивица A_1D_1 и A_1A (слика). Основице трапеза су $BC_1 = a\sqrt{2}$ и $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а краци су $BM = C_1N$. Како је $BM^2 = AB^2 + AM^2$, то је $BM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$. За висину h трапеза BC_1NM важи $h^2 = BM^2 - BP^2$, где је $BP = \frac{BC_1 - MN}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ (слика). Како је $h^2 = \frac{5a^2}{4} - \frac{2a^2}{16}$, то је $h = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$. Површина траженог пресека је $P_{BC_1NM} = \frac{BC_1 + MN}{2}h$. Одавде је $P_{BC_1NM} = \dfrac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{9a^2}{8}$.





Слика уз задатак 974

975. За нумерацију једноцифрених парних страница употребе се 4 цифре. За 45 парних двоцифрених страница употреби се $45 \cdot 2 = 90$ цифара. За 100, 102, 104, 106, 108 и 110 страницу употреби се $6 \cdot 3 = 18$ цифара. Дакле, укупно је потребно $4 + 90 + 18 = 112$ цифара.

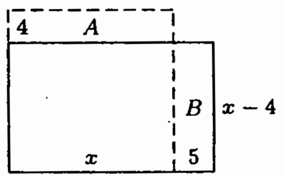
976. Нека је страница добијеног квадрата x (слика). Тада су странице правоугаоника $x+5$ и $x-4$. Користећи услове задатка, следи да су површине правоугаоника A и B једнаке, па је $5(x-4) = 4x$. Дакле, $5x - 20 = 4x$, па је $x = 20$, тј. страница квадрата је $20\,cm$, а странице правоугаоника су $25\,cm$ и $16\,cm$. Обим правоугаоника је $82\,cm$ и за $2\,cm$ је већи од обима квадрата.

977. Најмањи је онај број који има најмање цифара, па је тражени број седмоцифрен (ако би био шестоцифрен, збир његових цифара био би највише $6 \cdot 9 = 54$). Дакле, тражени број је 7999998.

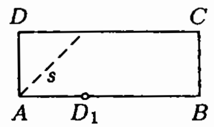
978. Ако у једној тони морске воде има $35\,kg$ соли, онда у $1\,kg$ морске воде има $35\,000\,g : 1\,000 = 35\,g$. Тада у $1\,000\,g : 5 = 200\,g$ морске воде има $35g : 5 = 7\,g$ соли. Ако $1\,000\,kg$ обичне воде садржи $40\,g$ соли, онда $1\,000\,kg : 40 = 25\,kg$ воде садржи $1\,g$ соли. Дакле, за $7\,g$ соли потребно је $7 \cdot 25\,kg = 175\,kg$ обичне воде.

979. Како је $2\,001 = 3 \cdot 667 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ то су могућа следећа решења: $61 \cdot 1 \cdot 69 = 23 \cdot 3 \cdot 29 = 2\,001$.

980. Тражени број је дељив са 15, дакле мора бити дељив и са 3 и са 5. Најмањи је онај природан број који има најмање цифара, при чему је последња цифра тог броја 0 или 5 (због дељивости са 5). Ако је последња цифра 0, онда је најмањи могући такав број 690. Ако је последња цифра 5, онда је најмањи такав број 195. Дакле, тражени број је 195.



Слика уз задатак 976



Слика уз задатак 982

981. Ако се преосталом делу од $1.5\,m$ „врати“ $0.5\,m$ добија се $2\,m$ што је половина мањег дела. Дакле, мањи део је $4\,m$. Ако вратимо још $0.5\,m$, онда је половина канапа $4.5\,m$, па је цео канап дужине $9\,m$.

982. Тачка D_1 припада дужи AB и $AD = AD_1 = 4\,cm$ (слика). Како је $AB = AD_1 + D_1B = 4\,cm + 7\,cm = 11\,cm$, тражени обим правоугаоника је $2 \cdot (11\,cm + 4\,cm) = 30\,cm$.

983. Како је $14 = 2 \cdot 7$, то постоје само две могућности: офарбане су две стране коцке и то оне две које имају заједничку ивицу или су офарбане три стране коцке које немају заједничко теме. У првом случају свих 14 коцкица

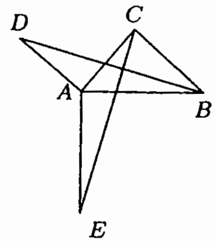
су наређане једна на другу, а у другом случају је два пута по 7 коцкица наређано једна на другу. Дакле, у првом случају је $a = 14\,cm$, а у другом је $a = 7\,cm$. Ако је $a = 14\,cm$, онда је број неофарбаних коцкица $14 \cdot 14 \cdot 14 - 14 \cdot 14 - 14 \cdot 13 = 2\,366$ коцкица. Ако је $a = 7\,cm$, онда је број неофарбаних коцкица $7 \cdot 7 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 210$.

984. Нека је број девојчица x. Прва од њих познаје 7, друга $7 + 1 = 8$, трећа $7 + 2 = 9$, последња $7 + (x-1)$ дечака. Дакле, укупан број девојчица и дечака је $x + 7 + (x-1) = 20$. Значи да је $2x + 6 = 20$, па је $x = 7$. Дакле, девојчица је 7, а дечака 13.

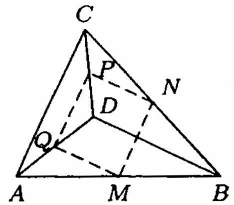
985. Следи да је $||x| - 1| = 2\,000$. Према томе, или је $|x| - 1 = 2\,000$, или је $|x| - 1 = -2\,000$. Дакле, или је $|x| = 2\,001$ или је $|x| = -1\,999$ (ово је немогуће). Тражена решења су $2\,001$ или $-2\,001$.

986. Троуглови ABD и ACE су подударни ($AD = AC$, $\sphericalangle DAB = 90° + \alpha = \sphericalangle EAC$ и $AB = AE$) (слика). Из подударности следи да је $BD = CE$.

987. Како је број $\overline{63b1}$ непаран, то он не може бити дељив ни са 2 ни са 4. Према томе, производ $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ је дељив са $12 = 3 \cdot 4$ ако је број $\overline{54a}$ дељив са 12 или ако је дељив са 4, а број $\overline{63b1}$ дељив са 3. Број $\overline{54a}$ је дељив са 12, ако је $a = 0$. Број $\overline{54a}$ је дељив са 4 ако је $a \in \{0, 4, 8\}$, а број $\overline{63b1}$ је дељив са 3, ако је $b \in \{2, 5, 8\}$. Према томе, задатак има 16 решења: $(a, b) \in \{(0,0), (0,1), (0,2), \ldots, (0,9), (4,2), (4,5), (4,8), (8,2), (8,5), (8,8)\}$.



Слика уз задатак 986



Слика уз задатак 988

988. Како је $AM = MB$ и $BN = NC$, то је MN средња линија троугла ABC (слика). Слично је и PQ средња линија троугла ADC. Следи да је MN једнако и паралелно са PQ. Такође је NP средња линија троугла BCD, а QM средња линија троугла ABD, па је NP једнако и паралелно са MQ. Из добијене једнакости и паралелности јасно је да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

989. Нека је човек рођен $\overline{19xy}$ године. Он сада има $2\,001 - \overline{19xy}$ година, па је $2\,001 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$. Дакле, $2\,001 - 1\,000 - 900 - 10x - y = 10 + x + y$. Следи да је $91 = 11x + 2y$, па је x непаран број. Како је $2y \le 18$, то је

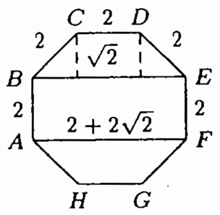
$73 \le 11x \le 91$. Следи да је $x \in \{7, 8\}$, дакле $x = 7$, па је и $y = 7$. Човек је рођен 1977 године.

990. Како је $9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2$ то је $A = \sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = |\sqrt{5} - 3| + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 1$, па је алгебарска вредност датог израза рационалан број.

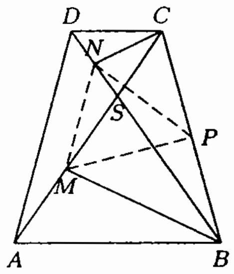
991. Збир цифара 10 имају следеће четвороцифрене комбинације са различитим цифрама: $0+1+2+7 = 0+1+3+6 = 0+1+4+5 = 0+2+3+5 = 1+2+3+4$. Прва, друга, трећа и четврта комбинација имају по $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ четвороцифрених бројева, јер нула не може бити прва цифра, а последња комбинација садржи $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ броја. Укупан број таквих четвороцифрених бројева је $18 + 18 + 18 + 18 + 24 = 96$.

992. Ако први многоугао има m, а други n страница, онда је очигледно $\frac{(m-2)180^\circ}{m} : \frac{(n-2)180^\circ}{n} = 3 : 2$ или $3m(n-2) = 2n(m-2)$, па је $3mn - 6m = 2nm - 4n$. Тада је $mn - 6m + 4n = 0$. Следи да је $mn - 6m + 4n - 24 = -24$, па је $(m+4)(6-n) = 24$. Дакле, $m+4 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Условима задатка очигледно одговарају само вредности $m = 4$, $m = 8$, $m = 20$ и одговарајуће вредности $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

993. Тражена површина је једнака збиру површина правоугаоника $ABEF$ и трапеза $BCDE$ (слика). Дакле, површина је $P = 6(1 + \sqrt{2})\, cm^2$.



Слика уз задатак 993

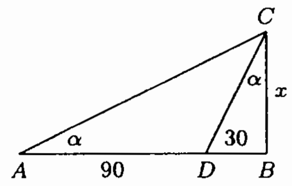


Слика уз задатак 994

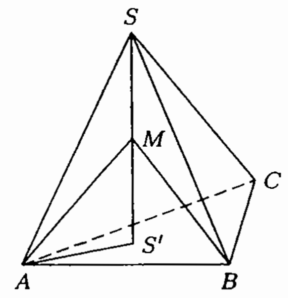
994. Како је MN средња линија троугла ASD то је MN половина крака AD, па према томе и крака BC (слика). Троугао BCN је правоугли, па је тежишна дуж PN једнака половини хипотенузе BC. Слично је и троугао BMC правоугли, па је тежишна дуж MP једнака половини хипотенузе BC. Дакле, $MN = NP = MP = \frac{1}{2}BC$.

995. Нека је x број тачних задатака, y број нетачних задатака и z број задатака које ученик није решавао. Тада је $x + y + z = 20$ и $8x - 5y = 13$.

Решавањем друге једначине добија се да је $x = 6$, или $x = 11$ или $x = 16$. Одговарајуће вредности су 7, 15 и 23. Очигледно је да последње две могућности нису могуће, јер је $x + y > 20$. Дакле, једино решење је $x = 6$, $y = 7$ и $z = 7$.



Слика уз задатак 997



Слика уз задатак 998

996. (а) Да би праве биле паралелне мора $2m - 0.5 = 7m + 2$, одакле је $m = 0.5$.

(б) Из услова $2m - 0.5 < 0$ и $7m + 2 > 0$ добија се да је $-\frac{2}{7} < m < \frac{1}{4}$.

997. Троуглови ABC и BCD су слични (оба су правоугла са оштрим углом α) (слика). Из сличности је $AB : BC = BC : BD$ или $120 : x = x : 30$ или $x^2 = 3\,600$, па је $x = 60\, m$.

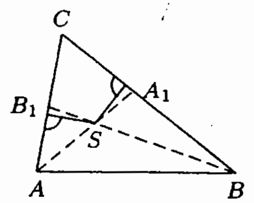
998. Ако је ивица пирамиде x, онда је $AS' = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $SS' = x\sqrt{\frac{2}{3}}$ (слика). Тада је $SM = MS'$ половина те дужи па је, користећи Питагорину теорему, $MA^2 = MB^2 = \frac{x^2}{2}$. Тада је $AM^2 + BM^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x^2 = AB^2$, што на основу обрнуте Питагорине теореме значи да је троугао ABM правоугли.

999. Ученика шестог разреда бирамо на три начина. Остала три члана екипе бирамо по принципу: 1 седмак и 2 осмака; 2 седмака и 1 осмак или сва 3 седмака. То је редом $(4 \cdot 5 \cdot 4) : 2 = 40$, $(4 \cdot 3 : 2) \cdot 5 = 30$ или 4 начина. Према томе, екипу је могуће изабрати на укупно $3 \cdot (40 + 30 + 4) = 3 \cdot 74 = 222$ начина.

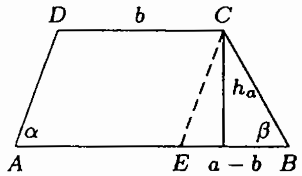
1000. У маси пшенице од $4\,250\, kg$, воде је 20%, дакле $850\, kg$. После сушења пшенице, маса пшенице је смањена за $250\, kg$, дакле остало је још само $600\, kg$ воде. Влажност пшенице после сушења је, дакле, $600 : 4\,000$, тј. 15%.

1001. Нека је $70 \cdot a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - n = X$. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, па је $n = 3p + a$, што значи да је $X = 70 \cdot a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - n = 69 \cdot a + a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - 3p - a = 69a + 21b + 15c + 3p$ дељив са 3. На сличан начин се, користећи чињеницу да је $n = 5q + b$, односно $n = 7r + c$, доказује да је X дељиво са 5 и 7. Према томе, X је дељив са $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

1002. Нека је у троуглу ABC угао $\alpha > \beta$, тј. $\alpha > 60°$ и $\beta < 60°$ (слика). Тада је $\sphericalangle AA_1B = \frac{\alpha}{2} + 60° > 90°$ и $\sphericalangle BB_1A = \frac{\beta}{2} + 60° < 90°$. Нека су M и K, редом, подножја нормала из S на BC, односно AC. Како је S центар уписане кружнице у троугао ABC, то је $SM = SK$. Троуглови SMA_1 и CKB_1 имају једнаке углове, јер је $\sphericalangle SMA_1 = \sphericalangle AKB_1 = 90°$ и $\sphericalangle SA_1M = \sphericalangle AA_1C = \frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\beta}{2} + 60° = \sphericalangle BB_1A = \sphericalangle SB_1K$. Тада је и $\sphericalangle MS_1A = \sphericalangle KSB_1$. Коначно, троуглови SMA_1 и SKB_1 су подударни, па је и $SA_1 = SB_1$.



Слика уз задатак 1002



Слика уз задатак 1003

1003. Нека је E тачка на основици AB, таква да је $AE = CD$ (слика). Како је $CE \parallel AD$, то је могуће конструисати троугао BCE, јер су познати елементи: $\sphericalangle CEB = \alpha$, $\sphericalangle CBE = \beta$ и висина $CC' = h_a$. У добијеном троуглу BCE дуж BE једнака је $a - b$ и како је дата дуж $a + b$, то је могуће конструисати дужи a и b, чиме даља конструкција постаје једноставна.

1004. Пера ће из корпе на којој пише Рајко извући само једну воћку. Та корпа је или Ђорђева (у њој су тада 2 крушке и 3 јабуке) или Перина (у њој су тада 3 бресквe). Разликују се три случаја:

1) Ако је Пера извукао крушку, јасно је да је та корпа Ђорђева. Тада корпа на којој пише Пера, припада Рајку, а корпа на којој пише Ђорђе припада Пери.

2) Ако је Пера извукао јабуку, опет је јасно је да је та корпа Ђорђева. Тада корпа на којој пише Пера, припада Рајку, а корпа на којој пише Ђорђе припада Пери.

3) Ако је Пера извукао брескву, та корпа је његова, па је корпа на којој пише Пера у ствари Ђорђева, а корпа на којој пише Ђорђе припада Рајку.

1005. Нека је најмањи заједнички садржалац бројева a и b једнак s, а највећи заједнички делилац једнак d. Тада је $s = k\,d$, па је $s = k\,d = d + 20$. Одавде је $(k-1)d = 20$, па су могући следећи случајеви:

1) $d = 1$, $k - 1 = 20$, $k = 21$. Тада је $s = 21$, па је $a = 21$, $b = 1$ или $a = 7$, $b = 3$.

2) $d = 2$, $k - 1 = 10$, $k = 11$. Тада је $s = 22$, па је $a = 22$, $b = 2$.

3) $d = 4$, $k - 1 = 5$, $k = 6$. Тада је $s = 24$, па је $a = 24$, $b = 4$.

4) $d = 5$, $k - 1 = 4$, $k = 5$. Тада је $s = 25$, па је $a = 25$, $b = 5$.

5) $d = 10$, $k - 1 = 2$, $k = 3$. Тада је $s = 30$, па је $a = 30$, $b = 10$.

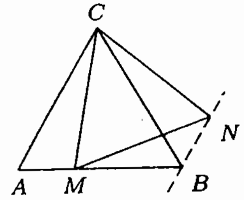
6) $d = 20$, $k - 1 = 1$, $k = 2$. Тада је $s = 40$, па је $a = 40$, $b = 20$.

1006. Ако се $\dfrac{2^{17} + 2^{16} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1}{2^8 + 2^7 + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1}$ прошири са $2 - 1$ добија се израз

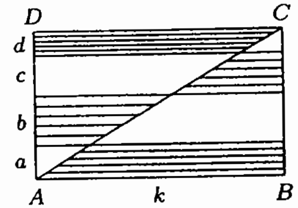
$$\frac{(2-1)(2^{17} + 2^{16} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1)}{(2-1)(2^8 + 2^7 + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1)} : 3^3 \text{ или}$$

$$\frac{2^{18} - 1}{2^9 - 1} : 3^3 = \frac{(2^9 - 1)(2^9 + 1)}{2^9 - 1} : 3^3 = (2^9 + 1) : 27 = 513 : 27 = 19.$$

1007. Како је $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MNC = 60°$, то постоји кружница која садржи тачке M, B, N и C (слика). Како је $\sphericalangle CMN = 60°$, то је и $\sphericalangle CBN = 60°$ (као периферијски углови над истом тетивом CN). Како је $\sphericalangle ACB = \sphericalangle NBC = 60°$, то су праве AC и BN паралелне.



Слика уз задатак 1007



Слика уз задатак 1008

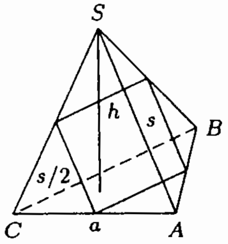
1008. Нека је S ознака за површине шрафираних, а T за површине белих фигура. Нека L је ознака за фигуре лево од дијагонале AC, а D ознака за фигуре десно од дијагонале AC и нека је k дужина датог правоугаоника. Тада је очигледно $S_L + T_L = S_D + T_D$, јер обе стране једнакости представљају половину површине целог правоугаоника. Слично је $T_L + S_D = ak + ck = (a + c)k = (b + d)k = bk + dk = S_L + T_D$. Сабирањем добијених релација следи $S_L + T_L + T_L + S_D = S_D + T_D + S_L + T_D$. Одавде је јасно да је $T_L = T_D$, па је и $S_L = S_D$.

1009. Бројеви које је Лека написао су из скупа $\{10, 11, \ldots, 99\}$. Четрдесет парова $(10, 90)$; $(11, 89)$; $(49, 51)$ у збиру дају 100, бројеви 50, 91, 92, 93, …, 98, 99 (укупно 10) немају својих одговарајућих парова. Очигледно је да ма како Лека бирао 55 бројева увек постоји 45 ($45 > 40$) који припадају првом скупу, тј. увек постоје два чији је збир 100. Дакле, Жарко је био у праву.

1010. Нека је количник који је израчунао сваки ученик дефинисан изразом $\dfrac{x_k}{x_k + 2k - 1}$ где је x_k број бомбона које је добио k-ти ученик, а k редни број његовог места у врсти. Како је по условима задатка $\dfrac{x_k}{x_k+2k-1}$ константно, то је $\dfrac{x_k}{x_k+2k-1}=M$. Дакле, $x_k=\dfrac{M}{1-M}(2k-1)$, па је $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=800$, али је и $x_1+x_2+\cdots+x_{20}=\dfrac{M}{1-M}(1+3+\cdots+39)=\dfrac{M}{1-M}400=800$. Значи да је $\dfrac{M}{1-M}=2$, па је $x_{12}=2(24-1)=46$ бомбона.

1011. Нека је на турниру учествовало m мајстора и v велемајстора. Између њих је одиграно mv партија. Укупан број одиграних партија на турниру је $\dfrac{(m+v)(m+v-1)}{2}$. Из услова задатка је $2mv=(m+v)(m+v-1):2$, па је $4mv=(m+v)^2-(m+v)$. Одавде је број учесника турнира $m+v=(m+v)^2-4mv=m^2+2mv+v^2-4mv=m^2-2mv+v^2=(m-v)^2$.

1012. Нека је s дужина бочне ивице дате пирамиде (слика). Пресек је правоугаоник чије су странице $\dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{s}{2}$. Обим пресека је дакле $a+s$, а површина $\dfrac{as}{4}$. Како је $s=\sqrt{H^2+\dfrac{a^2}{3}}$, то је обим пресека $O=a+\sqrt{H^2+\dfrac{a^2}{3}}$, а површина $P=\dfrac{a}{4}\sqrt{H^2+\dfrac{a^2}{3}}$.

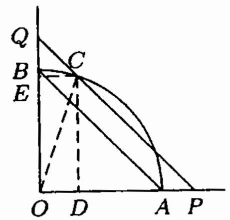


Слика уз задатак 1012

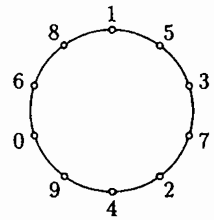
1013. Нека су D и E подножја нормала из тачке C редом на OA и OB и нека је $OA=OB=OC=r$ (слика). Тада је $\sphericalangle OAB=\sphericalangle OBA=45°$, па је због паралелности дужи AB и PQ и $\sphericalangle OPQ=\sphericalangle OQP=45°$. Зато је $PC^2=2CD^2$ и $CQ^2=2CE^2$. Тада је $PC^2+QC^2=2CD^2+2CE^2=2(CD^2+CE^2)=2OC^2=2r^2=AB^2$.

1014. Нека је могуће направити распоред тако да збир свака три узастопна броја није већи од k. Нека су у том случају дате цифре распоређене на следећи начин: $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Тада је очигледно $(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)\leq 3k$, а одавде је $(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+(a_7+a_8+a_9)+a_{10}\leq 3k+a_{10}$. Како је лева страна претходне неједнакости једнака 45 то је $45\leq 3k+a_{10}$. Добијени услов мора да важи за сваку цифру па и за

$a_{10}=0$, па је $k\geq 15$. Према томе, услов (а) није могућ, а услов (б) је могућ и један такав пример дат је на слици.



Слика уз задатак 1013

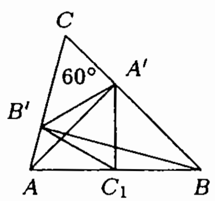


Слика уз задатак 1014

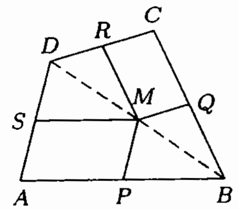
1015. Очигледно је $a=3b$, па је a број који је дељив са 3. Како је број a дељив са 3, то је и збир његових цифара дељив са 3. Дакле и збир цифара броја b (који је једнак са збиром цифара броја a) је дељив са 3. Дакле и број b је дељив са 3, па је $b=3k$, што значи да је $a=3\cdot 3k=9k$. Одавде следи да је збир цифара броја a дељив са 9, што значи и да је збир цифара броја b дељив са 9, односно и број b је дељив са 9. Како је $b=9l$, то је $a=3\cdot 9l=27l$, што је и требало доказати.

1016. Од поноћи па до подне велика казаљка пређе 12 пуних кругова. У сваком кругу, сем у првом, ће се поклопити мала и велика казаљка, што значи да ће бити 11 поклапања. Та поклапања ће се реализовати на сваких $\dfrac{12}{11}$ сати. Дакле у $1\dfrac{1}{11}h$, $2\dfrac{2}{11}h$, $3\dfrac{3}{11}h$, $4\dfrac{4}{11}h$, $5\dfrac{5}{11}h$, $6\dfrac{6}{11}h$, $7\dfrac{7}{11}h$, $8\dfrac{8}{11}h$, $9\dfrac{9}{11}h$, $10\dfrac{10}{11}h$ и $11\dfrac{11}{11}h=12h$.

1017. Троугао $AA'B$ је правоугли, па је C_1A' као хипотенузина тежишна дуж једнака $\dfrac{1}{2}AB$ (слика). Слично је и $C_1B'=\dfrac{1}{2}AB$.
Како су троуглови AC_1B' и BC_1A' једнакокраки, то је $\sphericalangle AC_1B'=180°-2\alpha$, а $\sphericalangle BC_1A'=180°-2\beta$. Тада је $\sphericalangle A'C_1B'=180°-(180°-2\alpha+180°-2\beta)=2\alpha+2\beta-180°$. Како је $\alpha+\beta=120°$, то је $\sphericalangle A'C_1B'=240°-180°=60°$, па је $\triangle A'C_1B'$ једнакостранични.



Слика уз задатак 1017



Слика уз задатак 1018

1018. Како је $APMS$ паралелограм, то је $SM \parallel AB$ и $PM \parallel AD$ (слика). Како су P и S средишта страница AB и AD, то су дужи SM и PM средње линије, па је тачка M средиште дијагонале BD. Тада су MQ и MR средње линије троугла BCD, па је $MQ \parallel CD$ и $MR \parallel BC$, што значи да је $CQMR$ такође паралелограм.

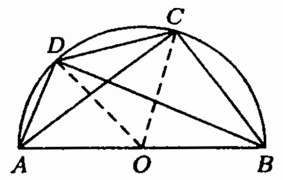
1019. Свако се могао руковати највише 6 пута (са три брачна пара). Како је дато седам различитих одговора, следи да су одговори: 0,1,2,3,4,5,6. Пођимо од особе, рецимо Милеве, која је имала 6 руковања. Она се руковала са свима, осим са својим брачним другом. Одавде следи да су сви остали, осим Милевиног мужа, имали бар по једно руковање. Дакле, Милевин муж је имао 0 руковања. Остале су особе са 1,2,3,4 и 5 руковања. Особа, која је имала 5 руковања, руковала се са Милевом и са свима од преостале четири особе. Следи да се њен брачни друг руковао само са Милевом, тј. руковао се само једном. Слично се може закључити да су се трећи брачни пар руковали 4 пута и 2 пута, што значи да се Љубица руковала 3 пута.

1020. Број $340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$. Сва три чиниоца $a+b$, $b+c$ и $c+a$ су већи или једнаки 2, јер су a, b и c природни бројеви.
Сва три чиниоца нису истовремено парни, јер би тада њихов производ био дељив са 8, а број 340 то није.
Ако би два чиниоца, на пример $a+b$ и $b+c$, били парни, онда би и њихов збир $a+2b+c$ био паран, што значи да би и трећи чинилац $a+c$ био паран, а то је немогуће.
Дакле, једина могућност је да је један чинилац паран, а остали непарни, на пример $a+b=4$, $b+c=5$ и $c+a=17$, што није могуће, јер је $a+b+b+c = a+2b+c = 9 < a+c = 17$.
Према томе, такви природни бројеви a, b и c не постоје.

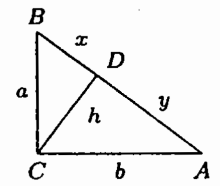
1021. Нека је $m \geq n$, тада је $m^2 < m^2+n \leq m^2+m < (m+1)^2$. Дакле, број m^2+n је између квадрата два узастопна природна броја, па не може бити квадрат природног броја.
Ако је $n \geq m$, онда је $n^2 < n^2+m \leq n^2+n < (n+1)^2$, па број n^2+m није квадрат природног броја.

1022. Како су углови $\sphericalangle ADB$ и $\sphericalangle ACB$ прави, то је четвороугао $ABCD$ тетивни, а центар круга описаног око четвороугла је тачка O која је средиште странице AB (слика). Како је $CD = \frac{1}{2}AB$, то је CD једнако полупречнику круга $k(O, AO = OB = CD)$, па је ΔOCD једнакостраничан. Како је периферијски угао CAD над тетивом CD једнак половини централног угла, то је $\sphericalangle CAD = \frac{1}{2}\sphericalangle COD = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$.
Тада је оштар угао између дијагонала једнак 60°, а туп угао 120°.

1023. Нека тачка D дели хипотенузу AB на дужи $BD = x$ и $AD = y$ (слика). Познато је да је у сваком правоуглом троуглу $r = \frac{a+b-c}{2}$. Ако ову чињеницу применимо на ΔABC, ΔACD и ΔBCD добија се $r+r_1+r_2 = \frac{a+b-c}{2} + \frac{h+y-b}{2} + \frac{h+x-a}{2} = \frac{a+b-x-y+h+y-b+h+x-a}{2} = h = CD$.



Слика уз задатак 1022



Слика уз задатак 1023

1024. Грађанин који се јавио, није из града A јер би тада порука гласила: „Код нас је пожар“, а одговор „У граду A“.
Ако је грађанин који се јавио из града C његови одговори би били: „Код нас је пожар“ и „У граду A или граду B“.
Према томе јавио се грађанин града B. Како пожар није у B јер му први исказ није тачан и како пожар није у C јер му и други исказ није тачан, ватрогасац ће екипу послати у град A.

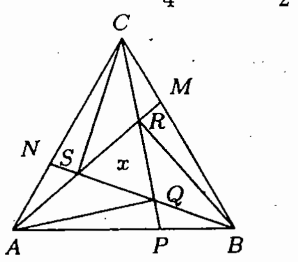
1025. Нека су дати бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ и нека је њихов збир S. Ако је $b_1 = a_2+a_3+\cdots+a_{2001}$, $b_2 = a_1+a_3+\cdots+a_{2001}$, $\ldots$, $b_{2001} = a_1+a_2+\cdots+a_{2000}$, тада је $b_1+b_2+\cdots+b_{2001} = 2000(a_1+a_2+\cdots+a_{2001}) = 2000S$. Како су скупови $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2001}\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_{2001}\}$ једнаки, то је и $b_1+b_2+\cdots+b_{2001} = S$. Дакле, $S = 2000S$, одакле је јасно да је $S=0$. Како је $b_1 = S-a_1 = -a_1$, $b_2 = S-a_2 = -a_2$, $\ldots$, $b_{2001} = S-a_{2001} = -a_{2001}$ очигледно је да сваки члан низа има свој супротни члан (исти по апсолутној вредности, а различит по знаку). С обзиром да је број чланова низа 2001 дакле непаран један члан низа је сам себи супротан, дакле једнак 0. Тада је $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2001} = 0$.

1026. Будући да су a, b, c различити бројеви, можемо узети да је $a<b<c$. Користећи услове задатка, следи да је $ab+bc+ca = abc-(1+2+\cdots+n-a-b-c)$, тј. $abc-ab-bc-ca+a+b+c-1 = 2+\cdots n$, одакле је: $(a-1)(b-1)(c-1) = 2+\cdots+n$.
(а) За $n=12$ је $2+3+\cdots+12 = 77$. Тада је: $(a-1)(b-1)(c-1) = 7 \cdot 11$, па је $a-1=1$, $b-1=7$ и $c-1=11$, тј. $a=2$, $b=8$, $c=12$.

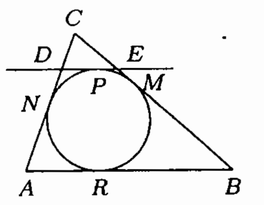
(б) За $n = 17$ је $2+3+\cdots+17 = 152 = 2\cdot2\cdot2\cdot19$, па је: $(a-1)(b-1)(c-1) = 2\cdot2\cdot2\cdot19$. Одавде следи да је $c-1 \geq 19$, тј. $c \geq 20$, што није могуће, јер мора бити $c \leq 17$. Дакле, случај $n = 17$ нема решења.

1027. Нека је $P_{\triangle PBQ} = P_1$ (слика). Тада је $P_{\triangle APQ} = 2P_1$. Нека је $P_{\triangle AQS} = P_2$ и $P_{\triangle QRS} = x$. Тада је $P_{\triangle CMR} = P_{\triangle ANS} = P_1$ и $P_{\triangle BMR} = P_{\triangle CNS} = 2P_1$, а $P_{\triangle BQR} = P_{\triangle CRS} = P_2$.
Како је $P_{\triangle APR} = 2P_{\triangle BPR}$, то је $2P_1 + P_2 + x = 2(P_1 + P_2)$, па је $x = P_2$. Слично је $P_{\triangle APC} = 2P_{\triangle BPC}$, тј. $5P_1 + 2P_2 + x = 2(4P_1 + P_2)$, што значи да је $x = 3P_1$.
Како је $7\,cm^2 = 9P_1 + 3P_2 + x = 3x + 3x + x$, то је $x = 1\,cm^2 = P_{\triangle QRS}$.

1028. Како је $DP = DN$ и $EP = EM$ (тангентне дужи), то је $O_{\triangle CDE} = CD + DP + PE + CE = CD + DN + EM + CE = CN + CM$ (слика). Тада је $O_{\triangle ABC} = CN + AN + AB + BM + CM = O_{\triangle CDE} + AN + AB + BM = O_{\triangle CDE} + AR + AB + BR = 2AB + O_{\triangle CDE}$. Ако означимо $AB = c$, онда је $O_{\triangle CDE} = 2s - 2c$. Троуглови ABC и CDE су слични па је $\frac{x}{c} = \frac{O_{\triangle CDE}}{O_{ABC}}$, односно, $\frac{x}{c} = \frac{2s-2c}{2s}$, одакле је $x = \frac{1}{s}(cs - c^2) = \frac{1}{s}\left[\frac{s^2}{4} - \left(c - \frac{s}{2}\right)^2\right]$. Максимална вредност x је $\frac{s}{4}$, за $c = \frac{s}{2}$.



Слика уз задатак 1027

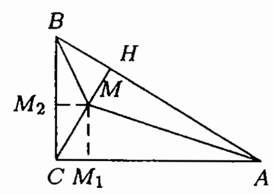


Слика уз задатак 1028

1029. Нека је a број који не учествује у нумерацији и s збир бројева којима су нумерисана темена једне стране коцке. Свако теме је заједничко за три стране па је $6s = 3(1+2+\cdots+9) - 3a$, одакле је $2s = 45 - a$. Одавде следи да је број a непаран, па како број s није дељив са a, то и број 45 није дељив са a. Дакле, $a = 7$.

1030. Претпоставимо, за почетак, да је $a \leq b \leq c$. Уочимо, затим, да је $x^3 \equiv 1 \pmod 9$ или $x^3 \equiv -1 \pmod 9$ или $x^3 \equiv 0 \pmod 9$, за свако $x \in \{0,1,2,\ldots,8\}$. Такође је $2001 \equiv 3 \pmod 9$. Користећи услов задатка, следи да је $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 3 \pmod 9$, па мора бити $a^3 \equiv 1 \pmod 9$, $b^3 \equiv 1 \pmod 9$ и $c^3 \equiv 1 \pmod 9$. С обзиром да је $13^3 > 2001$, то је $a \leq b \leq c \leq 12$, па бројеви a, b и c припадају скупу $\{1,4,7,10\}$. После краће дискусије, добија се да је једина могућност $a = 1$, $b = 10$, $c = 10$.
Одавде следи да су решења дате једначине: $a = 1$, $b = 10$, $c = 10$; $a = 10$, $b = 1$, $c = 10$ и $a = 10$, $b = 10$, $c = 1$.

1031. (а) Претпоставимо да постоји тачка $M \in CL$ таква да је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC$. Како је $\sphericalangle ACL = \sphericalangle LCB$, то је $\sphericalangle AMC = \sphericalangle BMC$, па је $\triangle AMC$ сличан $\triangle BMC$. Како ови троуглови имају и заједничку страницу MC, то је $\triangle AMC \cong \triangle BMC$, па је $AC = BC$, што је супротно претпоставци задатка $AC \neq BC$, па је тврђење под (а) тачно.
(б) Претпоставимо да постоји тачка $M \in CH$ таква да је $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MBC$ (слика). Нека су M_1 и M_2 редом подножја нормала из M на AC и BC. Како су троуглови AMM_1 и MBM_2 правоугли и $\sphericalangle M_1AM = \sphericalangle MBM_2$, то важи $\triangle AMM_1 \sim \triangle MBM_2$, па је $\frac{MM_1}{MM_2} = \frac{AM}{BM}$ (1). Такође, како су троуглови CMM_2 и ABC правоугли и $\sphericalangle MCM_2 = \sphericalangle CAB$ (као углови са нормалним крацима), то важи $\triangle CMM_2 \sim \triangle ABC$, па је $\frac{MM_2}{M_2C} = \frac{BC}{AC}$ (2).

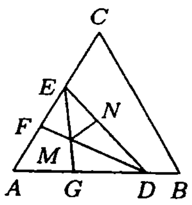


Слика уз задатак 1031

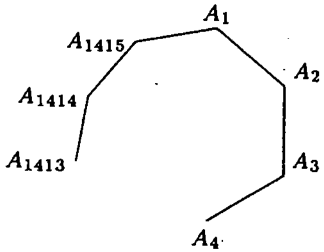
Како је $M_2C = MM_1$, то користећи једнакости (1) и (2) следи $\frac{AM}{BM} = \frac{AC}{BC}$, односно $\frac{AM}{AC} = \frac{BM}{BC}$. Како је и $\sphericalangle CAM = \sphericalangle MBC$, то је $\triangle AMC \sim \triangle BMC$. Одавде следи $\sphericalangle BCM = \sphericalangle ACM$, па је $AC = BC$, а то је супротно претпоставци $AC \neq BC$. Значи, $\sphericalangle MAC \neq \sphericalangle MBC$.

1032. Нека се DF и EG секу у тачки M (слика). Користећи услове задатка следи да је $\sphericalangle DME = \sphericalangle GMF = 120°$, па је четвороугао $AGMF$ тетиван. Одавде следи да је $\sphericalangle GFM = \sphericalangle GAM$ и $\sphericalangle FGM = \sphericalangle FAM$, као периферијски углови над истом тетивом. Како су DF и EG симетрале углова, то је и AM симетрала угла, тј. $\sphericalangle FAM = \sphericalangle GAM$, па је $\sphericalangle GFM = \sphericalangle FGM$ и $\triangle FGM$ је једнакокрак, па је $FM = MG$.
Даље, нека је тачка $N \in ED$ таква да је $\sphericalangle NME = 60°$. Тада је и $\sphericalangle DMN = 60°$. Како је и $\sphericalangle GMF = 120°$, то је $\sphericalangle FME = \sphericalangle DMG = 60°$. Како троуглови FME и MNE имају заједничку страницу EM и једнака два налегла угла, то су они и подударни. Слично је и $\triangle DMG \cong \triangle DNM$. Одавде следи да је $P_{\triangle MDE} = P_{\triangle NME} + P_{\triangle DNM} = P_{\triangle FME} + P_{\triangle DGM}$, $P_{\triangle DEF} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MEF}$ и $P_{\triangle DEG} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MGD}$. Сабирањем ових једнакости добијамо $P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DEG} = 3P_{\triangle MDE}$.

На крају, како један од углова $\sphericalangle DEA$ и $\sphericalangle EDA$ троугла ADE мора бити не мањи од 60°, нека је то $\sphericalangle DEA$. Тада је и $AD \geq DE$ (наспрам већег угла троугла ADE налази се већа страница). Како је $AD \leq AB$, то је и $DE \leq AB$ (1). Даље, како је тачка M центар круга уписаног у троугао ADE полупречника r', то је $P_{\triangle MDE} = \frac{1}{2}DE \cdot r'$. Нека је r полупречник круга уписаног у троугао ABC. Тада је $r' \leq r$ (2). Користећи релације (1) и (2), следи $3\,P_{\triangle MDE} = \frac{3}{2}DE \cdot r' \leq \frac{3}{2}AB \cdot r = s \cdot r = P_{\triangle ABC}$, при чему је s полуобим датог једнакостраничног троугла ABC.
Користећи релације (1) и (2), јасно је да једнакост важи уколико је $DE = AB = BC$ и $r = r'$, тј. у случају $D \equiv B$ и $E \equiv C$.



Слика уз задатак 1032



Слика уз задатак 1033

1033. Можемо посматрати троуглове на следећи начин: $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $\ldots$, $A_{1414}A_{1415}A_1$, $A_{1415}A_1A_2$ (слика). Претпоставимо да је површина сваког од ових троуглова не мања од 1. За било који троугао са страницама a и b важи $2P = a \cdot h_a \leq a \cdot b$ ($h_a \leq b$). Примењујући ову особину на сваки уочени троугао имамо: $A_1A_2 \cdot A_2A_3 \geq 2$ (зато што је $P \geq 1$), $A_2A_3 \cdot A_3A_4 \geq 2, \ldots, A_{1415}A_1 \cdot A_1A_2 \geq 2$. Ако применимо неједнакост $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ добијамо $A_1A_2 + A_2A_3 \geq 2\sqrt{A_1A_2 \cdot A_2A_3} \geq 2\sqrt{2}$, $A_2A_3 + A_3A_4 \geq 2\sqrt{2}, \ldots, A_{1415}A_1 + A_1A_2 \geq 2\sqrt{2}$. Сабирајући претходне неједнакости добијамо: $2(A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{1415}A_1) \geq 1415 \cdot 2\sqrt{2}$, одакле је $\mathcal{O} \geq 1415 \cdot \sqrt{2} = 1415 \cdot 1.4142\ldots$, па је $\mathcal{O} \geq 2001.93$, тј. $\mathcal{O} > 2001$, што је супротно претпоставци у задатку.

ИЗДАЊА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА

13. *З. Каделбург, С. Крстић, П. Младеновић*: МАТЕМАТИКА 1, збирка решених задатака за I разред гимназија и техничких школа

14. *В. Мићић, З. Каделбург*: УВОД У ТЕОРИЈУ БРОЈЕВА, св. 15, треће допуњено издање

15. *В. Драговић, П. Младеновић, С. Огњановић*: ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ ЗА МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА ЗА УЧЕНИКЕ СРЕДЊИХ ШКОЛА (са решењима), св. 17, треће допуњено издање

16. *П. Младеновић*: КОМБИНАТОРИКА, св. 22, треће издање

17. *З. Каделбург, П. Младеновић*: САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ, св. 23

18. *П. Младеновић*: ЕЛЕМЕНТАРАН УВОД У ВЕРОВАТНОЋУ И СТАТИСТИКУ, св. 24

19. *И. Томић, В. Андрић*: МАТЕМАТИЧКА ТАКМИЧЕЊА СРЕДЊОШКОЛАЦА У ЈУГОСЛАВИЈИ 1991. ГОДИНЕ, св. 30

20. *В. Јанковић, З. Каделбург, П. Младеновић*: МЕЂУНАРОДНЕ И БАЛКАНСКЕ МАТЕМАТИЧКЕ ОЛИМПИЈАДЕ 1984–1995, св. 32

21. *М. Арсеновић, В. Драговић*: ФУНКЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ, св. 35

22. РЕПУБЛИЧКА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА 1959–2000, св. 38,

23. *В. Драговић, Ђ. Дугошија, П. Младеновић*: РЕПУБЛИЧКА И САВЕЗНА ТАКМИЧЕЊА ИЗ МАТЕМАТИКЕ ученика средњих школа 1990–2001. године, св. 39,

24. *М. Вугделија*: ДИНАМИЧКО ПРОГРАМИРАЊЕ, Задаци за припреме такмичара средњих школа из информатике