ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Материјали за младе математичаре, св. 31

Републичка комисија за математичка
такмичења ученика основних школа

1000 ЗАДАТАКА
СА МАТЕМАТИЧКИХ ТАКМИЧЕЊА УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА 1998-2007. године

Осмо измењено издање

БЕОГРАД
2007

Аутори: *др Војислав Андрић, др Оливера Ђорђевић, др Драган Ђорић, др Мирјана Ђорић, Александар Илић, мр Милан Јовановић, Мирјана Јовчић, Вера Јоцковић, Љубица Киселички, др Драгослав Љубић, Славољуб Милосављевић, мр Љубинка Петковић, др Бранислав Поповић, мр Драгана Ранковић, др Марија Станић, мр Владимир Стојановић, др Ратко Тошић, др Нинослав Ћирић*

1000 ЗАДАТАКА

са математичких такмичења ученика основних школа 1998–2007. године
Осмо измењено издање

Материјали за младе математичаре, свеска 31

Издавач: ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ
Београд, Кнеза Михаила 35/IV
www.dms.org.yu, E-mail: info@dms.org.yu

За издавача: *др Бранислав Поповић*

Рецензенти: *др Зоран Каделбург, др Павле Младеновић*

Уредник: *др Зоран Каделбург*

Цртежи: *др Мирјана Ђорић, др Марија Станић, мр Милан Јовановић*

Ранија издања: 1996, 1997, 1998, 1999, 2002, 2003, 2006.

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

37.016 : 51(075.2)(079.1)

ХИЉАДУ задатака са математичких такмичења
1000 задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1998–2007. године / [аутори Војислав Андрић ... [и др.] ; цртежи Мирјана Ђорић, Марија Станић, Милан Јовановић]. – 8. измењено изд. – Београд : Друштво математичара Србије, 2007 (Ваљево : Alexandria). – 254 стр. : граф. прикази ; 24 cm – (Материјали за младе математичаре ; св. 31)

На врху насл. стр.: Републичка комисија за математичка такмичења ученика основних школа. – Тираж 2000.

ISBN 978-86-81453-65-0

COBISS.SR-ID 143128332

ISBN 978-86-81453-65-0

Тираж: 2000 примерака

Штампа: „ALEXANDRIA“, Ваљево

САДРЖАЈ

ПРЕДГОВОР ОСМОМ ИЗДАЊУ

У овом издању збирка садржи све задатке (са решењима) са такмичења из математике ученика основних школа из последњих десет година – од 1998. до 2007. године, и то са свих нивоа – од школског, преко општинског, окружног, републичког (државног), савезног (односно Српске математичке олимпијаде), до Балканијаде. Укључени су задаци са десет Јуниорских балканских математичких олимпијада из наведених година.

Београд, септембра 2007. год. *Аутори*

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

IV разред

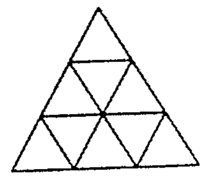
1. За колико се трећина највећег четвороцифреног броја разликује од једанаестине најмањег непарног четвороцифреног броја?

2. Може ли збир два узастопна природна броја бити 19971998? Одговор образложити.

3. Одељење у коме је било 32 ученика купило је лопту која кошта 246 динара, при чему су дечаци за лопту дали по 9 динара, а девојчице по 6 динара. Колико у том одељењу има дечака, а колико девојчица?

4. Квадрат чија је страница 10 cm пресечен је једном правом на два правоугаоника. Израчунати обиме тих правоугаоника, ако се зна да је двоструки обим једног од њих једнак троструком обиму другог правоугаоника.

5. Колико троуглова има на датој слици?



Сл. уз задатак 5

V разред

6. Дати су следећи скупови бројева:
$A = \{1, 8, 9, 10\}$, $B = \{x \mid x - 3 \in A\}$ и $C = \{x \mid x + 2 \in B\}$.
Одредити скупове: $A \cap B$ и $(C/A) \cup (A/C)$.

7. Шта је веће: $\dfrac{71}{1998}$ или $\dfrac{8}{221}$?

8. Производ два броја је 1071. Ако се један од чинилаца повећа за 30, производ је 1701. О којим бројевима је реч?

9. Угао α једнак је $1998'$. Израчунати угао β који је комплементан са углом α и угао γ који је суплементан са углом α.

10. Најкраће растојање тачке A од датог круга k је 3 cm, а растојање тачке A од центра круга је 5 cm. Колико је највеће растојање тачке A од датог круга k?

VI разред

11. Израчунати вредност разломка $\dfrac{a+b}{1998}$ ако су бројеви a и b решења једначина:
$1000 - (900 - (98 - a)) = 1998$ и $1000 - (900 - (98 + b)) = -1998$.

12. Одредити најмање природне бројеве m и n, тако да је $3888 \cdot m$ потпун квадрат, а $3888 \cdot n$ потпун куб неког природног броја.

13. Кречење стана Аца заврши за 10 сати. Ако би му Бора помогао 2 сата, онда би кречење завршили за 6 сати. За колико сати би самостално кречење стана обавио Бора?

14. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) тачке A_1 и C_1 су средишта страница BC и AB. Симетрале страница BC и AB секу се у тачки O, тако да је угао $A_1OC_1 = 121°$. Шта је веће: основица AB или крак AC?

15. У дати угао xOy уписан је круг k који краке датог угла додирује у тачкама A и B. Доказати да је $OA = OB$.

VII разред

16. Израчунати $x + y + z$ ако су x, y и z решења једначина:

$$\sqrt{3(x-1998)} = 3, \quad \sqrt{3y-1998} = 3 \quad \text{и} \quad \sqrt{3}(z-1998) = 3.$$

17. Дата је једнакост $\dfrac{1998^{1998}+1998^{1999}}{1999^{1999}} = x^{1998}$. Колико је x?

18. У троуглу ABC углови α, β и γ задовољавају $\alpha - \beta = 3\gamma$. Доказати да је дати троугао тупоугли.

19. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена C и катетама $a = 6\,\text{cm}$ и $b = 8\,\text{cm}$. Ако су A_1, B_1 и C_1 средишта страница BC, AC и AB одредити полупречник кружнице која садржи тачке A_1, B_1 и C_1.

20. Дешифровати множење $*2* \cdot 45 = (**)^2$.

VIII разред

21. Ако се између цифара датог двоцифреног природног броја напише нула, добија се број који је 9 пута већи од датог. Одредити о којим бројевима је реч.

22. Решити једначину $|x-1| + \sqrt{x^2-6x+9} = 1998$.

23. У унутрашњој области квадрата $ABCD$ дата је тачка M, тако да је угао AMB прав, а $BM = 9\,\text{cm}$. Права BM пресеца дуж CD у тачки K тако да је $CK : DK = 3 : 1$. Израчунати површину квадрата.

24. Израчунати површину и запремину коцке чија је дијагонала једнака дијагонали квадра чије су дужине ивица $1\,\text{cm}$, $5\,\text{cm}$ и $7\,\text{cm}$.

25. Израчунати збир свих производа у таблици на слици.

$11 \cdot 11$	$11 \cdot 12$	$11 \cdot 13$	$11 \cdot 14$	$11 \cdot 15$
$12 \cdot 11$	$12 \cdot 12$	$12 \cdot 13$	$12 \cdot 14$	$12 \cdot 15$
$13 \cdot 11$	$13 \cdot 12$	$13 \cdot 13$	$13 \cdot 14$	$13 \cdot 15$
$14 \cdot 11$	$14 \cdot 12$	$14 \cdot 13$	$14 \cdot 14$	$14 \cdot 15$
$15 \cdot 11$	$15 \cdot 12$	$15 \cdot 13$	$15 \cdot 14$	$15 \cdot 15$

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

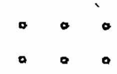
IV разред

26. Јесен је један дан дужа од зиме, 4 дана краћа од лета и 2 дана краћа од пролећа. Колико дана траје свако годишње доба, ако година није преступна?

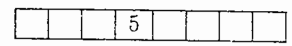
27. Производ два броја је 1998. Ако се један умањи за 24, а други остане исти, нови производ износи 1110. Одредити тражене бројеве.

28. Које све масе можемо измерити на теразијама са два таса ако располажемо само са теговима од 1 kg, 3 kg и 9 kg?

29. Колико има троуглова чија су темена у датим тачкама?



Сл. уз задатак 29



Сл. уз задатак 30

30. У поља дате траке уписати природне бројеве тако да је производ свака три суседна броја једнак 30. Колико различитих решења има?

V разред

31. Дати су коцка ивице 6 cm и квадар чије су ивице 9 cm, 12 cm и 15 cm. На колико се највећих једнаких коцки они могу исећи? Да ли се, користећи све тако исечене коцке, може направити нова коцка?

32. Збир четири природна броја је 1998. Ако се први сабере са 2, од другог одузме 2, трећи помножи са 2, а четврти подели са 2, добијају се једнаки бројеви. О којим бројевима је реч?

33. Одредити све троцифрене природне бројеве који су дељиви са 4 и чији је производ цифара једнак 24.

34. Када се Раша родио његова мајка је имала 25 година. Године 1992. мајка је била 6 пута старија од Раше. Колико година сада има Раша, а колико његова мајка?

35. Колико се правоугаоника који се састоје од 12 поља може избројати на шаховској табли (8×8)?

VI разред

36. У уторак је број гледалаца у биоскопу био за једну трећину већи него у понедељак. У среду је број гледалаца био исти као у понедељак. За колико је број гледалаца у среду био смањен у односу на уторак?

37. Одредити најмањи четвороцифрен број који је дељив са 9 и чији је производ цифара једнак 180.

38. Доказати да је збир тежишних дужи троугла већи од његовог полуобима.

39. Дат је троугао ABC. Ако симетрала угла код темена C са симетралом странице AB образује угао једнак половини угла код темена C, онда је трогао ABC правоугли. Доказати.

40. Сваки од 30 ученика једног одељења поклонио је школској библиотеци по неку књигу. Највише, 8 књига, поклонио је Дуле. Доказати да постоји бар 5 ученика који су поклонили исти број књига.

VII разред

41. Децимални број 19,98 1998 1998 1998 ... написати у облику разломка.

42. Збир првих n природних бројева је троцифрен број са једнаким цифрама. Одредити n.

43. У паралелограму $ABCD$ страница $AB = 30\,\mathrm{cm}$, а угао $\angle DAB = 60°$. Симетрала угла DAB сече страницу CD у тачки E тако да важи $P_{ABCE} = 2 \cdot P_{\triangle AED}$. Колика је површина паралелограма $ABCD$?

44. Кружница $k(O, r = 3\,\mathrm{cm})$ уписана у троугао ABC додирује страницу BC у тачки T. Израчунати дужину странице BC, ако је $\angle BAC = 30°$ и ако је $\angle BOT : \angle COT = 3 : 4$.

45. Десет ученика имају заједно 100 динара. Сваки ученик има најмање један динар и сви имају различит, а цео, број динара. Доказати да међу њима постоји 6 ученика који заједно имају мање од 66 динара.

VIII разред

46. За које вредности реалног броја p једначина $3 - \dfrac{x-p}{2} = x$ има целобројна решења по x, која задовољавају услов $|x| < 2$?

47. У троуглу ABC мерни бројеви свих страница су природни бројеви, а највећа страница је $2\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину троугла ABC, ако је $h_c = h_a + h_b$.

48. У троуглу ABC угао ACB је $60°$. Ако су AK и BM висине и C_1 средиште странице AB, тада је троугао KMC_1 једнакостраничан. Доказати.

49. Једно теме коцке удаљено је од дијагонале коцке $7\,\mathrm{cm}$. Израчунати површину и запремину коцке.

50. Коцку сира ивице $14\,\mathrm{m}$ напало је 1998 мишева. Доказати да се непосредно после напада може исећи коцка сира ивице $1\,\mathrm{m}$ (кубни метар) унутар које се не налази ниједан миш.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

IV разред

51. Ако у неком броју изоставимо 0 која се налази на месту јединица, онда је новодобијени број за 1998 мањи од првобитног. Који је то број?

52. Лека има три пута више новца од Жарка. Ако обојица потроше по 10 динара тада ће Лека имати четири пута више новаца од Жарка. Колико новца је имао свако од њих на почетку?

53. Дешифровати сабирање $* * * * + * ** = 1998$ ако сваки од непознатих сабирака има једнаку вредност било да га читамо с лева у десно, било да га читамо с десна у лево.

54. Ако се једна страница квадрата повећа за $3\,\mathrm{cm}$, а друга за $6\,\mathrm{cm}$, онда новодобијени правоугаоник има површину која је за $1998\,\mathrm{cm}^2$ већа од површине квадрата. Израчунати обим датог квадрата и обим добијеног правоугаоника.

55. Два оца и два сина играли су шах по систему да свако са сваким игра по једну партију. Колико је том приликом одиграно најмање партија, а колико највише партија?

V разред

56. Неки посао Душко би завршио за 12 дана, Ташко за 15 дана, а Рашко за 20 дана. Радили су заједно 4 дана, а потом је остатак посла завршио Ташко. Колико дана је укупно радио Ташко?

57. Одредити два разломка са двоцифреним имениоцима, тако да је њихов збир 145/1998.

58. Дат је квадрат $ABCD$ странице $5\,\mathrm{cm}$. Конструисати тачку M која је једнако удаљена од темена A и B и која је од темена C удаљена $3\,\mathrm{cm}$. Колико има решења?

59. Одредити природни број ЈОВАН (једнаким словима одговарају једнаке цифре, различитим словима одговарају различите цифре) којем је збир цифара једнак 10, такав да збир петоцифрених бројева ЈОВАН и НАВОЈ представља петоцифрени број чије су све цифре једнаке. Колико решења има?

60. Дато је 8 на изглед једнаких златника од којих је 7 исправних једнаке масе, а осми, неисправан, је нешто лакши од осталих 7. Са два мерења на теразијама без тегова, одредити који је златник неисправан.

VI разред

61. У три цистерне је било 780 литара млека. Када из прве одлијемо једну четвртину, из друге једну петину, а из треће три седмине млека, у цистернама остану једнаке количине млека. Колико млека има у свакој од цистерни?

62. Дато је пет различитих целих бројева a, b, c, d и e таквих да је $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e)=12$. Одредити $a+b+c+d+e$.

63. Нека је тачка M средиште странице CD паралелограма $ABCD$. Права AM сече дијагоналу BD у тачки N. Ако права CN сече страницу AD у тачки P, онда је $AP=PD$. Доказати.

64. Дате су три различите, произвољне тачке A, B и C. Конструисати тачку M тако да добијени скуп тачака $\{A,B,C,M\}$ има особину да садржи два пара централно симетричних тачака. Испитати све могуће случајеве.

65. Дат је израз $12\frac{1}{2}\cdot 2+0.2\cdot 25:5-5\cdot 1\frac{8}{15}:\frac{2}{3}-1{,}1$. Не мењајући поредак бројева у датом изразу, поставити неколико заграда тако да вредност добијеног израза буде 0.

VII разред

66. Ако је n природан број, онда је $n^3+1997n+1998$ дељиво са 6. Доказати.

67. Дужина странице ромба је 9 cm, а дужина збира његових дијагонала је 24 cm. Одредити површину ромба.

68. Када се број страница конвексног многоугла удвостручи, онда се број његових дијагонала повећа за 1998. За колико се степени при том повећа збир његових унутрашњих углова?

69. Нека су тачке M и N редом средишта страница AB и BC троугла ABC и нека је права s симетрала $\angle BAC$. Ако се праве s и MN секу у тачки P, онда је $\angle APB$ прав. Доказати.

70. Колико се различитих четвороцифрених бројева може написати цифрама 1, 8 и 9 тако да се свака цифра употреби бар једном?

VIII разред

71. У xOy координатној равни дата је права $4x+7y=1998$. Колико тачака на датој правој имају обе координате целобројне и припадају првом квадранту координатне равни?

72. У троугаоној форми, ред за редом, поређани су златници и сребрњаци: у првом реду 1 златник; у другом реду 2 сребрњака; у трећем реду 3 златника; у четвртом реду 4 сребрњака, ... Колико има укупно сребрњака, ако је пребројано укупно 625 златника? Колико има могућих решења?

73. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ тако да је $AB+AD=10\,\text{cm}$, $BC=CD$ и $\angle BCD=\angle BAD=90^\circ$. Израчунати површину датог четвороугла.

74. У једнакокраком трапезу $ABCD$ ($AB \parallel CD$) основица $AB=12\,a$ и основица $CD=4\,a$. Тачке E и F су редом средишта основица CD и AB. Ако се праве AE и DF секу у тачки M, праве BE и CF секу у тачки N, израчунати дужину дужи MN у функцији од a.

75. Бочне стране ABS, BCS и CAS тростране пирамиде $ABCS$ су међусобно нормалне и имају редом површине $54\,\text{cm}^2$, $96\,\text{cm}^2$ и $72\,\text{cm}^2$. Израчунати запремину пирамиде и мерне бројеве сваке од ивица пирамиде.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

VI разред

76. Гоца и Нина имају једнак број јабука. Гоца своје јабуке продаје по цени 3 јабуке за 1 динар, а Нина 2 јабуке за 1 динар. Ако саставе јабуке и продају их по цени 5 јабука за 2 динара, онда ће зарадити 4 динара мање него да јабуке продају појединачно. Колико јабука су имале Гоца и Нина, ако и при појединачној и при заједничкој продаји не остане ниједна јабука?

77. Пеђа кружну стазу претрчи за 24 минута. Ако Дејан и Пеђа трче различитим смеровима, онда се на стази сусретну после 9 минута. Ако Дејан и Пеђа трче истим смером, после колико времена ће се први пут срести и када ће се први пут истовремено наћи у почетној тачки?

78. Дат је правоугли троугао ABC, са правим углом код темена B. Кроз тачку A конструисана је права p паралелна са BC и на правој p изабрана тачка K, тако да су K и C са разних страна праве AB. Ако права CK сече страницу AB у тачки M и ако је $MK=2\cdot AC$, онда је $\angle ACB=3\angle KCB$. Доказати.

79. Дат је трапез $ABCD$. Симетрале спољашњих углова трапеза код темена A и D секу се у тачки M, а симетрале спољашњих углова код темена B и C секу се у тачки N. Ако је $MN=999\,\text{cm}$, колики је обим трапеза $ABCD$?

80. Трговац Миле је купио извесну количину пасуља по цени од 5 динара и 163 килограма пасуља по цени од 10 динара. Затим је обе количине пасуља помешао и добијену мешавину продавао за 8 динара по килограму. Када је распродао пасуљ, платио је 23% пореза на укупан промет пасуља. Потом је утврдио да сада има 1998 динара више него пре почетка посла. Колико килограма пасуља је продао трговац Миле?

VII разред

81. Доказати да збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити квадрат ниједног природног броја.

82. Збир четвороцифрених бројева $\overline{1abc}$ и $\overline{cba1}$ је број $\overline{bbdd}$. Дешифруј дато сабирање, ако једнаким словима одговарају једнаке цифре, а различитим словима различите цифре.

83. Најмања дијагонала правилног дванаестоугла је $\sqrt{2+\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$. Одредити обим и површину датог правилног дванаестоугла.

84. Кроз центар O_1 кружнице k_1 пролази кружница k_2. Дате кружнице се секу у тачкама A и B. Кроз тачку B конструисана је тангента t кружнице k_2 која кружницу k_1 пресеца у тачки C. Доказати да је $AB = BC$.

85. Дат је правоугли трапез $ABCD$, са правим углом код темена B, чије су основице $AB = 8\,\mathrm{cm}$ и $CD = 4\,\mathrm{cm}$, а крак $BC = 4\,\mathrm{cm}$. У датом трапезу на случајан начин је изабрано 17 тачака. Доказати да међу изабраним тачкама постоје бар две тачке чије међусобно растојање није веће од $\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$.

VIII разред

86. Наћи решење система једначина

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y - 3,$$
$$y^2 + z^2 = 4y + 4z + 5,$$
$$z^2 + x^2 = 4z + 4x + 2,$$

у скупу реалних бројева.

87. Дато је пет било којих природних бројева. Доказати да се међу њима увек могу изабрати два природна броја m и n тако да је $m^4 - n^4$ дељиво са 15.

88. Збир основне ивице a и висине H правилне шестостране призме је $10\,\mathrm{cm}$. Одредити a и H, тако да је дужа дијагонала призме најмања могућа. Израчунати површину и запремину те призме.

89. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки O, а подножје нормале из тачке B на дијагоналу AC је тачка M, при чему је $BM = 2k \cdot BO$, где је k реалан број. Ако је површина тог четвороугла P, онда је $P = k \cdot AC \cdot BD$. Доказати.

90. У квадрату $ABCD$ дијагонале AC и BD секу се у тачки O. На страницама BC и CD дате су редом тачке M и N тако да је $BM = CN$. Ако се праве AM и BN секу у тачки P, онда је права OP симетрала угла APN. Доказати.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 1998.

VI разред

91. Две јабуке теже колико 3 крушке, а 3 јабуке теже као 4 поморанџе. Сем тога 6 крушака кошта колико 5 поморанџи. Шта је скупље: килограм крушака или килограм поморанџи?

92. О четвороцифреним бројевима a, b, c знају се следећи подаци:

- две средње цифре броја a једнаке су као две одговарајуће средње цифре броја c;
- две средње цифре броја b међусобно су једнаке и једнаке су првој цифри броја c;
- прва цифра броја a једнака је последњој цифри броја c;
- обрнуто, прва цифра броја c једнака је последњој цифри броја a;
- прве цифре бројева a и b су међусобно једнаке;
- број c једнак је збиру бројева a и b;

(а) Одредити број b.

(б) Колико постоји различитих могућности за број a?

93. У неједнакокраком оштроуглом троуглу ABC из темена A конструисана је тежишна дуж, из темена B конструисана је симетрала угла β, а из темена C висина. Пресечне тачке датих правих су тачке P, Q и R. Доказати да добијени троугао PQR није једнакостраничан.

94. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$. Нека је тачка M средиште странице AB, а тачка N средиште странице CD.

(а) Доказати да је $AD + BC \geqslant 2 \cdot MN$.

(б) Какав је четвороугао $ABCD$, ако важи једнакост?

95. Једнакостранични троугао странице $8\,\mathrm{cm}$, издељен је на једнакостраничне троуглове странице $1\,\mathrm{cm}$ повлачењем правих паралелних са страницама датог троугла. Колико укупно једнакостраничних троуглова постоји на тако добијеној слици?

VII разред

96. Одреди цифре x, y и z тако да у декадном систему важи једнакост

$$\frac{1}{x+y+z} = 0{,}xyz.$$

97. Нека су a и b цели бројеви такви да је израз $a^2 + 9ab + b^2$ дељив са 11. Доказати да је тада израз $a^2 - b^2$ дељив са 11.

98. У једнакокраком троуглу ABC је угао при врху $\measuredangle CAB = 30^\circ$, а висина из темена A је $2\,\mathrm{cm}$. Одредити целе бројеве m, n и p, тако да је крак троугла $b = m\sqrt{2}(n\sqrt{3} + p)$.

99. Нека је m дужина средње линије, а h дужина висине трапеза чије су дијагонале нормалне. Доказати да је $m \geqslant h$.

100. Може ли на математичкој олимпијади присуствовати 1999 учесника (рачунајући и госте), ако сваки од њих има тачно 3 пријатеља међу учесницима?

VIII разред

101. Одредити најмањи природан број n, који има број делилаца једнак броју делилаца броја 1998, при чему се делиоцима природног броја сматрају и 1 и сам тај број.

102. Нека су n и k природни бројеви. Дати су искази:

1) $n+1$ је дељиво са k;
2) $n = 2k+5$;
3) $n+k$ је дељиво са 3;
4) $n+7k$ је прост број.

Одредити све вредности за n и k, ако се зна да су три од четири дата исказа тачна, а један нетачан.

103. Права правилна четворострана пирамида $SABCD$ чија је висина 8 cm и бочна ивица 10 cm, пресечена је са равни која садржи теме A и нормална је на бочну ивицу SC. Ова раван сече бочне ивице SB, SC и SD редом у тачкама K, L и M.

а) Доказати да је права KM паралелна са BD.

б) Израчунати површину четвороугла $AKLM$.

104. У произвољном конвексном петоуглу $ABCDE$ дужина странице AE је 4 cm. Нека су P, Q, S и T редом средишта дужи AB, CD, BC и DE, а M и N редом средишта дужи PQ и ST. Израчунати дужину дужи MN.

105. Квадрат је подељен на пет дисјунктних правоугаоника једнаких површина тако да темена квадрата припадају различитим правоугаоницима, а пети правоугаоник нема заједничких тачака са страницама квадрата. Доказати да је тај пети правоугаоник квадрат.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 2. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

106. Разбојник је пронашао пећину са златом, дијамантима и сандуком са којим може изнети благо. Пун сандук злата тежи 200 kg, пун сандук дијаманата 40 kg. Килограм злата се може продати за 20 дуката, а килограма дијаманата за 60. Разбојник може одједном да подигне и изнесе терет не већи од 100 kg. Колико највише дуката може добити за благо које би изнео одједном?

107. На страницама BC и CD правоугаоника $ABCD$ дате су редом тачке E и F тако да је троугао AEF једнакостраничан. Ако је тачка M средиште дужи AE, онда је и троугао CDM једнакостраничан. Доказати.

108. Одреди најмањи природан број n за који је вредност израза

$$\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}}$$

природан број.

ДРУГА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Атина, 1998.

109. Доказати да је број

$$\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5$$

потпун квадрат.

110. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$, такав да је $AB = AE = CD = 1$, $\angle ABC = \angle DEA = 90°$ и $BC + DE = 1$. Наћи површину петоугла $ABCDE$.

111. Наћи све парове позитивних целих бројева (x, y) који задовољавају једначину $x^y = y^{x-y}$.

112. Да ли је могуће, користећи само три цифре, написати 16 троцифрених бројева, тако да међу њима не постоје два броја који имају исти остатак при дељењу са 16?

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1999.

IV разред

113. Разлици бројева 23 456 и 19 876 додај разлику највећег петоцифреног и најмањег троцифреног броја.

114. Син и ћерка имају заједно 29 година. Отац је старији од сина 25 година, а мајка од ћерке 22 године. Колики је збир година оца и мајке?

115. Ако 20. фебруара 1999. године у 17 часова у Ваљеву пада киша, може ли се очекивати да ће кроз 1999 сати бити сунчано време?

116. Колику дебљину би имала књига од 1 999 000 страница, ако 100 листова (200 страница) те књиге има дебљину 2 mm?

117. Шта је веће: 43 km^2 и 5 ha или 435 768 a?

V разред

118. Уместо $*$ напиши одговарајуће цифре, тако да наведене операције буду тачно извршене

$$\begin{array}{r} *23\cdot ** = \quad 16*2 \\ +\underline{***5} \\ ***** \end{array}$$

119. Пресек скупова A и B има 6 елемената, а њихова унија 18 елемената. Колико елемената има скуп $B \setminus A$, ако скуп $A \setminus B$ има 4 елемената?

120. Мера угла $\alpha+\beta$ је за $38°41'24''$ већа од мере угла $\alpha-\beta$. Одредити меру угла β.

121. Одредити најмањи и највећи шестоцифрен број с различитим цифрама који је дељив са 9.

122. Ако ивицу коцке повећамо за 1 cm онда се њена површина повећа за 66 cm^2. За колико се повећала запремина коцке?

VI разред

123. Који знак има производ xyz ако је $xy > 0$, $xz < 0$ и $z < 0$? Одговор образложити.

124. Тежина тела на Месецу износи $\frac{4}{25}$ тежине тела на Земљи. Ако је човекова тежина на Земљи 802,5 N, колика би била на Месецу?

125. Дате су једначине: $1 - 999\cdot(x-1) = 1999$ и $19 - 99\cdot(y-1) = 1999$. Одредити збир решења датих једначина.

126. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) крак AC је продужен преко темена C до тачке D, тако да је $CD = CA$. Доказати да је троугао ABD правоугли.

127. У троуглу ABC, страница AC је већа од странице BC, а симетрала угла γ сече страницу AB у тачки D. Који од углова $\measuredangle ADC$ и $\measuredangle BDC$ је већи?

VII разред

128. Шта је веће: $5 + 2\sqrt{7}$ или $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$?

129. Доказати да је вредност израза $16^5 + 2^{15}$ дељива са 33.

130. Производ три узастопна парна природна броја је 13 728. Одредити те бројеве.

131. У полукруг полупречника r уписати квадрат. Израчунати површину квадрата у зависности од r.

132. Дат је троугао ABC чија је површина 1999 cm^2. Странице AB, BC и CA продужене су преко темена B, C и A за своју дужину тако да је $AB = BA_1$, $BC = CB_1$ и $CA = AC_1$. Израчунати површину добијеног троугла $A_1B_1C_1$.

VIII разред

133. На једној страни диедра чији је угао $60°$, дата је тачка M. Њено одстојање од друге стране диедра је $8\sqrt{3}$ cm. Колико је њено одстојање од ивице диедра?

134. Аутомобилиста једног дана пређе $\frac{4}{9}$ свог укупног пута, другог дана $\frac{9}{20}$ од преосталог дела пута, а трећег дана 330 km. Колики је био укупан пут овог аутомобилисте?

135. Решити једначину $|2x - 0{,}5| = 0{,}2$.

136. Ако се основна ивица правилне четворостране призме висине 10 cm повећа за 3 cm, онда се запремина призме повећа за 210 cm^3. Израчунати површину и запремину призме.

137. Дат је једнакокраки троугао чија је основица 10 cm, а крак 13 cm. Израчунати површину њему сличног троугла чија је дужа висина 24 cm.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 1999.

IV разред

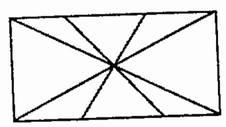
138. Помоћу цифара 0, 2, 3, 5, 6, 7 и 8 написати најмањи и највећи шестоцифрени број користећи сваку цифру:

а) само једанпут; б) највише три пута.

139. У првом сандуку има 1999 јабука више него у другом. У ком сандуку ће бити више јабука, и за колико, ако из првог сандука пренесемо у други 1000 јабука?

140. Колико је керамичких плочица облика квадрата, странице 15 cm, потребно за покривање пода правоугаоне просторије чије су димензије 12 m и 27 m?

141. Бројеве 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37 и 38 распореди у поља квадрата 3×3 тако да у сваком од 9 поља буде по један број, при чему се бројеви не смеју понављати и при чему је збир бројева у свакој хоризонтали, вертикали или дијагонали различит.



Сл. уз задатак 142

142. Колико дужи и колико троуглова је нацртано на датој слици?

V разред

143. Дати су скупови: $A = \{1, 2, x, 5, 9\}$ и $B = \{2, y, 3\}$. Одредити све бројеве x и y, такве да скуп B има три различита елемента, при чему је $B \subset A$.

144. Колико има природних бројева мањих од 1000 који нису дељиви ни са 4 ни са 6?

145. Наћи скуп природних бројева који су решења неједначине $1 \leqslant \frac{x-2}{2} \leqslant 2$.

146. Два радника копају канал. Први за 6 сати ископа $\frac{12}{25}$ целе дужине канала, а други за 3 сата ископа $\frac{6}{23}$ целе дужине канала. Који радник има бољи учинак за један сат рада?

147. Разлика углова α и β је суплементна са њиховим збиром. Одредити углове α и β, ако је угао β једнак осмини угла α.

VI разред

148. Возећи између града A и града B бициклиста је првог дана прешао $\frac{1}{4}$, а другог дана 30% целог пута. До циља је преостало још 180 km. Колико је растојање између та два града?

149. Дат је број $p = -0{,}5$. Израчунати вредност израза $x^2 + y^2$, ако је $x = -\left|-1 + |-p|\right|$ и $y = -\left|-1 - |p|\right|$.

150. Дат је једнакокраки троугао ABC $(AC = BC)$ чији је $\measuredangle ACB = 44°$. Симетрала крака AC сече крак BC у тачки D, а праву AB у тачки E. Упоредити дужи: DA, DB, DC и DE.

151. На страници CD квадрата $ABCD$ дате су тачке E и F тако да $CE = EF = FD$. Дужи AE и BF секу се у тачки M. Доказати тврђења:

а) $\triangle AED \cong \triangle BFC$; б) троугао EFM је једнакокраки.

152. На општинском такмичењу младих математичара учествује 123 ученика од IV до VIII разреда. Доказати да је број такмичара бар из једног разреда већи од 24.

VII разред

153. После два снижења за исти број процената, цена робе се снизила са 25 хиљада на 16 хиљада динара. Колико процената је износило то снижење ?

154. Шта је веће: $\sqrt{6 + \sqrt{6}}$ или 3,00001?

155. Дат је конвексни четвороугао $ABCD$ ($ABCD$ није паралелограм). Нека су M, N, P и Q редом средишта страница AB, BC, CD и DA. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

156. Дат је троугао ABC тако да је $AB = 15\,\text{cm}$, $\measuredangle BAC = 60°$ и $AC = 8\,\text{cm}$. Израчунати висине датог троугла.

157. Доказати једнакост: $\left|\frac{a^2+b^2}{2} - ab\right| + \left|\frac{a^2+b^2}{2} + ab\right| = a^2 + b^2$.

VIII разред

158. У једној цистерни има 540 l воде, а у другој 360 l. Из прве се за један сат одлије 3 пута више воде него из друге. Кроз 6 сати у првој цистерни ће остати 60 l воде мање него у другој. Колико литара воде се одлива сваког сата из прве, а колико из друге цистерне?

159. Решити неједначину $(x-3)^2 < x(x-3)$ и решења приказати на бројевној правој .

160. Дужине страница основе квадра су 6 cm и 8 cm, а дијагонала квадра заклапа са основом квадра угао од 45°. Одредити површину и запремину квадра.

161. Дат је круг $k(O, r = 3\,\text{cm})$ и тачка M изван круга тако да је $OM = 7\,\text{cm}$. Права p која садржи тачку M сече круг у тачкама C и D $(MD > MC)$. Ако је $MC = 5\,\text{cm}$, израчунати дужину тетиве CD.

162. Дат је скуп тачака A, B, C, D, E које припадају правој p и ван праве p (у истој равни) тачке F, G, H. Колико је:

а) највише; б) најмање

троуглова одређено овим тачкама?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 1999.

IV разред

163. Двојица моторциклиста кренули су истовремено из места A у место B, један другом у сусрет. Први се кретао брзином од 1 km у минуту, а други брзином од 800 m у минуту. Када су се срели, први моторциклиста је прешао 66 km више од другог. Колико је растојање између места A и места B?

164. Површина једног винограда је 199900 m^2. Дужина баште је 4 пута мања од дужине винограда, а ширина баште је 5 пута мања од ширине винограда. Колика је површина баште?

165. У изразу $2 * 4 * 6 * 8 * 10 = 9 * 9$ заменити $*$ знацима рачунских операција и заграда, тако да добијена једнакост буде тачна. Урадити то на три начина.

166. Дата је једнакост $AAA \cdot B + C = 1999$. Дешифровати дату једнакост, тако што уместо слова A, B и C треба написати одговарајуће цифре, при чему једнаким словима одговарају једнаке цифре и различитим словима различите цифре. Колико различитих решења има?

167. Миша је у забавном парку купио 5 жетона и започео игру против компјутера. У свакој партији у којој Миша победи компјутер, као награду, добија нових 5 наградних жетона. По завршетку игре Миша се хвалио да је одиграо 50 партија и 8 пута победио компјутер. Његов друг Горан је тврдио да је то немогуће. Ко је био у праву Миша или Горан?

V разред

168. Јоца је замислио један број. Затим га је повећао 4,5 пута, а потом га умањио за 12,3 и добио 5,7. Који број је замислио Јоца?

169. Један канап пресечен је на два дела, тако да је један део једнак половини канапа увећаној за 0,5 m. Ако се други део канапа подели тако да његов већи део буде једнак половини канапа увећаној за 0,5 m, онда је преостали део канапа 1,5 m. Колика је укупна дужина канапа?

170. Одредити најмањи седмоцифрен природан број који је дељив са 36 и чије су све цифре различите.

171. Дата је права p и две тачке A, B са исте стране праве p (права AB није ни паралелна са правом p, ни нормална на праву p). Конструисати концентричне кружнице k_1 и k_2 тако да кружница k_1 додирује праве p и AB, а кружница k_2 садржи тачке A и B.

172. Распоредити 14 тачака на 7 правих тако да на свакој правој буду по 4 тачке.

VI разред

173. Нека су α, β и γ углови троугла ABC. Израчунати углове α, β и γ, ако је $\alpha = 0{,}4\beta$ и $\gamma = 4\alpha$.

174. Два друга Јанко и Марко добили су једнаке суме новца. Марко је купио бомбоне чија је цена 40 динара за килограм, а Јанко друге бомбоне чија је цена 60 динара за килограм. Затим су те бомбоне помешали. Колика је цена једног килограма мешавине купљених бомбона?

175. Конструисати троугао ABC, ако су дати следећи елементи: страница $AB = 4\,\mathrm{cm}$, тежишна дуж $BB_1 = 5\,\mathrm{cm}$ и угао $\angle ABC = \beta = 60°$.

176. Из темена B и D паралелограма $ABCD$ конструисане су нормале BE и DF на дијагоналу AC. Доказати да је $BEDF$ паралелограм.

177. Збир 1999 различитих простих природних бројева је паран број.
а) Да ли је производ тих 1999 простих бројева паран или непаран број?
б) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир паран број.
в) Доказати да међу њима постоји 1998 бројева чији је збир непаран.

VII разред

178. Ако су краци неједнакокраког трапеза међусобно нормални, онда је збир квадрата његових основица једнак збиру квадрата његових дијагонала. Доказати.

179. Израчунати површину правилног дванаестоугла, ако је полупречник круга описаног око дванаестоугла једнак 6 cm.

180. Одредити вредност полинома $P(x,y) = x^{1998} + 1999y$ ако је $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$.

181. Дијагонале AC и BD паралелограма $ABCD$ са оштрим углом код темена A, секу се у тачки O. Тачка M је на правој AB, при чему је $\angle AMO = \angle MAD$. Доказати да је тачка M једнако удаљена од тачака C и D.

182. Доказати да међу 26 различитих непарних бројева мањих од 100 постоје бар два чији збир је једнак 100.

VIII разред

183. У координатној xOy равни дате су тачке $O(0,0)$, $M(3,4)$ и $N(x,0)$. Одредити једначине правих OM и MN, ако је површина троугла OMN једнака 14.

184. Израчунати површину и запремину правилне четворостране пирамиде чија је висина 17 cm, а површина дијагоналног пресека 204 cm^2.

185. Доказати да број чији декадни запис садржи једино цифре 2 и 6 није разлика квадрата два природна броја.

186. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$ површине P. Доказати да је $AB \cdot BC + CD \cdot DA \geqslant 2P$.

187. Дата је шаховска табла 8×8 и 3 топа различите боје. На колико се начина могу разместити 3 топа тако да се они међусобно не „нападају“. (Топови се „нападају“ ако се налазе у истој хоризонтали или вертикали.)

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 3. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

188. Дате су једначине $x^2 - y^2 = 4^n$ и $x^2 - y^2 = 5^{1999}$, при чему су непознате x и y природни бројеви. Одредити природан број n, тако да дате једначине имају једнак број решења.

189. На табли је написан деветоцифрен број чије су све цифре различите и различите од нуле. Доказати да је за ма који распоред цифара могуће избрисати неке од датих цифара, тако да преостали број буде потпун квадрат који је најмање двоцифрен број.

190. Дат је скуп бројева $S = \{1, 3, 5, 7, -8, -12, 13, -14, -16, 21\}$. Иван и Јелена играју следећу игру: наизменично узимају по један број из скупа S. Победник је играч који на крају има већу апсолутну вредност збира изабраних бројева. Ако Јелена игра прва, може ли изабрати такву стратегију да обавезно побеђује?

191. Дат је трапез $ABCD$ $(AB > CD)$. Продужеци кракова AD и BC секу се у тачки E, а средишта дужи AB и CD су редом тачке M и N. Одредити угао AEB, ако је $MN = \frac{1}{2}(AB - CD)$.

192. У равни α је дато n кругова једнаких полупречника, при чему је центар сваког круга изван преосталих $n-1$ кругова. Ако је M унутрашња тачка свих кругова, доказати да је $n \leqslant 5$.

ТРЕЋА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Софија, 1999.

193. Нека су a, b, c, x, y реални бројеви, такви да је $a^3+ax+y=0$, $b^3+bx+y=0$ и $c^3+cx+y=0$. Ако је $a \neq b \neq c \neq a$, доказати да је $a+b+c=0$.

194. За сваки број $n = 0, 1, \ldots, 1999$ број A_n је дефинисан са $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Наћи највећи заједнички делилац бројева $A_0, A_1, \ldots, A_{1999}$.

195. Дат је квадрат S дужине странице 20. Нека је M скуп чији су елементи четири темена квадрата S и 1999 произвољних унутрашњих тачака квадрата S. Доказати да постоји троугао са теменима из скупа M чија површина је мања или једнака $\frac{1}{10}$.

196. Дат је једнакокраки троугао ABC, $AB = AC$. Нека је D произвољна тачка дужи BC таква да је $BC > BD > DC > 0$. Нека су редом k_1 и k_2 описани кругови троуглова ABD и ADC. Нека су редом BB' и CC' дијаметри кругова k_1 и k_2, и M средиште дужи $B'C'$. Доказати да је површина троугла MBC константна, односно не зависи од положаја тачке D.

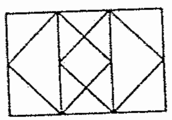
ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

IV разред

197. При сабирању неколико бројева ученик је направио следеће грешке: у једном сабирку цифру јединица 2, заменио је са 9, цифру десетица 4 са 7 и цифру стотина 8 са 3. За колико је промењен тачан збир?

198. За три месеца Нада је потрошила 1350 динара. Првог и другог месеца је потрошила 856 динара, а другог и трећег 800 динара. Колико динара је потрошила Нада првог и трећег месеца заједно?

199. Одредити решење једначине $10^5 - x = 2000$.



Сл. уз задатак 201

200. Збир обима три једнака правоугаоника износи 360 cm. Израчунати дужину и ширину једног од ових правоугаоника ако је дужина за 1 dm већа од ширине.

201. Колико троуглова има на датој слици?

V разред

202. Скупови A и B дати су следећим једнакостима: $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,2\}$ и $B \setminus A = \{4,5\}$. Одредити скупове: $A \setminus (A \cap B)$ и $(A \cup B) \setminus B$.

203. Дате су кружнице $k_1(M, 3\,\mathrm{cm})$ и $k_2(N, 2\,\mathrm{cm})$ које се додирују:
(а) споља; (б) изнутра.
Конструисати дате кружнице и израчунати растојање MN.

204. Доказати да је збир свих природних бројева од 1 до 1000 дељив са 7.

205. Углови α и β су суплементни, а пет шестина угла α и трећина угла β су комплементни углови. Одредити углове α и β.

206. Дешифровати сабирање: $AB + ABC + ABCD = 2000$, ако једнаким словима одговарају једнаке, а различитим словима различите цифре.

VI разред

207. Троуглови ABC и $A'B'C'$ су подударни. На страницама AB и $A'B'$ редом су изабране тачке M и M' такве да је $\angle BCM = \angle B'C'M'$. Доказати да је $AM = A'M'$.

208. Одредити цифре a и b тако да број $\overline{a2000b}$ буде дељив са 36.

209. На правој AB, одређеној хипотенузом правоуглог троугла ABC дате су тачке D и E. Ако тачке D и E не припадају страници AB и ако је $AD = AC$, а $BE = BC$, израчунати $\angle DCE$.

210. Одредити све природне бројеве који не задовољавају неједначину $|x+2|(5x-15) > 0$.

211. У правоуглом троуглу један од углова једнак је 40°. Доказати да симетрала правог угла полови угао који образују висина и тежишна дуж из темена правог угла.

VII разред

212. Шта је веће: $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ или $3\sqrt{5} + 7$?

213. Конструисати квадрат чија је површина $20\,\mathrm{cm}^2$.

214. У једној школи је 35% девојчица, а дечака је за 252 више него девојчица. Колико у школи има дечака, а колико девојчица?

215. Израчунати обим троугла чија је једна страница дужине 24 cm, а одговарајућа висина и тежишна дуж 8 cm, односно 10 cm.

216. Славина A пуни базен за 12 часова, а славина B за 15 часова. Одводна цев C празни базен за 10 часова. За које време ће се напунити базен ако су истовремено отворене славине A и B и одводна цев C?

VIII разред

217. Колико је равни одређено са 2000 правих које се секу у једној тачки и од којих по три не припадају истој равни?

218. Лека и Жарко су поделили 1416 динара. Када је Лека потрошио $\frac{4}{7}$ свога дела, а Жарко $\frac{3}{8}$ свога, имали су једнаке износе. Колико новца је свако од њих добио приликом поделе?

219. Ако се свака ивица коцке повећа за 30%, за колико процената се повећа површина, а за колико запремина коцке?

220. У троуглу ABC је $\angle BAC = 36^\circ$. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла BAC секу праву BC редом у тачкама M и N, тако да је $AM = AN$. Ирачунати остале углове троугла ABC.

221. Одредити све природне бројеве n такве да је $n^2 + 2n + 2000$ потпун квадрат.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

IV разред

222. Из два пристаништа кренула су истовремено, један другом у сусрет, два брода. Први брод се кретао брзином од 22 km/h, а други брод брзином 28 km/h.

Колико је растојање између пристаништа, ако су се бродови срели после 40 часова путовања?

223. Пера, Васа и Огњен имају заједно 160 кликера. Ако Пера да Огњену 17 кликера, а Васа поклони Огњену 12 кликера, онда ће Пера и Васа имати једнак број кликера, а Огњен колико и Пера и Васа заједно. Колико кликера је имао сваки дечак?

224. Ако се једна страница квадрата повећа два пута, а друга за 22 mm, добије се правоугаоник чији је обим за 2000 mm већи од обима датог квадрата. Колика је страница датог квадрата?

225. Дат је двоцифрени број. Ако му се са десне стране допише исти тај број добија се четвороцифрен број. Колико пута је добијени број већи од датог броја?

226. Конструисати магични квадрат чији су елементи бројеви: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25 и 27.

V разред

227. Дати су скупови: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$. Одредити скуп X ако је $X \subset (A \cup B)$, $X \cap A = A \setminus B$ и $X \cap B = B \setminus A$.

228. Весна са 77 корака једнаке дужине пређе 67 m, а Иван са 88 корака једнаке дужине пређе 78 m. Чији корак је дужи и за колико?

229. Дат је збир бројева $\overline{7a85} + \overline{34a5} + \overline{1a21a}$. Коју цифру треба написати уместо слова a тако да добијени збир буде дељив са 9?

230. Углови a и b су суплементни, а углови b и c комплементни. Израчунати углове a, b и c, ако је збир углова a и c једнак $142°$.

231. За учвршћивање једне коњске потковице, поткивач употреби 5 минута. Колико најмање времена треба да 48 поткивача поткују 60 коња, ако приликом поткивања коњ мора стајати на три ноге?

VI разред

232. Одредити све целе бројеве x за које је $6 < -(-x) < 10$ и $|x| < 8$.

233. Три друга Жарко, Лека и Пеђа деле извесну суму новца. Жарко је добио трећину, Лека четвртину остатка, а Пеђа 100 динара више од Жарка. Колико новца је било и колико је свако од њих добио?

234. На страницама AB, BC, CD и DA квадрата $ABCD$, дате су редом тачке M, N, P и Q, тако да је $AM = BN = CP = DQ$. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ такође квадрат.

235. Унутрашњи углови троугла ABC односе се као $9 : 16 : 20$. Одредити угао између симетрале угла и висине из темена највећег угла троугла.

236. Раша има шуму облика правоугаоника димензија 30 m и 70 m, у којој се налази 34 стабла. Може ли Раша у својој шуми наћи правоугаоно парче земље димензије 6 m са 10 m, на коме нема ниједног стабла?

VII разред

237. Поређати по величини бројеве: $a = 2^{45}$, $b = 3^{36}$, $c = 4^{27}$ и $d = 5^{18}$.

238. Одредити бројевну вредност израза

$$0.4 \cdot \sqrt{6\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2} - 12\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2}}.$$

239. Израчунати површину трапеза ако су основице трапеза $a = 30\,\text{cm}$ и $b = 16\,\text{cm}$, а краци $c = 15\,\text{cm}$ и $d = 13\,\text{cm}$.

240. Нека су P, Q, R, S средишта страница ромба $ABCD$ чија је страница $a = 5\,\text{cm}$, а једна дијагонала $d_1 = 8\,\text{cm}$. Доказати да је четвороугао $PQRS$ правоугаоник и израчунати његову површину.

241. Аца, Богдан и Цеца треба да поделе 2000 динара тако да се делови које добију Аца и Богдан односе као $2 : 3$, а делови које добију Богдан и Цеца као $9 : 5$. Одредити колико ће свако од њих добити новца.

VIII разред

242. На излет није пошло 174 ученика једне школе, а остали ученици су отпутовали у 18 једнаких аутобуса, при чему је у сваки аутобус ушло по 5 ученика више него што је у аутобусу било седишта. Да је у сваки аутобус ушло онолико ученика колико има седишта, била би потребна још три аутобуса, а у једном од њих би остало 6 празних места. Колико има ученика у тој школи?

243. Решити једначину $\big|\big|\big|\big||x| + x\big| + x\big| + x\big| + x\big| = 2000$.

244. Нека су α и β две паралелне равни међусобно удаљене 12 cm. У равни α дате су тачке A и C, а у равни β тачке B и D. Одредити угао који права одређена тачкама C и D заклапа са равни α, ако права одређена тачкама A и B заклапа са равни α угао од $30°$ и ако је $AB + CD = 48\,\text{cm}$.

245. Око круга са центром O описан је четвороугао $ABCD$. Доказати да су $\angle AOB$ и $\angle COD$ суплементни.

246. Кроз теме A паралелограма $ABCD$ конструисана је права p која дијагоналу BD сече у тачки E, праву DC у тачки K и страницу BC у тачки F. Доказати да је $AE^2 = EF \cdot EK$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

IV разред

247. Колико ће се тона сена добити са ливаде дужине 750 m и ширине 200 m, ако се са сваког ара просечно накоси 240 kg траве и ако се зна да маса сена чини четвртину масе траве?

248. Трећина збира три броја је 2 000. Ако је други број три пута већи од првог, а трећи за 5 мањи од првог, израчунај те бројеве.

249. Дешифровати одузимање $****-*** = 2\,000$, ако се и умањеник и умањилац читају једнако с лева у десно и с десна у лево.

250. После одређеног броја радних дана зидари су одлучили да убрзају изградњу, па су свака 3 дана посла скратили на 2 дана. Ако је цео посао завршен за 55, уместо за 70 дана, колико се дана радило пре убрзавања посла?

251. Петар, Ана, Марко, Бојан и Гордана су хтели да поделе бомбоне. Свако је редом узимао по једну бомбону док није остало мање него што је њих, а онолико колико је добио свако од њих. Колико је могло бити бомбона? Одредити сва решења.

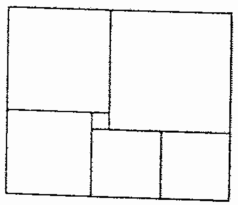
V разред

252. Аутомобилиста је за 4 сата прешао 360 km. Првог сата је прешао $\frac{4}{15}$ целог пута; другог сата $\frac{7}{8}$ пута који је прешао првог сата; трећег сата два пута мање него што је прешао у прва два сата заједно, а четвртог сата преостали део пута. Колико километара је аутомобилиста прешао четвртог сата?

253. Три пекара су, равномерним радом, за два сата умесили 67 хлебова. Колико хлебова би умесила 4 пекара за 3 сата? За колико сати би 5 пекара умесило 335 хлебова?

254. Одредити просте бројеве p и q, ако је $2 \cdot p + 3 \cdot q = 100$.

255. На једном конгресу било је 2 000 учесника, од којих је сваки био филозоф или математичар, а један број учесника се бавио и филозофијом и математиком. Колико је било учесника у свакој од три категорије, ако је међу филозофима сваки осми и математичар, а међу математичарима сваки тринаести и филозоф?



Сл. уз задатак 256

256. Правоугаоник на слици је састављен од шест квадрата. Израчунати обим и површину правоугаоника, ако је страница најмањег квадрата 1 cm.

VI разред

257. У три продавнице је било укупно 2 000 kg јабука. Када је из прве продавнице продата шестина јабука, из друге $\frac{3}{13}$ јабука, а из треће трећина јабука, у све три продавнице је остала иста количина јабука. Колико јабука је било у свакој продавници?

258. Ако се број 1 000 подели неким бројем остатак је 8, а ако се број 900 подели истим бројем остатак је 1. Колики количник је у првом, а колики у другом дељењу?

259. Конструисати троугао ABC, ако су дате тачке A_1, B_1 и C', при чему је A_1 средиште странице BC, B_1 средиште странице AC, а C' подножје висине из темена C.

260. Нека су тачке P, Q, R, S, редом средишта страница AB, BC, CD и DA паралелограма $ABCD$. Даље, нека је $AQ \cap PD = \{K\}$, $AQ \cap RB = \{L\}$, $SC \cap RB = \{M\}$ и $PD \cap SC = \{N\}$. Доказати да је четвороугао $KLMN$ паралелограм и да је $KL = \frac{2}{5}AQ$.

261. Четири дечака су поделили све кликере којима располажу. Први је добио половину кликера и још један кликер. Други је добио половину преосталих кликера и још један кликер. Трећи је добио половину преосталих кликера и још један кликер. Четврти је добио половину преосталих кликера и још један кликер. Колико кликера је добио сваки дечак?

VII разред

262. Да ли је вредност израза $1{,}494949\ldots + \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ рационалан или ирационалан број?

263. Нека су a, b, c и d реални бројеви. Ако је $(ab+cd)^2 = (a^2+c^2)(b^2+d^2)$, онда је $ad = bc$. Доказати.

264. Дат је произвољан троугао ABC. Нека је P пресечна тачка симетрале $\angle BAC$ и праве која полови дужи AC и BC. Доказати да је $\angle APC$ прав.

265. Дата су два паралелограма $ABCD$ и $DEFG$, таква да дуж AB садржи тачку E, а дуж FG садржи тачку C. Доказати да ова два паралелограма имају једнаке површине.

266. Дат је конвексан седмоугао $ABCDEFG$. Чега има више: троуглова или четвороуглова чија су темена – темена датог седмоугла?

VIII разред

267. Кифла кошта пола динара, погачица 2 динара, а ђеврек 5 динара. Да ли је могуће за тачно 100 динара купити тачно 100 пецива?

268. Одредити за које вредности реалног броја m једначина $\frac{mx}{2} - 3 = 2(x-m)$ има негативно решење.

269. Нека је AB тетива датог круга $K(O, r = 4\,\text{cm})$ и нека је C подножје нормале из тачке A на тангенту круга у тачки B. Израчунати $AB^2 : AC$.

270. Основна ивица правилне тростране пирамиде је дужине x, а бочна страна заклапа са равни основе угао од $60°$. Одредити x, ако је мерни број површине пирамиде једнак мерном броју њене запремине.

271. Дванаест ученика улази у биоскопску салу у којој су места нумерисана и у којој су слободна само прва два реда са по 6 слободних места. Пет ученика жели да седи у првом реду, док је осталима свеједно где ће седети. На колико начина је могуће испунити жеље свим ученицима?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

VI разред

272. Решити једначину: $\frac{2}{73} = \frac{1}{60} + \frac{1}{219} + \frac{1}{292} + \frac{1}{x}$.

273. Међу учесницима републичког такмичења сваки такмичар навија или за „Црвену звезду“ или за „Партизан“. Сви такмичари који навијају за „Црвену звезду“ највише воле математику. Међу онима који навијају за „Партизан“ 10% такође највише воли математику, а преостали су опредељени између физике и информатике. Колико процената учесника навија за „Црвену звезду“, ако 46% такмичара највише воли математику?

274. Један оштар угао датог правоуглог троугла је пет пута већи од другог. Доказати да је хипотенуза четири пута већа од своје висине.

275. У ромбу $ABCD$ оштар угао је $60°$. Дате су тачке: M на страници AB и N на страници BC, такве да је $MB + BN = AB$. Доказати да је троугао MND једнакостраничан.

276. На циљу трке првих шест места су заузели: Ана, Дана, Жана, Горан, Зоран и Милан. Судија трке је записао следеће податке о њиховом пласману: а) Прва два места заузеле су особе истог пола; б) Жана се пласирала између Милана и једне девојке; в) Између Милана и Зорана кроз циљ су прошле три особе; г) Горан и Ана су се пласирали непосредно испред девојке. Одредити редослед првих шест такмичара на циљу ове трке.

VII разред

277. Доказати да је број $\underbrace{111\ldots111}_{2000} - \underbrace{222\ldots222}_{1000}$ потпун квадрат неког природног броја.

278. Решити једначину: $\frac{x(x^2-1)(x^2-4)}{x+|x|} = 0$.

279. У конвексном четвороуглу $ABCD$, $\measuredangle ACB = 20°$, $\measuredangle ACD = 30°$ и $\measuredangle ADB = 40°$. Одредити $\measuredangle BAC$, ако је $AD = BD$.

280. Оштри углови неједнакокраког трапеза су комплементни. Израчунати обим и површину трапеза, ако је један крак 15 cm, мања основица 14 cm и висина 12 cm.

281. Породица Математиковић има само један фењер и треба да по ноћи, трошним мостом, пређе преко набујале реке. Отац мост пређе за 1 минут, мајка за 2 минута, дечак за 5 минута, а бака за 10 минута. Колико је најмање времена потребно да сви пређу преко моста ако се на мосту истовремено могу наћи највише две особе; ако оне морају са собом имати фењер; ако бржа особа иде брзином спорије и ако ношење преко моста није могуће?

VIII разред

282. Одредити сва реална решења једначине $\sqrt{4-(x+1)^2(x-2)^2} = x^2+2x+3$.

283. Да ли је тачна једнакост: $\left(\frac{8}{11}\right)^2 + \frac{3}{11} = \frac{8}{11} + \left(\frac{3}{11}\right)^2$? Одредити релације које важе између природних бројева a, b и c тако да је увек испуњена једнакост: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{c}\right)^2$.

284. Дијагонала AC квадрата $ABCD$ је висина која одговара основици једнакокраког троугла AEF. Ако је $AB = 3a$ и ако квадрат $ABCD$ и троугао AEF имају једнаке површине израчунати обим и површину четвороугла који је пресек квадрата $ABCD$ и троугла AEF.

285. Дата је коцка $ABCDA'B'C'D'$ ивице 3 cm и на ивицама AB, BC и CC' редом тачке M, N и P такве да је $AM : MB = 1 : 2$, $BN : NC = 2 : 1$ и $CP : PC' = 1 : 2$. Одредити обим и површину фигуре која се добија у пресеку коцке и равни одређене такама M, N и P.

286. Може ли се и како једнакостранични троугао странице 30 cm прекрити дисјунктним једнакокраким трапезима чије су странице 2 cm, 1 cm, 1 cm и 1 cm?

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2000.

VI разред

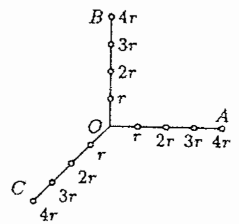
287. Одредити све уређене парове (x, y) целих бројева x и y, таквих да је $x^2 + \frac{6}{y} = 10$.

288. Одредити најмањи природан број m за који постоји природан број n тако да је $0 < \frac{m}{17} - \frac{n}{7} < 0{,}01$.

289. У равни су дате три произвољне тачке A, B и C. Конструисати у тој равни три међусобно паралелне праве p, q и r које садрже дате тачке A, B и C, редом, тако да је једна од тих правих једнако удаљена од остале две.

290. На страници AB паралелограма $ABCD$ дата је тачка K таква да је $\measuredangle AKD = \measuredangle DKC$. Права p која садржи средиште P странице BC, паралелна правој AB, сече дуж KD у тачки M, а нормала из K на AB сече праву CM у тачки N. Доказати да је права DN нормална на праву CK.

291. Из једне раскрснице полазе три улице $OA = OB = OC = 4r$ (слика), из којих су сви излази затворени. Инспектор се налази у тачки O (раскрсници) и јури преступника који се налази у једној од улица. Инспектор може да види преступника само ако њихово међусобно растојање није веће од r. Максимална брзина инспектора је два пута већа од максималне брзине преступника. У почетном моменту инспектор не види преступника. Доказати да инспектор може да ухвати преступника.



Сл. уз задатак 291

VII разред

292. Одредити све уређене парове (p, q) простих бројева p и q, таквих да је $p^2 - 2q^2 = 1$.

293. За реалне бројеве a и b важи неједнакост $\left(\dfrac{1+ab}{a+b}\right)^2 < 1$. Доказати да је апсолутна вредност једног од бројева a и b мања од 1, а другог већа од 1.

294. У оштроуглом троуглу ABC тачка D је средиште странице BC. Нека тачка E дели дуж AD, тако да је $AE : ED = m : n$ и нека права BE сече страницу AC у тачки F. Одредити однос површина троуглова ABF и BCF.

295. Права p паралелна страници AB датог троугла ABC, полови страницу BC и сече симетралу $\measuredangle CAB$ у тачки T. Ако је O центар уписаног круга троугла ABC, доказати да је $\measuredangle ABC = 2\measuredangle OCT$.

296. У координатној равни дате су тачке M, N, A и B са целобројним координатама. Описати најкраће путеве између тачака M и N ако су дозвољене само три врсте кретања:
(а) дуж правих са једначином облика $x = i$, $i \in Z$;
(б) дуж правих са једначином облика $y = j$, $j \in Z$;
(в) дуж дужи AB.

VIII разред

297. Одредити три проста броја таква да је њихов производ седам пута већи од њиховог збира.

298. Производ првих n природних бројева $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$ назива се „n факторијел" и обележава са $n!$. Да ли се из производа сто бројева $1!, 2!, \ldots 99!, 100!$ може изоставити само један број тако да производ преосталих 99 бројева буде потпун квадрат?

299. Сва темена конвексног многоугла налазе се у унутрашњости квадрата чија је страница дужине 1. Доказати да је збир квадрата дужина страница тог многоугла мањи од 4.

300. У троуглу ABC тачка D припада страници AB, а тачка E је пресек симетрале $\measuredangle BAC$ и странице BC. Ако је $\measuredangle CBD = \measuredangle ACD$ и $AC = BD$, онда је права DE паралелна са правом AC. Доказати.

301. Укупна маса неколико сандука је 10 тона, при чему је маса сваког сандука мања од једне тоне. Колико најмање камиона носивости 3 тоне треба узети, тако да се цео терет од 10 тона може превести одједном?

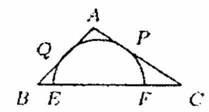
ЧЕТВРТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Охрид, 2000.

302. Нека су x и y цели бројеви такви да је задовољена једнакост $x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = 2000$. Доказати да је $x + y = 10$.

303. Наћи све целе бројеве n, $n \geqslant 1$, за које је $n^2 + 3^n$ квадрат целог броја.

304. Полукруг чији пречник EF припада страници BC троугла ABC додирује странице AB и AC редом у тачкама Q и P, као што је показано на слици. Доказати да пресечна тачка K дужи EP и FQ припада висини троугла ABC конструисаној из темена A.



Сл. уз задатак 304

305. На тениском турниру који је одржан на летњем кампу учествовало је два пута више дечака од девојчица. Сваки пар учесника је одиграо тачно једну партију (ниједна партија није завршена нерешено). Однос броја победа девојчица према броју победа дечака био је 7 : 5. Колико је учесника било на турниру?

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

IV разред

306. Плетеном жицом треба оградити башту чије су странице 46 m и 54 m. При томе се на свака 2 m стављају стубови. Колико је потребно стубова и колико метара жице ако се по један стуб налази у сваком углу баште?

307. Површина школског дворишта је $3\,975\,\mathrm{m}^2$, а површина игралишта је 24 a. За колико квадратних метара је површина школског дворишта већа од површине игралишта?

308. Један од два сабирка је повећан за 222. Како треба променити други сабирак:

(а) да би се збир повећао за 150; (б) да би се збир смањио за 50?

309. Од следбеника најмањег парног четвороцифреног броја одузети претходник највећег непарног троцифреног броја.

310. Написати најмањи и највећи седмоцифрени број чији је производ цифара једнак 96.

V разред

311. Нека је скуп $P = \{1, \{2,3\}, 3\}$. Која тврђења су тачна: $\{1\} \in P$, $1 \in P$, $\{3,2\} \in P$, $\{2,3\} \subset P$, $\{\{2,3\}\} \subset P$, $2 \in P$, $3 \in P$?

312. У равни је дато пет тачака од којих никоје три не припадају једној правој. Колико има дужи са крајевима у тим тачкама, а колико има троуглова са теменима у тим тачкама?

313. Мера угла α је $20°1'$, а мера угла β је $2001'$. Који од тих углова је већи и за колико?

314. Одредити цифру x тако да израз $13 \cdot \overline{16x} + 2\,001 \cdot 2\,000$ буде дељив са 12.

315. Одредити три узастопна природна броја тако да је њихов производ једнак 60.

VI разред

316. Ако је $x = -8$, $y = 3$ одредити вредност израза: $|xy - (-(-y))|$.

317. Висина куће је 11,2 m, а тополе $9\frac{3}{4}$ m. За колико треба да нарасте топола да би била виша од куће за $2\frac{1}{2}$ m?

318. На страницама AB, BC и CA једнакостраничног троугла ABC дате су тачке A_1, B_1 и C_1, тако да је $AA_1 = BB_1 = CC_1$, и при чему је $AA_1 > A_1B$, $BB_1 > B_1C$, $CC_1 > C_1A$. Доказати да је $\triangle A_1B_1C_1$ такође једнакостраничан.

319. Одредити цифре a и b тако да број $\overline{20ab}$ буде дељив са 3 и 29, а да не буде дељив са 6.

320. За зимовање се пријавило $\frac{2}{9}$ ученика више него што је планирано. Пред полазак, због болести, $\frac{3}{11}$ пријављених је морало да одустане од пута, тако да је на зимовање отишло 8 ученика мање него што је планирано. Колико је планирано, а колико је ученика отишло на зимовање?

VII разред

321. Конструисати тачке бројевне праве којима се придружују бројеви: $3 + \sqrt{3}$ и $\sqrt{3} - 3$.

322. Који је број већи: 54^4 или 21^{12}?

323. Правоугаоник $ABCD$ чије су странице $a = 6\,\mathrm{cm}$, $b = 3\,\mathrm{cm}$ и једнакостранични троугао ABE имају заједничку страницу $AB = a$ и налазе се са исте стране те странице. Израчунати обим и површину заједничког дела правоугаоника и једнакостраничног троугла.

324. Дата је једнакост $a\sqrt{2} + b = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + 3$. Одредити целе бројеве a и b тако да дата једнакост буде тачна.

325. Једнакокраки троугао има крак дужине 6 cm, а угао између кракова је 135°. Израчунати површину тог троугла.

VIII разред

326. У три џака има укупно 64,2 kg шећера. Ако у првом џаку има $\frac{4}{5}$ од количине схећера из другог џака, а у трећем џаку 42,5% од количине из првог џака, колика је маса шећера у првом џаку?

327. На колико начина три дечака и три девојчице могу да седну у један ред тако да особе истог пола не буду једна до друге?

328. Нека је CD висина која одговара хипотенузи правоуглог троугла ABC. Показати да је $CD^2 = AD \cdot BD$.

329. Дужине страница основе квадра су 7 cm и 24 cm, а дијагонала квадра захвата са основом квадра угао од 60°. Израчунати површину и запремину квадра.

330. Над сваком страницом правоугаоника $ABCD$, као над пречником, конструисани су споља полукругови, а око правоугаоника је описан круг. Збир површина тако добијених полумесеца једнак је површини правоугаоника. Доказати.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

IV разред

331. Умањилац је смањен за 4 567. Како треба променити умањеник да би се разлика повећала за 1 234?

332. У павиљонима је смештено 430 излетника. У првом је било 12 излетника више него у трећем, а у другом 14 излетника мање него у трећем, док је у четвртом био једнак број излетника као у трећем павиљону. Колико излетника је смештено у сваком павиљону?

333. Цртањем четири праве у равни круга, поделити дати круг на највећи могући број делова. Колико је то делова?

		16
13		17
	19	

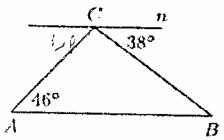
334. У „једнакости" $5 \cdot 4 + 26 : 2 + 1926 = 2001$ поставити заграде тако да се добије тачна једнакост.

335. Допунити магични квадрат тако да збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали буде једнак.

V разред

336. Нека је M скуп слова која чине реч МАТЕМАТИКА, а T скуп слова која чине реч ТАКМИЧЕЊЕ. Колико двочланих подскупова има пресек скупова M и T?

337. Одредити колико природних бројева x испуњава услове $\frac{2}{29} < \frac{5x}{2001} < \frac{3}{23}$.



Сл. уз задатак 339

338. Одредити просте бројеве p и q ако је $2p + 3q = 100$.

339. У равни је дат троугао ABC и права n, паралелна правој AB, која садржи теме C. На основу података са слике одредити угао ACB.

340. Марија је имала 3, а Петар 5 чоколада. Њих двоје, заједно са Јеленом, поделили су све чоколаде на равне делове. Јелена је дала 80 динара Марији и Петру и на тај начин платила свој део чоколаде. Како ће Марија и Петар поделити 80 динара?

VI разред

341. Група од 18 дечака је добила 150 кликера. Могу ли поделити кликере тако да сваком од њих припадне различит број кликера?

342. Описати речима конструкцију којом би се дати угао од 19°, поделио на деветнаест једнаких делова. (Напомена: конструктивни поступак дозвољава употребу само шестара и лењира.)

343. Одредити вредност променљиве x у скупу целих бројева, тако да израз $\frac{3x-6}{9}$ има вредност мању од 1 и већу од 0.

344. У троуглу ABC са угловима $\angle ABC = 30°$ и $\angle ACB = 15°$, из темена A конструисана је нормала на страницу AC која сече страницу BC у тачки D. Доказати да је $CD = 2\,AB$.

345. Ђорђе је купио пун џеп чоколадица. Најпре је срео Ану и дао јој половину свих чоколадица и још пола од једне чоколадице. Затим је срео Бану и дао јој половину преосталих чоколадица и још пола од једне. На крају, када је срео Јелену и дао јој половину чоколадица које су му преостале и још пола од једне, џеп му је био празан. Колико је чоколадица купио Ђорђе?

VII разред

346. Израчунати вредност израза $\frac{3m^2 - 6m + 2}{m^2 + 3m + 2}$ за $m = -\frac{2}{3}$.

347. Конструисати квадрат K странице 3 cm и квадрат K_1, тако да за њихове површине P и P_1 важи: $P = \frac{3}{4}P_1$.

348. Поређати по величини бројеве: $-\frac{666}{667}, -\frac{1333}{1334}, -\frac{1998}{2001}$.

349. Низ од девет бројева се формира тако што је трећи број једнак први минус други, четврти је други минус трећи, пети је трећи минус четврти, итд. (Од трећег броја па надаље, сваки члан низа једнак је разлици двају претходних.) Зна се да је први члан број 40, а девети број 100. Исписати све чланове низа који недостају.

350. Израчунати обим ромба који има површину $\sqrt{8}\,\mathrm{cm}^2$ и чији се углови односе као 3 : 1.

VIII разред

351. Решити једначину $x + |x-1| = 2 - |x|$, а затим израчунати производ квадрата разлике и збира квадрата њених решења.

352. За које вредности променљиве x, израз $\dfrac{\frac{2}{3} - 3x}{-x + \frac{1}{2}}$ има вредност већу од 1?

353. Кругови k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B. Заједничка тангента их додирује у тачкама M и N. Израчунати збир углова $\angle MAN$ и $\angle MBN$ (углови садрже дуж MN).

354. Ако су a и b дужине основица трапеза, одредити дужину дужи паралелне основицама, која дели трапез на два дела једнаких површина.

355. Коцка ивице a пресечена је равни која садржи дијагоналу једне стране коцке и средишта двеју ивица супротне стране. Израчунати површину тог пресека.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

IV разред

356. Колико цифара се употреби за нумерацију парних страница књиге која има 111 страница?

357. Када се једна страница правоугаоника смањи за 5 cm, а друга повећа за 4 cm, онда се добија квадрат чија је површина једнака површини правоугаоника. За колико је обим правоугаоника већи од обима квадрата?

358. Одредити најмањи паран природни број чији је збир цифара 60.

359. Једна тона обичне воде садржи 40 g соли, а у једној тони морске воде има 35 kg соли. Која количина обичне воде садржи онолико соли колико се добија испаравањем 200 g морске воде?

360. Дешифровати множење $** \cdot * \cdot *9 = 2\,001$, тако што ће се уместо звездица ставити одговарајуће цифре. Колико различитих решења има?

V разред

361. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15 и код кога је збир цифара 15.

362. Један канап пресечен је на два дела, тако да је један његов део половина канапа увећан за 0.5 m. Затим је мањи део опет подељен тако да је одмерена његова половина и још 0,5 m, а преостали део канапа износи 1,5 m. Колика је укупна дужина тог канапа?

363. Дат је правоугаоник $ABCD$ $(AB > BC)$. Нека је s симетрала $\angle BAD$, а D_1 тачка осносиметрична темену D у односу на праву s. Ако је $AD_1 = 4$ cm и $D_1B = 7$ cm, израчунати обим правоугаоника $ABCD$.

364. Неке стране дрвене коцке ивице a cm $(a \in \mathbb{N})$ су обојене плавом бојом, а затим је коцка исечена на коцкице ивице 1 cm. Ако 14 коцкица има по две обојене стране и не постоји ниједна коцкица са три обојене стране, колико коцкица нема обојену ниједну страну?

365. На рођендану је укупно 20 гостију, дечака и девојчица. Ана од раније познаје седморицу дечака, Весна осморицу, Тања деветорицу и тако даље све до последње, Лидије која познаје све присутне дечаке. Колико је дечака на рођендану?

VI разред

366. Решити једначину $\big||x| - 1\big| - 2000 = 0$.

367. Дат је оштроугли троугао ABC. Из темена A конструисане су дужи AD и AE тако да је $AD \perp AC$, $AD = AC$, $AE \perp AB$ и $AE = AB$, при чему су тачке D и E, као и тачке B и D са разних страна праве AC. Доказати да је $BD = CE$.

368. Одредити све могуће вредности цифара a и b тако да је производ бројева $\overline{54a}$ и $\overline{63b1}$ дељив са 12.

369. Нека је D произвољна тачка у унутрашњости оштроуглог троугла ABC и нека су M, N, P, Q редом средишта дужи AB, BC, CD, DA. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

370. Које године је рођен човек који је ове године напунио толико година колики је збир цифара године његовог рођења?

VII разред

371. Дат је израз $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} + \sqrt{9-4\sqrt{5}}$. Да ли је алгебарска вредност датог израза рационалан или ирационалан број?

372. Колико има четвороцифрених природних бројева са различитим цифрама таквих да им је збир цифара једнак 10?

373. Правилан многоугао M има унутрашњи угао који је један и по пут већи од унутрашњег угла правилног многоугла M_1. Одредити све парове таквих многоуглова M и M_1.

374. Дат је правилан осмоугао $ABCDEFGH$ чија страница је 2 cm. Одредити површину шестоугла $ABCDEF$.

375. Дијагонале AC и BD једнакокраког трапеза $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ секу се у тачки S тако да је $\angle ASB = 60°$. Ако је M средиште дужи AS, N средиште дужи DS и P средиште дужи BC, доказати да је троугао MNP једнакостраничан.

VIII разред

376. Тест се састоји од 20 задатака. Сваки тачно решен задатак ученику доноси 8 поена, сваки погрешно решен задатак -5 поена, а сваки задатак који није решаван 0 поена. По завршетку теста ученик је сакупио 13 поена. Колико задатака је ученик тачно, а колико погрешно решио?

377. Дате су линеарне функције $f(x) = (2m - 0{,}5)x - 3$ и $g(x) = (7m + 2)x - 4$. Одредити вредности реалног броја m тако да:
а) графици функција буду паралелни;
б) $f(x)$ буде опадајућа, а $g(x)$ растућа функција.

378. Из тачке A која је 120 m удаљена од подножја вертикалног торња BC, врх торња C се види под углом α. Из тачке D, која је за 90 m ближа подножју торња B, врх торња се види под углом $90° - \alpha$. Колика је висина торња?

379. Дата је тространа једнакоивична пирамида $SABC$. Нека је SS' висина пирамиде, а M средиште висине SS'. Доказати да је $\angle AMB = 90°$.

380. Од 3 ученика шестог, 4 ученика седмог и 5 ученика осмог разреда треба формирати екипу од 4 члана коју чине тачно један ученик шестог разреда и бар један ученик седмог разреда. Колико има таквих екипа?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

VI разред

381. Маса пшенице је 4 250 kg, а њена влажност је 20%. После сушења пшенице, маса пшенице је смањена за 250 kg. Колика је (у процентима) влажност пшенице после сушења?

382. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, при дељењу са 5 даје остатак b, а при дељењу са 7 даје остатак c. Доказати да је израз $70 \cdot a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - n$ дељив са 105.

383. У троуглу ABC симетрала угла α сече страницу BC у тачки A_1, а симетрала угла β сече страницу AC у тачки B_1. Ако се дужи AA_1 и BB_1 секу у тачки S и ако је угао $\gamma = 60°$, онда је троугао A_1SB_1 једнакокрак. Доказати.

384. Конструисати трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) ако су дати: збир основица $AB + CD$ једнак датој дужи s; висина трапеза која одговара основици једнака датој дужи h_a; оштри углови на основици трапеза једнаки редом α и β.

385. Мајка је за излет својој деци спремила три врсте воћа: крушке, јабуке и бресквe. Сваком детету је на непрозирној корпици коју је добио залепила и налепницу са његовим именом. Потом је деци саопштила да је Ђорђу спремила 2 крушке и 3 јабуке, Рајку 3 јабуке и 1 бресквy, а Пери 3 бресквe. Док се Пера купао на реци, Ђорђе и Рајко су заменили налепнице на корпама, тако да ниједна налепница није остала на свом месту. Колико најмање воћа и из којих корпи треба да извуче Пера не завирујући у корпе, да би налепнице потпуно тачно вратио на своја места?

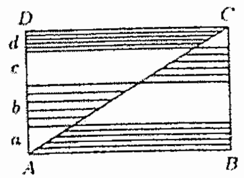
VII разред

386. Најмањи заједнички садржалац два броја је за 20 већи од њиховог највећег заједничког делиоца. Одредити та два броја.

387. Дат је израз $\dfrac{2^{17} + 2^{16} + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1}{2^8 + 2^7 + \cdots + 2^2 + 2^1 + 1} : 3^3$. Доказати да је вредност датог израза цео број.

388. Дат је једнакостранични троугао ABC и тачка M на страници AB. Над дужи CM конструисан је једнакостранични троугао CMN, при чему су тачке M и N са разних страна дужи BC. Доказати да су дужи AC и BN паралелне.

389. Дат је правоугаоник $ABCD$ (видети слику). Ако је на слици $a + c = b + d$, онда је збир белих површина са леве стране дијагонале AC једнак збиру белих површина са десне стране дијагонале AC. Доказати.



Сл. уз задатак 389

390. Лека је на табли написао 55 различитих двоцифрених природних бројева, тврдећи да међу њима не постоје два чији је збир 100. Жарко је, не проверавајући, рекао да је то немогуће. Ко је у праву, Лека или Жарко?

VIII разред

391. Наставница је поређала у врсту 20 ученика и поделила им 800 бомбона. Сваки ученик је добио задатак да израчуна количник $\dfrac{x}{x + 2k - 1}$, где је x број бомбона које је добио, а k редни број свог места у врсти. Испоставило се да су ти количници за свих 20 ученика били једнаки. Колико бомбона је добио ученик који је био дванаести у врсти?

392. На шаховском турниру свако игра са сваким по једну партију. Такмичари су мајстори и велемајстори. На крају турнира се испоставило да су сви велемајстори победили све мајсторе и у тим партијама сакупили половину поена који се могу добити на целом турниру. Ако у свакој партији победник добија 1 поен, поражени 0 поена, а у случају ремија (нерешеног исхода) оба играча добијају по пола поена, доказати да је број учесника турнира квадрат неког природног броја.

393. Правилна тространа пирамида $ABCS$, основне ивице a и висине H пресечена је са равни која садржи средишта основних ивица AB и AC и паралелна је са бочном ивицом AS. Израчунати обим и површину пресека.

394. Дата је четвртина круга одређена међусобно нормалним полупречницима OA и OB. Права p паралелна са тетивом AB сече лук AB у тачки C (тачка C је једна од две пресечне тачке), а продужетке дужи OA и OB у тачкама P и Q. Доказати да је $AB^2 = PC^2 + QC^2$.

395. По кругу треба распоредити цифре $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ и 9. Да ли је могуће направити такав распоред да збир сваке три узастопне цифре:

(а) није већи од 14; (б) није већи од 15?

Ако је могуће, навести по један пример таквих распореда.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2001.

VI разред

396. Ако се прва цифра природног броја a премести на последње место добија се природан број b који је три пута мањи од a. Доказати да је број a дељив са 27.

397. Колико пута ће се од поноћи до подне поклопити велика и мала казаљка на сату, не рачунајући поноћ, а рачунајући подне? Израчунати времена тих поклапања.

398. У оштроуглом троуглу ABC, са $\measuredangle ACB = 60°$, тачке A' и B' су редом подножја висина троугла из темена A и B, а тачка C_1 је средиште странице AB. Доказати да је троугао $A'B'C_1$ једнакостраничан.

399. Нека су P, Q, R и S редом средишта страница AB, BC, CD и DA конвексног четвороугла $ABCD$. Тачка M је унутар тог четвороугла, таква да је $APMS$ паралелограм. Доказати да је тада и $MQCR$ такође паралелограм.

400. Брачни пар Мирко и Љубица позову на вечеру своје пријатеље, три брачна пара. Пошто су сви стигли истовремено, почели су да се рукују, при чему се свако руковао са неколико људи, а нико се није руковао са својим брачним другом. Када су завршили са руковањем, Мирко је питао сваког (и Љубицу) колико пута се руковао. Добио је седам различитих одговора. Са колико се људи руковала Љубица?

VII разред

401. Постоје ли природни бројеви a, b и c, такви да важи једнакост $(a+b)(b+c)(c+a) = 340$?

402. Постоје ли природни бројеви m и n, такви да су бројеви m^2+n и n^2+m квадрати природних бројева?

403. Страница AB конвексног четвороугла $ABCD$ је два пута већа од странице CD. Дијагонала AC нормална је на страницу BC, а дијагонала BD нормална је на страницу AD. Одредити угао између дијагонала четвороугла.

404. Дат је правоугли троугао ABC, где је C теме правог угла, а D подножје хипотенузине висине. Нека су r, r_1 и r_2 редом полупречници кругова уписаних у троуглове ABC, ACD и BCD. Доказати да је $r + r_1 + r_2 = CD$.

405. Грађани града A увек говоре истину, грађани града B увек говоре лажи, а сваки грађанин града C наизменично говори истину и лаж. Дежурни ватрогасац је телефоном примио поруку из једног од ових градова: „Код нас је пожар“, јавио је један грађанин. „Где?“, питао је дежурни ватрогасац. „У граду C“, одговорио је исти грађанин. У који град треба да оде ватрогасна екипа?

VIII разред

406. Дато је 2 001 различитих бројева таквих да ако се сваки од њих замени са збиром осталих добија се исти скуп бројева. Одредити производ датих бројева.

407. Дат је скуп $\{1, 2, \ldots, n\}$. Овај скуп је разбијен на два подскупа, тако да први подскуп садржи тачно три елемента, означимо их са a, b и c, а сви остали елементи чине други подскуп. Да ли је могуће да вредност израза $ab+bc+ca$ буде једнака разлици производа елемената првог подскупа и збира елемената другог подскупа, ако је:

а) $n = 12$; б) $n = 17$?

408. Дат је једнакостранични троугао ABC чија је површина $7\,\text{cm}^2$. На страницама AB, BC и CA дате су редом тачке P, M и N, тако да је $AP : PB = BM : MC = CN : NA = 2 : 1$. Праве AM, BN и CP секу се у тачкама Q, R и S. Одредити површину троугла QRS.

409. Обим троугла ABC је $2s$. Тангента на кружницу уписану у дати троугао, која је паралелна страници AB, сече странице AC и BC редом у тачкама D и E. Колику највећу вредност може имати дужина дужи DE?

410. Темена коцке нумерисана су са осам различитих бројева из скупа $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Збирови бројева којима су нумерисана темена на истој страни коцке су међусобно једнаки и нису дељиви бројем из скупа S, који не учествује у нумерацији. Одредити број из скупа S који не учествује у нумерацији.

ПЕТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кипар, 2001.

411. Наћи све природне бројеве a, b, c такве да је $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

412. Дат је $\triangle ABC$, код кога је $\measuredangle ACB = 90°$, $AC \neq BC$, а тачке L и H су на страници AB такве да је $\measuredangle ACL = \measuredangle LCB$, а CH је висина на AB. Доказати:
(а) за сваку тачку X на дужи CL важи $\measuredangle XAC \neq \measuredangle XBC$;
(б) за сваку тачку X на дужи CH важи $\measuredangle XAC \neq \measuredangle XBC$.

413. Дат је једнакостранични $\triangle ABC$. Нека су D и E произвољне тачке на страницама AB и AC, редом. Ако су DF и EG симетрале углова $\triangle ADE$, где је $F \in AE$ и $G \in AD$, докажи да је збир површина $\triangle DEF$ и $\triangle DEG$ не већи од површине $\triangle ABC$. Објаснити када важи једнакост.

414. Дат је конвексан многоугао са 1415 страница и обимом од 2001 cm. Доказати да постоје три темена овог многоугла, која образују троугао чија је површина мања од $1\,\text{cm}^2$.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2002.

IV разред

415. Бранко је у једној кутији имао 256 маркица, а у другој 252. У албум је ставио четвртину маркица из прве и трећину из друге кутије. Колико је маркица Бранко ставио у албум, а колико му је остало у свакој кутији?

416. Одреди број који је мањи од 25432 за толико за колико је број 658 мањи од 1024.

417. Збир обима три једнака правоугаоника износи 540 cm. Израчунај:
(а) половину обима једног правоугаоника;
(б) дужину једног од ових правоугаоника ако му је ширина 40 cm.

418. Ана је записала прва 2002 природна броја један за другим, 123456789101112 ... 200020012002. Колико је укупно цифара записала?

419. Петар и Павле треба да поделе 2002 динара, тако да Петар добије 6 пута више новца од Павла. Колико новца ће добити Петар, а колико Павле?

V разред

420. Одреди све троцифрене бројева дељиве са 15 код којих је цифра јединица једнака цифри стотина.

421. 120 ученика су на тесту решавали два задатка. Први задатак је решило 65 ученика. 70 ученика није решило други, а 20 ученика је решило оба задатка. Колико ученика је решило тачно један задатак?

422. Ако би пут био дугачак онолико mm колико у m^3 има mm^3, за које време би тај пут прешло возило које за 1 h пређе 50 km?

423. У равни α су дате праве p и q које се секу у тачки A. Колико је полуравни одређено на тај начин? Које су то полуравни?

424. Мера угла $3\alpha-\beta$ је за $63°45'36''$ мања од мере угла $3\alpha+2\beta$ и за $74°37'16''$ већа од мере угла $\alpha-\beta$. Наћи мере углова α и β.

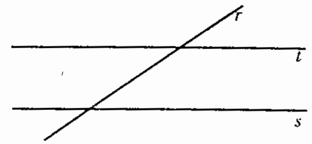
VI разред

425. Висина куће је $12\frac{3}{4}$ m, а тополе 8,7 m. Колико би требало да израсте топола, да би била виша од куће за 3,9 m?

426. Одредити вредност израза $|mn-(-(-n))|$ за $m=8$ и $n=-4$.

427. Нека симетрала s странице AB троугла ABC сече страницу BC у тачки D. Ако је $\measuredangle CAB = 73°28'40''$, а $\measuredangle ABC = 43°33'20''$, колики је $\measuredangle CAD$?

428. Дате су праве r, s и t при чему је $t \parallel s$ и r сече t и s (слика). Одредити тачке R и T ($R\in r$, $T \in t$) тако да буду симетричне у односу на праву s.



Сл. уз задатак 428

429. Нека је n природан број већи од 1. Збир n узастопних целих бројева је 2002. Одредити најмање такво n.

VII разред

430. Израчунај $\sqrt{\left(\frac{1}{x}-x\right)^2}$ ако је $\frac{1}{x}=\sqrt{0{,}04}$.

431. Израчунај $\frac{2^{3x}\cdot 3^{2x}}{6^x}$, $x\in \mathbf{N}$.

432. Конструисати квадрат K_1 странице 3 cm и квадрат K тако да је површина квадрата K једнака половини површине квадрата K_1.

433. Израчунај површину и обим правоуглог троугла ако је дата једна катета $b=3$ cm и тежишна дуж која одговара тој катети $t_b=2{,}5$ cm.

434. У полукруг полупречника $r=8$ cm уписан је правоугаоник (два темена припадају луку, а два пречнику) чија је мања страница $b=4$ cm. Израчунај обим правоугаоника ако:
(а) једна од мањих страница правоугаоника припада пречнику полукруга;
(б) ниједна од мањих страница правоугаоника не припада пречнику полукруга.

VIII разред

435. За коју вредност променљиве x израз $13-\frac{5}{2+(0{,}3+x)^2}$ има најмању вредност?

436. Око једнакокраког троугла основице 4 cm и угла при врху 30° описана је кружница. Израчунај дужину кружног лука који одговара краку троугла.

437. Ако се дужина квадра повећа за 25%, ширина за своју трећину и висина смањи за 10%, како се мења запремина?

438. На кружници пречника 8 cm нанеси редом лукове $AB=90°$, $BC=60°$ и $CD=120°$. Израчунај површину четвороугла $ABCD$.

439. Може ли разлика квадрата два природна броја бити 2002?

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2002.

IV разред

440. Два аутомобила крећу се у сусрет један другом. Један прелази 76 km/h а други 12 km/h више од првог. Колико ће бити удаљени један од другог 3 часа после сусрета?

441. У једном руднику раде рудари у три смене. У првој смени ради 126 рудара, у другој 42 рудара више него у првој, а у трећој половина збира рудара прве две смене. Колико рудара ради у трећој смени?

442. Правоугаоник чији је обим 2002 cm подељен је правом која је паралелна мањој његовој страници на један квадрат и један правоугаоник. Колики је обим мањег правоугаоника ако је обим квадрата 1000 cm?

443. Мирослав је записивао природне бројеве један за другим,
123 … 9101112 … . Коју је цифру записао на 2002. месту?

444. Збир два броја је 825. Када се већи подели мањим, количник је 8, а остатак 15. Који су то бројеви?

V разред

445. Ако је $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5\}$, $A \cap B \cap C = \{1,2\}$, $B \setminus C = \{4,5\}$ и $C \setminus A \neq \varnothing$, одредити скуп C.

446. Одредити природан број n и прост број p тако да важи $\dfrac{n}{2002} = \dfrac{1}{p}$.

447. Укупна запремина једног квадра и четири коцке је $2002\,\mathrm{cm}^3$. Зна се да су ивице квадра 2 cm, 5 cm и 91 cm, а ивица једне од коцки је 10 cm. Колике су ивице преостале три коцке ако се зна да су им мерни бројеви неки природни бројеви?

448. На страницама троугла уочене су тачно по две тачке. Одредити број правих одређених са тих шест тачака, а које не пролазе кроз темена троугла.

449. Наћи $n \in \mathrm{N}$ тако да буде $n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) = 180$.

VI разред

450. Одредити све целобројне вредности променљиве x у изразу $\dfrac{20}{-5x+10}$ тако да израз има вредност већу од 1.

451. Спољашњи угао једнакокраког троугла је:

(а) $121°$, (б) $65°$.

Одредити унутрашње углове тог троугла. (Размотрити све могућности.)

452. У равни квадрата $ABCD$ је дата тачка M тако да су дужи CM и DM подударне. Доказати да су углови DAM и MBC једнаки.

453. Лопта која слободно пада сваки пут одскочи од земље до висине за $\dfrac{3}{5}$ мање од висине са које пада. Ако је у трећем одскоку достигла висину од 32 cm, наћи дужину пута који ће лопта прећи до момента када четврти пут додирне земљу.

454. На колико начина се број 2002 може написати као производ три природна броја од којих хе први једноцифрен, други двоцифрен и трећи троцифрен број? Исписати све могућности.

VII разред

455. Наћи цифру која је на 2002. децималном месту броја $\dfrac{13}{101}$.

456. Израчунај вредност израза

$$\left(\sqrt{625} + 3 \cdot \sqrt{(-12)^2}\right) : \left(\frac{2}{5} \cdot \sqrt{0{,}25} + 0{,}58 \cdot \sqrt{100}\right).$$

457. Један угао правоуглог троугла је $60°$ а висина која одговара хипотенузи је $2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Израчунај обим и површину тог троугла.

458. Странице правоуглог троугла су 3 cm, 4 cm и 5 cm. Постоји ли тачка у унутрашњости троугла која је од сваке странице удаљена мање од 1 cm?

459. Постоје ли прости бројеви p, q, r $(p \neq q \neq r)$ такви да је $pq+qr+rp = 2002$?

VIII разред

460. Одреди све рационалне бројеве a који задовољавају неједначину $\dfrac{3a-2}{a+1} < 0$.

461. Дати једнакокрако-правоугли троугао поделити са четири праве на три подударна квадрата и три подударна троугла.

462. Коцка је исечена известан број пута паралелно једној страни. Укупна површина добијених делова је 2002 пута већа од површине полазне коцке. Колико пута је коцка расечена?

463. Дата је полукружница пречника $AB = 8$. Полукружница је тачкама C и D подељена на три подударна лука. Израчунати површину фигуре ограничене дужима AC и AD и луком CD.

464. Имамо 12 штапова, сваки дужине 13. Треба их исећи на делове дужине 3, 4, 5 тако да се од добијених делова може направити 13 троуглова, сваки са страницама дужине 3, 4 и 5. Како треба исећи штапове?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2002.

IV разред

465. Површина једног винограда облика правоугаоника је $67200\,\mathrm{m}^2$. Дужина баште је 5 пута мања од дужине винограда, а ширина баште је 6 пута мања од ширине винограда. Колика је површина баште?

466. На једном турниру учествовало је 8 екипа подељених у две групе по 4 екипе. У првом кругу играла је свака екипа са сваком у својој групи по једну утакмицу. Победници група играли су још једну утакмицу за победника турнира. Колико је укупно одиграно утакмица на турниру? Објаснити.

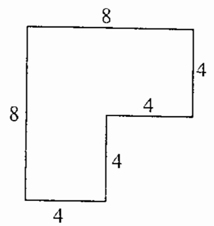
467. Парне странице једне књиге су нумерисане са 1234 цифре. Колико та књига има листова ако је последња нумерисана страница парна?

468. За четвороцифрени број кажемо да је леп ако је написан са две цифре 5 и две цифре 4. Наћи најмању и највећу разлику два различита лепа четвороцифрена броја.

469. Дешифровати сабирање на десној страни

$$\begin{array}{r} A \\ A\,B \\ A\,B\,C \\ +\ A\,B\,C\,D \\ \hline 2\;0\;0\;2 \end{array}$$

V разред



Сл. уз задатак 472

470. Ако од броја x одузмемо збир бројева $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$, та разлика је већа од разлике бројева $3\frac{1}{5}$ и $\frac{7}{8}$. Одредити све такве x.

471. Израчунај збир свих природних бројева који при дељењу са 7 дају количник једнак остатку.

472. Подели дату фигуру на четири подударна дела и израчунај обим и површину једног од тих делова.

473. У једном одељењу на свака 3 дечака „долазе“ 2 девојчице. Ако би се том одељењу прикључила шесторица дечака, онда би дечака било двоструко више него девојчица. Колико је дечака а колико девојчица било у том одељењу?

474. Дата је дуж AB и симетрала s те дужи, која сече AB у тачки S. Ван дужи AB, а на симетрали s_1 дужи BS дата је тачка M. Користећи само лењир конструисати праву која садржи M и нормална је на s. Објаснити поступак конструкције.

VI разред

475. У правоуглом троуглу угао који граде висина и тежишна дуж које одговарају хипотенузи је мере 24°. Колики угао образују симетрала правог угла и тежишна дуж која одговара хипотенузи?

476. Наћи три различита цела броја a, b, c тако да је $abc = 2002$ и да је збир $|a| + |b| + |c|$ највећи могући.

477. Разломак $\frac{179}{140}$ представити као збир три разломка са једноцифреним имениоцима.

478. Конструисати троугао ABC ако је страница $BC = 6\,\mathrm{cm}$, тежишна дуж $t_b = 5\,\mathrm{cm}$ и висина $h_a = 4\,\mathrm{cm}$.

479. Одредити колико најмање пута треба редом исписати број 2002 један за другим да би се добио број дељив са 66 и у том случају одредити количник.

VII разред

480. Два чиниоца се разликују за 5. Ако сваки чинилац повећамо за 7, производ се повећа за 364. Израчунај чиниоце.

481. Израчунати површину правилног дванаестоугла чија је највећа дијагонала 2 cm.

482. У унутрашњости троугла са страницама дужине 6 cm, 8 cm и 10 cm уочене се четири произвољне тачке. Доказати да међу њима постоје бар две које се налазе на растојању мањем од 5 cm.

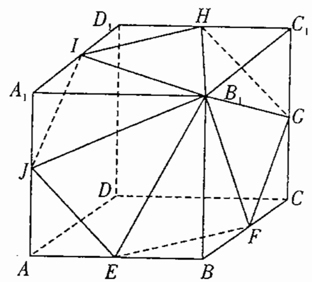
483. Ако се после 2002. децималног места броја $\frac{1}{14}$ изостави 99 цифара (наредних децималних места), да ли ће добијени број бити мањи од $\frac{1}{14}$? Одговор образложити.

484. За које реалне вредности a, b, c важи

$$\frac{a^{2002} + b^8 + c^6 + 1}{2} = a^{1001} + b^4 - c^3 - 1\,?$$

VIII разред

485. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице дужине a. Ако су E, F, G, H, I, J средишта ивица AB, BC, CC_1, C_1D_1, D_1A_1, A_1A (слика), наћи површину пирамиде са врхом B_1 и основом $EFGHIJ$.



Сл. уз задатак 485

486. Колико има четвороцифрених бројева чије су све цифре различите, а да се прва и последња цифра разликују за два?

487. Једначином $26|x| + 154|y| = 2002$ је у xOy-равни одређен један паралелограм. Наћи његову површину.

488. Доказати да је број $1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2005 + 36$ потпун квадрат.

489. Дат је квадрат $ABCD$. Тачка E је средиште странице BC. Ако је тачка F на страници CD дата тако да је дуж EF нормална на AE, доказати да је $\measuredangle EAB = \measuredangle FAE$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2002.

VI разред

490. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног броја је број који се у декадном систему записује помоћу неколико цифара 2. Одредити све такве двоцифрене и њима одговарајуће троцифрене бројеве.

491. Симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C троугла ABC секу праву AB у тачкама M и N. Ако је троугао MNC једнакокрак и угао ACB седам пута већи од угла ABC, израчунати све унутрашње углове троугла ABC.

492. Доказати да је

$$\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\cdots+\frac{1}{2000\cdot 2002}<\frac{1}{4}.$$

493. На страници CD квадрата $ABCD$ дата је тачка M. Симетрала угла BAM сече страницу BC у тачки N. Доказати да је $AM = DM + BN$.

494. Доказати да међу 30 узастопних природних бројева, од којих је најмањи већи од 5, има највише 8 простих.

VII разред

495. Ако су m и n било која два троцифрена броја, доказати да тада број m^n има мање од 3000 цифара.

496. Доказати да је у правилном деветоуглу разлика дужина најдуже и најкраће дијагонале једнака дужини странице деветоугла.

497. Ако је $a^2+b^2=(a+b-c)^2$, где је $b\neq c$ и $a+b-c\neq 0$, тада је

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Доказати.

498. У правоугаонику $ABCD$ тачка M је средиште дужи AB, а E пресек дијагонале AC и дужи DM. Ако је $AB=\sqrt{2}$ и $BC=1$, доказати да ~~је тада~~ $\measuredangle CED$ прав.

499. Сви природни бројеви од 1 до 10 написани су један за другим у произвољном поретку. Испод сваког од тих 10 бројева написан је његов редни број (испод првог 1, испод другог 2 итд.), а затим су сабрани бројеви који се налазе један испод другог. Доказати да се бар два од тако добијених десет бројева (збирова) завршавају истом цифром.

VIII разред

500. Наћи сва целобројна решења једначине $2^x+1=y^2$.

501. У квадрат је уписан правоугаоник тако што су странице тог правоугаоника паралелне дијагоналама квадрата, а темена тог правоугаоника су на страницама квадрата. Наћи највећу могућу површину на тај начин уписаног правоугаоника ако је страница квадрата 5 cm.

502. 20 жутих и 30 зелених робота направе 80 аутомобила за 4 дана, а 50 жутих и 40 зелених робота направе 230 аутомобила за 6 дана. Колико аутомобила направи 160 жутих и 180 зелених робота за 8 дана?

503. Нека је $OABC$ пирамида чије су ивице OA, OB и OC међусобно нормалне. Доказати да је

$$(P_{\triangle ABC})^2=(P_{\triangle OAB})^2+(P_{\triangle OBC})^2+(P_{\triangle OCA})^2.$$

504. Квадрат је са 9 правих паралелних једној и 9 правих паралелних другој страници подељен на 100 правоугаоника од којих су тачно 9 квадрати. Доказати да су од тих 9 квадрата бар два подударна.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2002.

VI разред

505. Нека су A_1, B_1, C_1 средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Ако је D подножје висине из темена C и $AC\neq BC$, доказати да су тачке A_1, B_1, C_1 и D темена једнакокраког трапеза.

506. Нека је $ABCD$ квадрат, ABF једнакостранични троугао у спољашњости квадрата и BCE једнакокраки троугао у спољашњости квадрата са основицом BC и углом при врху од 30°.
(а) Доказати да је троугао FCE једнакокрако-правоугли.
(б) Одредити углове троугла FBE.

507. Одредити све просте бројеве n, такве да скуп $\{n+2, n^2+4, 6n+1, n^3+2\}$ садржи само просте бројеве.

508. Одредити најмањи природан број који је дељив са 4 и чији је збир цифара једнак 2002.

509. Колонију од 200 бактерија напао је један вирус. У току првог минута вирус уништи једну бактерију, а затим се он подели на два нова вируса и свака од преосталих бактерија се подели на две нове. У следећем (другом) минуту два вируса униште две бактерије, сваки по једну, а затим се сваки од њих подели на два вируса и свака од преживелих бактерија се подели на две бактерије. Процес се даље наставља на исти начин. Колико времена треба да вируси униште све бактерије?

VII разред

510. Нека је α унутрашњи угао правилног m-тоугла, а β унутрашњи угао правилног n-тоугла. Одредити све парове (m,n) ако је $\alpha:\beta=2:3$.

511. У свакој од три посуде запремине 6 l налази се 4 l боје. У различитим посудама су различите боје. Дозвољено је пресипати из једне посуде у другу цео број литара (посуде су баждарене на литре). Како постићи да у све три посуде буде иста мешавина? (Других посуда нема, а боја се не сме просипати.)

512. Нека је $S(n)$ збир цифара природног броја n. Одредити n ако је:
(а) $n + S(n) = 2002$; (б) $n + S(n) + S(S(n)) = 2002$.

513. Нека је $A_1A_2 \ldots A_9$ правилан деветоугао, O центар њему описане кружнице, M средиште странице A_1A_2, N средиште мањег лука A_2A_3 и S средиште дужи ON. Израчунати угао OMS.

514. Нека су $AB = 4$, $BC = 8$, $CD = 13$ и $DA = 11$ странице конвексног четвороугла $ABCD$. Израчунати угао између његових дијагонала AC и BD.

VIII разред

515. Ако су x, y и z реални бројеви за које важи

$$x^2 + 2yz = x, \qquad y^2 + 2zx = y, \qquad z^2 + 2xy = z,$$

доказати да је $\left| |x + y + z| - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

516. Одредити све парове природних бројева (m, n) за које $\left| \frac{m}{77} - \frac{n}{13} \right|$ има најмању могућу позитивну вредност.

517. Висина трапеза $ABCD$ је 4, а његове основице су $AB = 7$ и $CD = 5$. Тачка K припада дужи AB и важи $AK = 3$, L је средиште дужи AD, а M је пресечна тачка дужи CK и BL. Израчунати површину четвороугла $LMCD$.

518. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Колико пута је запремина коцке већа од запремине заједничког дела тетраедара ACB_1D_1 и BDA_1C_1?

519. Нека је $S(m)$ збир цифара природног броја m. Низ бројева формира се на следећи начин: $a_1 = n$, где је n неки природан број и

$$a_2 = a_1 - S(a_1), \quad a_3 = a_2 - S(a_2), \quad \ldots$$

Ако је a_{13} први члан у низу који је једнак нули, одредити n.

ШЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Тргу-Муреш (Румунија), 2002.

520. Нека је ABC троугао, такав да је $AC = BC$ и нека је P тачка на оном луку AB описане кружнице на коме се не налази тачка C. Нека је D тачка на правој PB тако да је права CD нормална на PB. Доказати да је $PA + PB = 2\,PD$.

521. Две кружнице k_1 и k_2 различитих полупречника имају заједнике тачке A и B и њихови центри O_1 и O_2 су са различитих страна праве AB. Нека су B_1 и B_2 дијаметрално супротне тачке тачки B на одговарајућим кружницама k_1 и k_2. Тачке M_1 на k_1 и M_2 на k_2 су изабране тако да је $\measuredangle AO_1M_1 = \measuredangle AO_2M_2 < 180°$ и да је B_1 у унутрашњости $\measuredangle AO_1M_1$, а B у унутрашњости $\measuredangle AO_2M_2$. Тачка M је средиште дужи B_1B_2. Доказати да је $\measuredangle MM_1B = \measuredangle MM_2B$.

522. Наћи све природне бројеве N који имају следеће особине:
(а) N има тачно 16 делилаца $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{15} < d_{16} = N$;
(б) делилац са индексом d_5 (тј. d_{d_5}) једнак је $(d_2 + d_4)d_6$.

523. Нека су a, b, c позитивни бројеви. Доказати да је

$$\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2003.

IV разред

524. У пет судова било је 256 литара млека. Када је из првог суда изливено 12 литара, а из другог 19 литара, у свих пет судова налазила се иста количина млека. Колико је литара млека било у сваком суду пре изливања млека из прва два суда?

525. У правоугаоник дужине 8 cm и ширине 6 cm удртан је други правоугаоник чије су странице паралелне и на растојању 1 cm од страница првог правоугаоника. За колико је обим првог правоугаоника већи од обима другог?

526. Железничка пруга пролази кроз три тунела. Дужина првог и другог тунела је 1440 m, дужина првог и трећег тунела је 1350 m, а дужина другог и трећег тунела је 1520 m. Колика је дужина сваког од тунела?

527. За колико је збир парних бројева треће стотине већи од збира непарних бројева треће стотине?

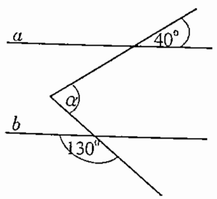
528. Ако за четвороцифрене бројеве чији је збир цифара четири кажемо да су „четвртасти", наћи највећу могућу разлику између два „четвртаста" броја.

V разред

529. Дужине страница правоугаоника, мерених у центиметрима, изражавају се природним бројевима. Површина правоугаоника је $24\,\text{cm}^2$. Колико таквих неподударних правоугаоника постоји?

530. Ако за углове α, β и γ важи да је $\alpha+\beta=90°$, $\alpha+\gamma=180°$ и α је трећина разлике углова γ и β, израчунати $\alpha+\beta+\gamma$.

531. При дељењу неким природним бројем k бројева 73, 92 и 111 добијени су редом остаци 1, 2 и 3. Наћи највећи такав број k.



Сл. уз задатак 532

532. Израчунати меру непознатог угла α датог на слици ако су праве a и b паралелне.

533. На тесту из математике је било 20 задатака. За сваки тачно урађен задатак добија се три бода, а за неурађен или нетачно урађен одузима се један бод. Ако је Петар на тесту добио 36 бодова, колико задатака је тачно урадио?

VI разред

534. Симетрала крака AC једнакокраког троугла ABC (са врхом C) сече други крак у тачки D и праву AB у тачки E. Ако је $\angle ACB=30°$, израчунати углове троугла BED.

535. Који број треба одузети од разлике бројева $5\frac{1}{4}$ и 6,2 да би добијена разлика била мања од збира тих бројева?

536. Решити једначину $(3|x|+6)\cdot(2|x|-6)=0$.

537. Наћи просте бројеве p и q за које важи $p=q^2-1$.

538. Нека је O центар уписане кружнице у троугао ABC. Права која садржи тачку O и паралелна је са страницом AB сече странице CA и CB редом у тачкама K и L. Доказати да је $KL=AK+LB$.

VII разред

539. Израчунати $\dfrac{(-0{,}2)^8\cdot(-0{,}2)^7}{((-0{,}2)^6:(-0{,}2)^4)\cdot(-0{,}2)^{10}}$.

540. Нека је T тежиште троугла ABC са правим углом код темена C. Наћи површину и обим тог троугла ако је $CA=24\,\text{cm}$, а $BT=10\,\text{cm}$.

541. Ако се зна да су $\sqrt{5}$ и $\sqrt{3}$ ирационални бројеви, доказати да је и $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ирационалан број.

542. У правоугли троугао чије су катете 21 cm и 28 cm упиши квадрат чије су две странице на катетама и четврто теме на хипотенузи. Израчунати дужине одсечака на које теме квадрата дели хипотенузу.

543. Шта је веће: 2003^{2002} или $2002^{2002}+2002^{2001}$?

VIII разред

544. Тачке A и B су са разних страна равни π. Израчунати дужину дужи AB ако се зна да је $A'B'=3\,\text{cm}$, $AA'=1\,\text{cm}$ и $BB'=3\,\text{cm}$ где су A' и B' ортогоналне пројекције тачака A и B на раван π.

545. Једна трећина робе продата је са зарадом од 10%, једна четвртина са зарадом од 15%, а остатак са губитком од 5%. Израчунати набавну цену робе, ако је укупном продајом остварена добит од 2400 динара.

546. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Дуж која спаја центар O основе $ABCD$ са теменом A_1 сече дијагоналу коцке AC_1 у тачки P. Дужина одсечка OP је $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Колика ја површина коцке?

547. Израчунати $2^{20}-\sqrt{(1+2^{11}+2^{20})(1-2^{11}+2^{20})}$.

548. Решити једначину $\big||x+3|-3\big| = x+8$.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2003.

IV разред

549. Површина пода једне дворане је $60\,\mathrm{m}^2\,54\,\mathrm{dm}^2$. Колика је површина ходника који је 6 пута ужи и 4 пута дужи?

550. Странице два квадрата разликују се за 6 cm, а њихове површине за $96\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати обим мањег квадрата.

551. Пре 16 година Владе Дивац је био три пута старији од Милоша Вујанића. Колико година сада има Владе Дивац, а колико Милош Вујанић, ако је Владе Дивац 12 година старији од Милоша Вујанића?

552. Одредити разлику најмањег непарног четвороцифреног броја чији је збир цифара 4 и највећег парног троцифреног броја чији је производ цифара 16.

553. Сваком од троје деце мајка је дала исти број поморанџи. Када су деца појела по четири поморанџе, остало им је укупно онолико колико је добило свако дете. Колико је поморанџи добило свако дете?

V разред

554. Наћи најмањи троцифрен број чији скуп делилаца има

(а) 3 елемента, (б) 4 елемента.

555. Ако су углови α и β комплементни, α и γ суплементни и β је шест пута мањи од γ, израчунати $\alpha+\beta+\gamma$.

556. Дате су две паралелне праве. На једној од њих се налази пет, а на другој три тачке. Колико различитих троуглова одређује тих осам тачака?

557. Када је Аца потрошио 20 динара и половину суме коју је понео, остало му је 30 динара и трећина суме коју је понео. Колико новца је Аца понео?

558. Нека је са X означен скуп слова речи МАТЕМАТИКА, а са Y скуп слова речи ПОЗОРИШТЕ. Одредити скуп S ако је

$$S \subset Y,\ \ (X\cap Y)\setminus S = \emptyset \ \text{ и }\ (Y\setminus X)\cap S = \{\text{П}\}.$$

VI разред

559. Решити једначину

$$0{,}4\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{3}{5} = \left(-2\frac{1}{4}\right) : 0{,}9\,.$$

560. Права којој припада тежишна дуж која одговара краку једнакокраког троугла, дели обим тог троугла на два дела. Један је 15 cm, а други 12 cm. Израчунати дужине страница тог троугла.

561. Решити у скупу $\mathbf{Z}$ неједначину $|x-3| \leqslant 3-x$.

562. У једнакокраком троуглу ABC ($AC=BC$) чији је обим 2003 cm угао под којим се секу висине које одговарају основици и краку је 58°. Доказати да је основица већа од 667 cm.

563. На две гомиле се налазе кликери тако да се број кликера на првој гомили према броју кликера који се налазе на другој гомили односи као 4 према 3. Ако се два кликера са једне гомиле преместе на другу гомилу нови однос је 3 према 2. Колико кликера је било на свакој од гомила?

VII разред

564. Доказати да $37 \mid 333^{2003}+555^{2003}$.

565. Дат је квадрат K_1 чија је површина P_1. Конструисати квадрат K_2 са површином P_2 тако да важи $P_1 : P_2 = 4:3$.

566. Решити једначину

$$\left(2003^{89}\right)^{5x^2} = 2003^{2002}\cdot 2003^{2003}\,.$$

567. Дијагонала једнакокраког трапеза $ABCD$ ($AB \parallel CD$) дели средњу линију на одсечке од 3 cm и 4 cm. Ако је крак $\sqrt{5}$ cm, израчунати површину трапеза.

568. (а) Доказати да за сваки природан број $n \geqslant 2$ важи

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}.$$

(б) Доказати да је $\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2003}\right)^{2003} < 1.$

VIII разред

569. Решити једначину

$$(0{,}8x-0{,}5)^2+(0{,}6x-1{,}3)^2 = 4(0{,}5x-0{,}7)(0{,}5x+0{,}7)-6(0{,}15x+0{,}08).$$

570. Из гвоздене коцке ивице 20 cm треба изваљати плочу са ивицама од 80 cm и 50 cm. Колика ће бити дебљина те плоче?

571. Нека је m најмањи природан број чији је збир цифара 2003. Доказати да је $m < 6\cdot 10^{222}$.

572. Дате су три дужи које се секу тако да им се средишта поклапају (при том ниједна од дужи не садржи неку другу). Колико највише, а колико најмање правих је одређено крајевима те три дужи?

573. Доказати да $31 \mid 1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{2003}$.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2003.

IV разред

574. Звездице заменити одговарајућим цифрама:

$$\begin{array}{r} 4*3\cdot 2* \\ \hline *83 \\ *** \\ \hline ***** \end{array}$$

575. Странице правоугаоника $ABCD$ су 10 cm и 4 cm. Тачка E припада страници AB, а тачка F страници CD. Обим правоугаоника $AEFD$ је 12 cm. Израчунати површину правоугаоника $EBCF$.

576. Павле је за један посао требало да добије 1300 динара и улазницу за утакмицу. Међутим он је урадио само трећину посла и за то добио 300 динара и улазницу за утакмицу. Колико динара вреди улазница за утакмицу?

577. Из једног лонца у коме се налази 20 литара воде Марко би требало у други, исти такав лонац да одлије 5 литара воде. Како ће то он да уради ако има два празна суда запремине 3 и 7 литара?

578. Којом цифром се завршава производ

$$\underbrace{8\cdot 8\cdot 8\cdot\ldots\cdot 8}_{2003}$$

(производ 2003 осмице)?

V разред

579. Израчунати разлику највећег и најмањег од правих разломака чији бројиоци и имениоци узимају вредности из скупа $\{2,3,5,8\}$.

580. Звездице заменити одговарајућим цифрама:

$$\begin{array}{l} 15***:*6=4** \\ \underline{***} \\ \;104 \\ \;\;\underline{*2} \\ \;\;3** \\ \;\;\underline{***} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

581. Углови α и β имају паралелне краке. Ако је $\alpha = 2003'$ колика је разлика $2\beta - \alpha$?

582. Петар има папир облика правоугаоника чије су странице 27 cm и 72 cm. Колика је ивица највеће коцке која се може обложити тим папиром (дозвољена су сва сечења)?

583. Дат је скуп $S = \{1,2,3,\ldots,99\}$. Одредити скупове A и B такве да је $A\cup B = S$, $A\cap B = \emptyset$ и да је збир бројева који припадају скупу A једнак збиру бројева који припадају скупу B.

VI разред

584. Одредити пресек и унију скупова целих бројева чији су елементи решења неједначина

$$-8\frac{1}{4} < 3x < 5\frac{2}{5} \quad\text{и}\quad -8\frac{1}{4} < -3x < 5\frac{2}{5}.$$

585. Збир 2003 узастопна цела броја је 2003. Наћи те бројеве.

586. У троуглу ABC симетрала странице AB, висина из темена A и симетрала унутрашњег угла у темену B секу се у једној тачки. Наћи $\measuredangle ABC$.

587. У пољима квадрата 3×3 Јован уписује бројеве $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$. Може ли их уписати тако да сви збирови по хоризонталама (3), вертикалама (3) и дијагоналама (2) буду међусобно различити? Одговор детаљно образложити.

588. Конструисати троугао ако је познато да је његов обим 10 cm и углови $\alpha = 60°$ и $\beta = 45°$. Објаснити конструкцију.

VII разред

589. Колико страница има правилни многоугао ако се у њему могу повући 252 дијагонале?

590. Дат је правоугли троугао са катетама дужина 6 cm и 8 cm. У круг који је уписан у тај троугао, уписан је квадрат. Израчунати површину тако добијеног квадрата.

591. Ако су a, b, c и $\dfrac{a-b\sqrt{2003}}{b-c\sqrt{2003}}$ рационални бројеви, доказати да је тада $ac = b^2$.

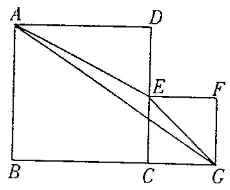
592. Колико има петоцифрених бројева код којих је производ цифара паран?

593. Ако је број облика 2^k најмање четвороцифрен, доказати да не може имати једнаке четири последње цифре.

VIII разред

594. Ако је већи дијагонални пресек правилне шестостране призме квадрат, а мања дијагонала основе има дужину 10 cm, наћи запремину те призме.

595. Доказати да је $2003^{2003} - 2003$ дељиво са три.



Сл. уз задатак 815

596. Дати су квадрати $ABCD$ и $CGFE$ (видети слику). Одредити површину троугла AGE ако је $EF = 10\,\text{cm}$.

597. На колико начина се у квадратиће могу распоредити бројеви $1, 2, 3, 4$ и 5

$$\square > \square > \square < \square > \square$$

(сваки број у један квадратић) тако да буду задовољене све неједнакости? Исписати сва решења.

598. Исписан је низ од 2003 цифре. Познато је да је сваки двоцифрен број који сачињавају две цифре у низу (тим редом којим су написане) дељив са 17 или са 23. Ако је последња цифра у низу 1, која је прва?

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2003.

VI разред

599. Ако је

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \overline{abcabc},$$

где је $n \in \mathbb{N}$, а a, b и c су међусобно различите цифре, одредити бар једно n и $\overline{abc}$.

600. Дат је паралелограм $ABCD$ и права p која са паралелограмом има само једну заједничку тачку, и то теме D. Нека су A', B' и C' подножја нормала из тачака A, B и C на праву p. Доказати да је $AA' + CC' = BB'$.

601. Нека је збир цифара броја n једнак 2003. Ако ниједна његова цифра није 0, одредити

(а) најмањи; (б) највећи

број n дељив са 4.

602. У паралелограму $ABCD$ је страница AB једнака његовој дијагонали BD. Доказати да је $2\,AC > 3\,AD$.

603. Пет ученика, A, B, C, D и E, учествовали су на окружном такмичењу из математике на ком је било могуће освојити највише 100 поена. Сваки од 5 ученика је освојило различит број поена и сваки од њих је имао више од 91 поен. Ако су A, B и C заједно освојили 285, а B, C и D заједно 282 поена и ако се зна да је A освојио највише поена, а E имао трећи резултат са 96 поена, колико поена је освојио ученик D? Какав је поредак био на крају такмичења?

VII разред

604. Одредити три последње цифре броја $n = 2^{2008} - 2^{2006} + 2^{2003}$.

605. Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез ($AB \parallel CD$). Нека је O центар описаног круга око тог трапеза, а E пресек његових дијагонала. Доказати да је $\measuredangle AOD = \measuredangle AED$.

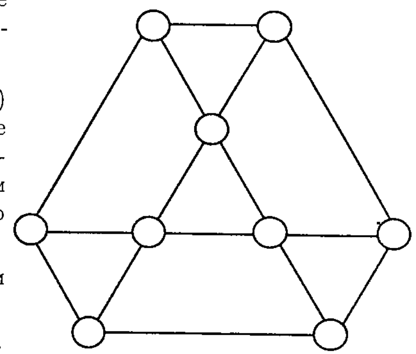
606. Одредити све реалне бројеве r такве да су бројеви $r + \sqrt{3}$ и $\dfrac{1}{r} - \sqrt{3}$ цели.

607. Дат је четвороугао $ABCD$. Дуж која спаја средиште M странице AB и средиште N странице CD подељена је дијагоналом AC на два једнака дела. Доказати да је $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ADC}$.

608. У празне кругове (видети слику) уписани су бројеви од 1 до 9, тако да је у сваком кругу по један број и да су збирови бројева у теменима сваког од седам једнакостраничних троуглова међусобно једнаки.

(а) Доказати да је збир бројева у сваком од тих троуглова једнак 15.

(б) Одредити једно од могућих решења.



Сл. уз задатак 608

VIII разред

609. Доказати да је $2003^2 + 2^{2003}$ сложен број.

610. Углови троугла ABC задовољавају једнакост $3\alpha + 2\beta = 180°$. Доказати да је $a^2 + bc = c^2$.

611. Ако се зна да је $\dfrac{x^2 + 2003}{x + 2003}$ цео број, колико различитих целобројних вредности, у том случају, може узети број x?

612. У правилној четвоространој пирамиди, чија је ивица основе дужине $10\,\text{cm}$, угао бочне стране према равни основе је $60°$. Раван α садржи једну ивицу основе и нормална је на супротну бочну страну. Одредити површину пресека равни α и пирамиде.

613. Бројеви $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2^2}, \dots, \dfrac{1}{2^{100}}$ разбијени су у пет група по 20 бројева. Производ бројева бар једне групе мањи је од $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1000}$. Доказати.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2003.

VI разред

614. Доказати да је број

$$1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + 4^{2003} + 5^{2003} + 6^{2003} + 9^{2003}$$

дељив са 10.

615. Доказати да је збир дужна тежшних дужи произвољног троугла ABC већи од полуобима, а мањи од обима тог троугла.

616. Нека је ABC једнакокраки троугао ($AC = BC$), тачка O центар описане кружнице око троугла, а S центар кружнице која додирује основицу AB и продужетке кракова. Ако су тачке O и S симетричне у односу на праву AB, израчунати унутрашње углове троугла ABC.

617. У колико сати између 12 h и 13 h права која пролази кроз подеоке за 6 h и 12 h на бројчанику часовника представља симетралу угла који образују казаљке тог часовника?

618. У свакој клупи у једном разреду седе највише два ученика. Познато је да $\frac{2}{3}$ укупног броја дечака седи у клупама са $\frac{3}{5}$ укупног броја девојчица. Који део ученика седи у пару дечак-девојчица?

VII разред

619. Ако је a позитиван рационалан број који је различит од 1, доказати да $a + \frac{1}{a}$ није цео број.

620. Нека је ABC једнакокраки троугао са правим углом код темена C. Тачка D припада катети AC, тачка G припада катети BC, а тачке E и F су редом подножја нормала из D и G на хипотенузу AB. Ако је $AC = 1$ и ако се површине троугла BGF, петоугла $CDEFG$ и троугла ADE односе као $2 : 2 : 1$, израчунати обим петоугла $CDEFG$.

621. Ако су a, b, m, n природни бројеви, такви да је

$$a + 2003b = m^2, \qquad b + 2003a = n^2,$$

доказати да су бројеви a и b дељиви са 3.

622. На табли су записани сви природни бројеви од 1 до 1000. Два играча A и B наизменично бришу по један број, а почиње играч A. Игра се завршава када на табли остану два броја. Ако је збир та два броја дељив са три, победник је A, а ако њихов збир није дељив са три, победник је B. Доказати да играч B има победничку стратегију.

623. Дат је правилан шестоугао $ABCDEF$ и произвољна тачка P унутар тог шестоугла. Доказати да је збир површина троуглова PAB, PCD и PEF једнак збиру површина троуглова PBC, PDE и PFA.

VIII разред

624. Ако су a, b, c дужине страница троугла, доказати да је

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqslant abc.$$

625. Кружница k која је уписана у оштар угао додирује краке тог угла у тачкама M и N. Нека је P произвољна тачка већег лука MN кружнице k, тачка A подножје нормале из P на MN, а B и C подножја нормала из P на краке тог угла. Доказати да је $PA^2 = PB \cdot PC$.

626. Одредити угао између дијагоналних пресека DBB_1D_1 и DAB_1C_1 коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ који садрже дијагоналу DB_1.

627. Дата су тврђења:

(a) број $x + 1$ је дељив са y;
(b) $x = 2y + 5$;
(c) број $x + y$ је дељив са 3;
(d) $x + 7y$ је прост број.

Одредити све парове природних бројева (x, y) за које су тачно три од датих тврђења истинита, а једно лажно.

628. Одредити све природне бројеве n мање од 2003, за које је могуће исећи правоугаоник $2003 \times n$ на траке, тако да никоје две немају исту дужину. Под траком дужине k подразумевамо правоугаоник $1 \times k$, где је k природан број.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 7. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

629. Дато је 11 различитих природних бројева. Доказати да међу њима постоји 6 бројева чији је збир дељив са 6.

630. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ивице a. Одредити површину пресека те коцке са равни која садржи теме D_1 и средишта N и P ивица AB и BC.

631. Дванаестоугао је уписан у кружницу. Шест страница тог дванаестоугла има дужину $\sqrt{3}$, а осталих шест страница има дужину 4. Израчунати површину дванаестоугла.

632. Нека је $A = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2002$ и $B = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2001$. Доказати да је број $A + B$ дељив са 2003.

СЕДМА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Кушадаси (Турска), 2003.

633. Нека је n позитиван цео број. Број A се састоји од $2n$ цифара и свака од њих је 4, број B се састоји од n цифара и свака од њих је 8. Доказати да је $A+2B+4$ потпун квадрат.

634. Нека је у равни дато n тачака тако да никоје три од њих нису колинеарне и са следећом особином: Ако на било који начин означимо те тачке са $A_1, A_2, \ldots, A_n$, изломљена линија $A_1A_2\ldots A_n$ не пресеца саму себе.
Наћи највећу вредност коју n може да има.

635. Нека је k описана кружница око троугла ABC. Уочимо лукове $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ тако да $C \notin \overset{\frown}{AB}$, $A \notin \overset{\frown}{BC}$, $B \notin \overset{\frown}{CA}$. Нека су D, E, F средишта лукова $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{AB}$, респективно. Нека су G и H тачке пресека DE са CB и CA, а I и J тачке пресека DF са BC и BA, респективно. Означимо средишта дужи GH и IJ са M и N, респективно.
(а) Изразити углове троугла DMN у зависности од углова троугла ABC.
(б) Ако је O центар описане кружнице око троугла DMN и P пресечна тачка дужи AD и EF, доказати да O, P, M и N припадају истој кружници.

636. Нека су x, y, z реални бројеви већи од -1. Доказати да је

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2} \geqslant 2.$$

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

IV разред

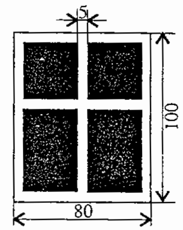
637. Сабери највећи петоцифрени број написан различитим цифрама и најмањи шестоцифрен број написан различитим цифрама.

638. Умањилац је 2004, а разлика је пет пута већа од умањиоца. Колики је умањеник?

639. Ако се дужина правоугаоника повећа за 4 cm, а ширина за 6 cm добија се квадрат површине 81 cm^2. Колики је обим правоугаоника?

640. Марија се играла на рачунару тако што је откуцала један иза другог природне бројеве 123456789101112.... Ако је Марија откуцала укупно 219 цифара, колико пута је откуцала цифру 1?

641. Наћи укупну површину стаклених делова на једном крилу прозора (шрафирани део – видети слику) ако су сви његови дрвени делови ширине 5 cm, док је укупна ширина прозора 80 cm, а његова висина 100 cm.



Сл. уз задатак 641

V разред

642. Нацртај кружне линије $k_1(O_1, 2\,\mathrm{cm})$ и $k_2(O_2, 3\,\mathrm{cm})$ ако је $O_1O_2 = 6\,\mathrm{cm}$. Одредити тачке $A \in k_1$ и $B \in k_2$ тако да је дуж AB:

(а) најкраћа (б) најдужа.

Колика је тада дужина дужи AB?

643. Одредити све двоцифрене бројеве који при дељењу са 21 дају остатак 10.

644. Израчунај меру угла који је за $2004'$ већи од њему комплементног угла.

645. Одредити све четвороцифрене бројеве мање од 3000 такве да им је производ цифара 105.

646. Одредити све скупове X који задовољавају услове:

$$X \subset \{a,b,c,d,e\} \quad \text{и} \quad X \cap \{a,c,d\} = \{a,d\}.$$

VI разред

647. Збир 10 узастопних целих бројева је -5. Који су то бројеви?

648. У $\triangle ABC$ повучене су симетрале углова $\measuredangle BAC$ и $\measuredangle ABC$. Под којим углом се секу те две симетрале ако се зна да је $\measuredangle BAC = 2004'$, а $\measuredangle ABC = 86°$?

649. За које вредности променљиве је израз $-7(-2-3x)$ већи од количника бројева -49 и 7?

650. Наћи збир целобројних решења неједначине $|x+5| \leqslant 7$.

651. У троуглу ABC угао β је већи од угла γ за $20°$, а мањи од угла α за $20°$. Симетрала угла α сече страницу BC у тачки D. шта је веће BD или CD?

VII разред

652. Делтоид чине два једнакокрака троугла са основицом 40 cm и крацима од 25 cm, односно 52 cm. Израчунати површину делтоида.

653. Да ли је број $0,2323323332\ldots$ (број тројки се стално повећава за 1) рационалан? Објаснити.

654. Доказати да је $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 3$.

655. Израчунати: $a = \dfrac{3\sqrt{501}+\sqrt{3}\sqrt{668}-3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}}$.

656. За дати једнакостранични троугао конструисати квадрат такав да му је површина $\sqrt{3}$ пута већа од површине датог троугла.

VIII разред

657. За које вредности променљиве p израз $\dfrac{2p-\frac{3}{4}}{1-\frac{p}{2}}$ има вредност мању од 1?

658. Површина највећег дијагоналног пресека правилне шестостране призме је квадрат површине $64\,cm^2$. Наћи запремину те призме.

659. Збир два броја је 135. Ако 35% једног броја износи колико и 28% другог броја, који су то бројеви?

660. Израчунати $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

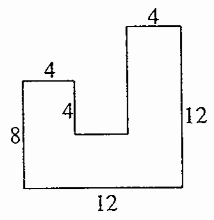
661. Израчунати површину круга описаног око правоуглог троугла чије су две странице 2 cm и $\sqrt{5}$ cm.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

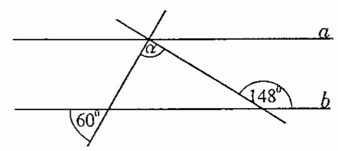
IV разред

662. Израчунати $4008-2004:6+6\cdot 2004$.

663. Наћи обим и површину фигуре на слици.



Сл. уз задатак 663



Сл. уз задатак 668

664. Хокејашки тим састоји се од 6 играча на леду и 9 резерви на клупи. Сваки од 15 играча провео је исто време у игри на леду (замене су неограничене). Колико је времена сваки играч провео на леду ако меч траје 30 минута?

665. Ако се сва поља шаховске табле (8×8 квадрата) поређају једно поред другог, добије се правоугаоник обима 260 cm. Израчунати површину шаховске табле.

666. За неки природан број ћемо рећи да је „занимљив“ ако је записан међусобно различитим цифрама чији је збир једнак 45. Наћи збир највећег и најмањег „занимљивог“ броја.

V разред

667. Наћи све разломке са бројиоцем 8 и имениоцем из скупа природних бројева који су већи од $\frac{2}{5}$ и мањи од $\frac{4}{5}$.

668. Наћи угао α ако су позната два означена угла (видети слику) и ако се зна да су праве a и b паралелне.

669. Колико има четвороцифрених природних бројева записаних само цифрама 2, 3, 5 и 8 (цифре не могу да се понављају) који су дељиви са 12?

670. Збир углова упоредних углу α је 8 пута већи од угла α. Одредити меру угла комплементног углу α.

671. Шта је веће, $\dfrac{3*5*}{36}$ или $\dfrac{5*3*}{45}$, ако уместо звездица могу да стоје било које цифре?

VI разред

672. Решити неједначину $|x|+1\frac{1}{4} > 4{,}5$.

673. Нека је AB тетива кружне линије $k(O,r)$ и C тачка која припада тој тетиви, таква да је $OC \perp AB$. Доказати да је $AC = BC$.

674. Ако различитим словима одговарају различите цифре, решити ребус

$$\begin{array}{r} \text{ЂАК} \\ +\text{БЛОК} \\ \hline \text{КЊИГА} \end{array}$$

675. У троуглу ABC је $\measuredangle CAB = 45°$ и $\measuredangle ABC = 60°$. Наћи углове троугла AOS, где је O центар уписане кружнице троугла ABC, а S пресек симетрале $\measuredangle ACB$ и спољашњег угла код темена A.

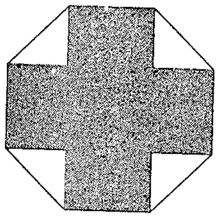
−10		−7
	−2	

676. Попунити празна поља таблице тако да збирови бројева у свим врстама, колонама и дијагоналама буду једнаки.

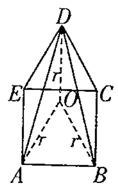
VII разред

677. Израчунати $\sqrt{(-4)^2} + (2^2)^2 \cdot \dfrac{5^{-8+2\cdot 7}}{\left(\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{(-5)^2}}}\right)^3}$.

678. Израчунати површину осенченог дела правилног осмоугла странице 2 cm.



Сл. уз задатак 678



Сл. уз задатак 685

679. Записати у облику разломка број $2,32004200420042004\ldots$.

680. Израчунати површину трапеза чије су основице дужина $a = 25\,\text{cm}$, $b = 15\,\text{cm}$ и краци $c = 6\,\text{cm}$ и $d = 8\,\text{cm}$.

681. Шта је веће, $5 \cdot 3^{61}$ или $3 \cdot 5^{41}$?

VIII разред

682. Именилац датог разломка је за два већи од бројиоца. Одредити тај разломак, ако се зна да када се и од бројиоца и од имениоца одузме 1 добије се разломак $\frac{1}{2}$.

683. Нека је $ABCDA_1B_1C_1D_1$ правилна четворострана призма основне ивице 12 cm и висине 8 cm. Израчунати површину пресека $ACMN$ где су M и N средишта ивица B_1C_1 и A_1B_1 редом.

684. Ако је $a(b+c) = bc\left(\dfrac{a}{2004} - 1\right)$, где су $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, израчунати $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

685. Петоугао $ABCDE$ је добијен „састављањем“ квадрата и једнакостраничног троугла (видети слику). Наћи полупречник описане кружнице око троугла ABD ако је страница тог петоугла дужине a.

686. Наћи све просте бројеве p за које је

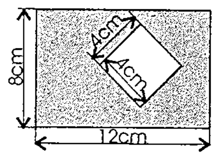
$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{p+1}}$$

природан број.

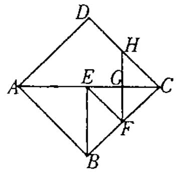
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

IV разред

687. Израчунати обим и површину осенчене фигуре на слици (према датим подацима).



Сл. уз задатак 687

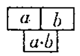


Сл. уз задатак 690

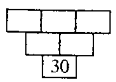
688. Збир два броја је 8016. О којим бројевима је реч ако се зна да је један од њих једнак трећини другог?

689. Ако различитим словима одговарају различите, а истим исте цифре, решити ребус $A + AA + BAA + BAA = 2004$.

690. Навести све троуглове који се виде на слици.



Сл. уз задатак 691а



Сл. уз задатак 691б

691. Ако се табела попуњава као на слици а), уписати у празна поља на слици б) одговарајуће бројеве. Наћи сва решења.

V разред

692. Разлика два угла са паралелним крацима једнака је половини мањег. Израчунати меру угла комплементног мањем углу.

693. Наћи најмањи и највећи троцифрен природан број који при дељењу са 16 има количник исти као и остатак.

694. Ученик је у прва четири разреда порастао 17 cm. Сваке године је порастао природан број центиметара и сваке године више него претходне. У четвртом разреду је порастао три пута више него у првом. Колико је порастао у трећем разреду?

695. Нека су a и b паралелне праве. Нека тачке A, B, C припадају правој a и нека тачке K, L, M припадају правој b. Колико четвороуглова је одређено овим тачкама?

696. У двоцифреном броју прецртана је једна цифра и добијен је број који је 16 пута мањи од првобитног. Одредити све такве двоцифрене бројеве и у сваком од њих цифру коју треба прецртати.

VI разред

697. На стоваришту је било 304 тона робе. Најпре је однето $\frac{3}{8}$ робе, а затим $\frac{4}{5}$ преостале робе. Колико је тона робе остало на том стоваришту?

698. Дат је правоугоник $ABCD$ $(AB = 2BC = a)$. Кружна линија са центром у тачки C и полупречником дужине a сече страницу AB у тачки M. Израчунати $\measuredangle CDM$.

699. Написати разломак $\frac{17}{2004}$ у облику збира два позитивна разломка са троцифреним имениоцима.

700. Конструисати троугао ABC ако је дата страница $AB = 4\,\text{cm}$, тежишна дуж $BB_1 = 5\,\text{cm}$ и $\measuredangle ABC = 60°$.

701. Ако истим словима одговарају исте, а различитим различите цифре, решити ребус

$$\text{М} : \text{А} = \text{Т} - \text{Е} = \text{М} \cdot \text{А} = \text{Т} : \text{И} = \text{К} - \text{А}.$$

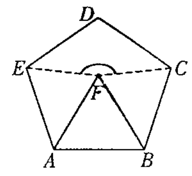
VII разред

702. Ако је $a + \frac{1}{a}$ цео број већи од 2, доказати да је $a^3 + \frac{1}{a^3}$ сложен број.

703. У правилан петоугао $ABCDE$ уцртан је једнакостранични троугао ABF као на слици. Израчунати угао EFC означен на слици.

704. Доказати да у запису броја 2^{2004} постоји цифра која се појављује бар 61 пут.

705. У једнакокраком трапезу, са краком дужине 5 cm, једна основица је два пута дужа од друге. Ако је један унутрашњи угао трапеза 75°, израчунати његову површину.



Сл. уз задатак 703

706. Колико има бројева већих од 500 и мањих од 10000 код којих никоје две суседне цифре нису једнаке?

VIII разред

707. Колико је лима потребно за израду једног шупљег тела које чине омотачи две праве четворостране пирамиде са заједничком основом? Основа има облик правоугаоника са страницама 8 dm и 6 dm, а висине ових пирамида су по 12 dm.

708. Доказати да не постоје позитивни реални бројеви a, b и c, такви да је $a + \frac{1}{b} < 2$, $b + \frac{1}{c} < 2$ и $c + \frac{1}{a} < 2$.

709. У троуглу ABC конструисане су висине AA' и CC'. Ако је H ортоцентар, $AH = HA'$ и $CH : HC' = 2 : 1$,

(а) одредити $\measuredangle ABC$; (б) доказати да је $AB : CC' = 4 : 3$.

710. У једном граду спроведена је анкета у којој је учествовало 20040 ученика који уче или енглески или немачки језик (тачно један од њих). Од ученика који уче енглески језик, из непознатих разлога, 20% је изјавило је да учи немачки и, слично, 20% ученика који уче немачки у анкети је изјавило да учи енглески. По овој анкети 40% ученика у овом граду је изјавило да учи немачки језик. Колико ученика у овом граду учи енглески језик?

711. M и K су тачке на страницама AB и CD, редом, паралелограма $ABCD$, такве да је $AM = CK$, а P је произвољна тачка на страници AD. Нека је $\{E\} = MK \cap PB$ и $\{F\} = MK \cap PC$. Доказати да је:

(а) $P_{\triangle EPF} = P_{\triangle BME} + P_{\triangle CFK}$; (б) $P_{BCFE} = P_{APEM} + P_{PDKF}$.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

VI разред

712. Сваки пут када погреши при изради домаћег задатка, Милан истргне један лист из свеске. Тако му се десило да из једне свеске истргне 25% листова, а из друге, исте такве свеске, сваки девети лист. Колико је било првобитно у свакој свесци и за колико процената се смањио укупан број листова (у обе свеске заједно) ако је Милан истргао укупно 26 листова?

713. У четвороуглу $ABCD$ углови ABC и ADC су прави. Нека су M и N тачке на страницама BC и DC (редом) такве да је $BM = DN$ и $\angle BAM = \angle DAN$. Доказати да се дијагонале AC и BD тог четвороугла секу под правим углом.

714. Нека је x троцифрен број чије су све цифре међусобно различите и различите од нуле. Збир свих троцифрених бројева који имају цифре исте као и број x је три пута већи од троцифреног броја чије су све цифре једнаке цифри стотина броја x. Одредити број x.

715. Нека је тежишна дуж AA_1 троугла ABC нормална на симетрали угла ABC тог троугла. Дужине страница $\triangle ABC$ су узастопни природни бројеви мерних јединица, рецимо центиметара. Колике су те дужине страница троугла ABC?

716. На табли су написани бројеви $1, 2, 3, 4, \ldots, 221, 222$. Дозвољено је у једном кораку било која два броја увећати за по 1. Да ли се, после извесног броја корака, могу добити сви једнаки бројеви? Одговор детаљно образложити.

VII разред

717. Између сваке две цифре броја 121 уписано је по 2004 нуле. Наћи квадратни корен тако добијеног броја.

718. Површина правоугаоника $ABCD$ је $2004\,\mathrm{cm}^2$. У троугао ABD уписана је кружна линија са центром у тачки O. Ако уочимо тачку $P \in BC$ и $Q \in CD$ тако да је $OP \parallel CD$ и $OQ \parallel BC$, израчунати површину правоугаоника $OPCQ$.

719. Одредити најмањи природан број n који је истовремено збир 7 узастопних природних бројева, збир 11 узастопних природних бројева, збир 13 узастопних природних бројева и није збир два узастопна природна броја.

720. Кружна линија полупречника 10 cm додирује две суседне странице квадрата, а крајње тачке једног пречника припадају другим двема страницама квадрата. Израчунати површину квадрата.

721. Дате су 2004 јединице. Бранко и Ратко играју игру тако што наизменично (један симбол ставља Бранко, па онда Ратко) између јединица редом стављају симболе + и ·, при чему први игра Бранко.

(а) Може ли Бранко да победи ако се игра састоји у томе да вредност израза који се добија треба да буде паран број?

(б) Може ли Ратко да победи ако се игра састоји у томе да вредност израза који се добија треба да буде непаран број?

Подразумева се да оба играча играју без грешке, тј. примењују оптималну стратегију.

VIII разред

722. Воја је решио да у свом воћњаку засади 270 садница. Сваког дана је садио онај број садница који се добија када израчуна збир цифара броја који је збир

броја садница које је засадио претходног дана и његовог збира цифара. Зна се да је првог дана засадио једну садницу. Колико му је дана требало да засади све саднице? Детално образложити решење.

723. На страницама BC и CD правоугаоника $ABCD$ уочене су редом тачке M и N тако да је $BM = 2MC$ и $CN = 2ND$. Наћи однос страница тог правоугаоника $ABCD$, ако се зна да је троугао AMN правоугли са хипотенузом AM.

724. Неки број се повећа за 45 ако му цифре јединица и десетица замене места, а исти број се смањи за 270 ако цифре стотина и десетица замене места. шта ће се догодити са тим бројем ако цифре стотина и јединица замене места?

725. Наћи најмањи природан број који је 2004 пута већи од збира својих цифара.

726. Нека су M и N тачке на ивицама $A'B'$ и $A'D'$ коцке $ABCDA'B'C'D'$ тако да је $A'M + A'N = AB$. Доказати да је $\angle A'AM + \angle A'AN + \angle MAN = 90°$.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2004.

VI разред

727. Одредити све троцифрене бројеве који имају тачно 5 делилаца (укључујући јединицу и сам број).

728. У једнакокраком троуглу ABC је $\angle ABC = \angle BAC = 40°$. Симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D. Доказати да је $AD + DC = AB$.

729. Дат је квадрат $ABCD$. Тачка E припада страници AD, тачка F припада страници DC, при чему је $DE = DF$. Ако је G подножје нормале из D на EC, доказати да је $\angle BGF = 90°$.

730. Дат је једнакостранични троугао ABC странице $AB = 12\,\mathrm{cm}$. Нека је M тачка на страници AC, тачка P подножје нормале из M на AB, тачка Q подножје нормале из P на BC и тачка R подножје нормале из Q на AC. Израчунати растојање AM ако се тачка R поклапа са M.

731. Дато је пет природних бројева, Израчунати су сви збирови по два од датих бројева. Да ли добијени збирови могу бити 10 узастопних природних бројева?

VII разред

732. Дат је троугао ABC површине 2004. Нека су M и N, редом, тачке на страницама AB и BC, такве да је $AM : MB = 1 : 3$ и $BN : NC = 2 : 1$. Ако се праве AN и CM секу у тачки S, израчунати површину четвороугла $MBNS$.

733. Ако је $abc = 1$, доказати да је

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(c+\frac{1}{c}\right)^2-4.$$

734. На путу је колона аутобуса. Аутобус сматрамо препуним ако је у њему више од 50 путника. Контролори Воја и Раде зауставили су колону. Воја је одредио проценат препуних аутобуса, а Раде проценат свих путника у препуним аутобусима у односу на укупан број путника. Чији је проценат већи?

735. Дат је правоугаоник $ABCD$ код кога је $AB = 2BC$. Кружница k са центром A и полупречником AD сече дијагоналу BD у тачки M. Израчунати угао BMC.

736. Правоугаоник 2×2005 подељен је на 4010 подударних квадрата странице 1. На колико начина се од њих могу изабрати 2004 квадрата тако да међу њима нема суседних? (Два квадрата су суседна ако имају заједничку страницу.)

VIII разред

737. У равни су дате 2004 тачке. Неки парови тачака су спојени дужима. Доказати да постоје две тачке из којих полази једнак број дужи.

738. Основна ивица правилне тростране призме $ABCA_1B_1C_1$ је $AB = a$, а висина је $CC_1 = a\sqrt{2}$. Нека је α раван одређена тачкама A, C_1 и средиштем ивице BB_1, а β раван одређена тачкама C, B_1 и средиштем ивице AB. Одредити дужину дужи која припада пресеку равни α и β и налази се унутар призме.

739. Доказати да једначина $x^2 + y^3 = z^2$ има бесконачно много решења у скупу природних бројева.

740. Нека је M тачка унутар квадрата $ABCD$, таква да је $\angle MDC = \angle MBD = 20°$. Израчунати угао MAB.

741. Дати су реални бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2004}$, такви да важи

$$a_1a_{2004} = a_2a_{2003} = \cdots = a_{1002}a_{1003} = 1.$$

Доказати да је $\dfrac{1}{1+a_1^{2004}} + \dfrac{1}{1+a_2^{2004}} + \cdots + \dfrac{1}{1+a_{2004}^{2004}} = 1002.$

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 8. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

742. У изразу $2004^2 * 2003^2 * \cdots * 2^2 * 1^2$ сваку звездицу заменити знаком $+$ или $-$ тако да вредност израза буде прост број.

743. Да ли постоји деветоцифрени природан број чије су све цифре међусобно различите и различите од нуле, који је дељив са 5 и потпун је квадрат?

744. Дат је лењир на коме су обележене две тачке. Користећи само овај лењир конструисати произвољну нормалу на дату праву.

745. Ако је разлика кубова два узастопна природна броја једнака n^2, доказати да је број n једнак збиру квадрата два узастопна природна броја.

ОСМА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Нови Сад, 2004.

746. Доказати да неједнакост

$$\frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

важи за све реалне бројеве x и y, који нису оба једнаки нули.

747. Нека је ABC једнакокраки троугао, $AC = BC$, нека је M средиште дужи AC и нека је l права која пролази кроз тачку C а ортогонална је на AB. Кружница кроз B, C и M сече l у тачкама C и Q. Изразити полупречник круга описаног око троугла ABC преко $m = CQ$.

748. Ако су природни бројеви x и y такви да су бројеви $3x+4y$ и $4x+3y$ потпуни квадрати, доказати да су и x и y дељиви са 7.

749. Дат је конвексан полигон са n темена, $n \geqslant 4$. Разложимо на произвољан начин тај полигон на троуглове чија су темена истовремено и темена полигона, тако да никоја два од тих троуглова немају заједничких унутрашњих тачака. Обојимо у црно троуглове који имају две странице које су такође странице полигона, у црвено троуглове чија је само једна страница истовремено и страница полигона, а у бело оне троуглове који немају заједничких страница са полигоном. Доказати да је број црних троуглова за два већи од броја белих.

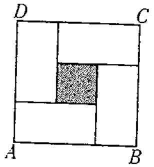
ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

IV разред

750. Напиши разлику производа $4050 \cdot 6$ и количника $5004 : 6$, и одреди њену вредност.

751. У скупу $\mathbf{N}_0$ одреди решења неједначине $2524 - x > 2425$.

752. Бранко, Воја и Драган имају 36 ораха. Када је Бранко дао Воји 6 ораха, а Воја Драгану 4 ораха, сваки од њих је имао исти број ораха. Колико је ораха имао сваки од њих на почетку?



Сл. уз задатак 753

753. На слици је дат квадрат $ABCD$, подељен на четири правоугаоника и један мали квадрат. Обим сваког од правоугаоника је 90 mm. Ако је дужина сваког од тих правоугаоника два пута већа од ширине, нађи колико је пута обим квадрата $ABCD$ већи од обима осенченог квадрата.

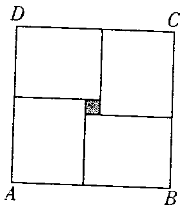
754. Колико има непарних четвороцифрених бројева који су дељиви са 5?

V разред

755. Одредити скуп свих троцифрених бројева дељивих са 9 чије цифре припадају скупу $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ и могу се понављати.

756. Израчунај меру угла који је за $2005'$ већи од њему суплементног угла.

757. Од 18 белих ружа, 45 жутих ружа и 72 црвене руже направљен је највећи могући број букета са истим бројем ружа истих боја (све руже морају бити употребљене). Ако је цена једне беле руже 10, жуте 15, а црвене 20 динара, одреди највећи могући број букета и израчунај колико ће да кошта један такав букет.



Сл. уз задатак 758

758. Квадрат $ABCD$ подељен је на четири правоугаоника и један мали квадрат (види слику). Сви правоугаоници имају једнаке одговарајуће странице, а површина сваког од тих правоугаоника је $506\,\mathrm{cm}^2$. Ако су дужине страница сваког од правоугаоника узастопни природни бројеви, колико пута је површина квадрата $ABCD$ већа од површине осенченог квадрата?

759. Дат је скуп $S = \{1, 2, 3, \ldots, 2005\}$. Постоје ли скупови A и B такви да је $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = S$ и збир бројева из скупа A једнак је збиру бројева из скупа B? Образложи одговор.

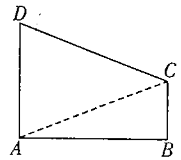
VI разред

760. Одреди углове троугла ако су збир и разлика два спољашња угла једнаки $\alpha_1 + \beta_1 = 220°$, $\alpha_1 - \beta_1 = 16°$.

761. Тачке A, B и права p се налазе у једној равни и тачке A и B су са исте стране праве p. Одредити на правој p тачку M за коју је збир растојања од тачака A и B најмањи.

762. Израчунај збир свих целобројних решења неједначине $|x - 1| < 2005$.

763. На слици је дат четвороугао (правоугли трапез) тако да је $\measuredangle BAD = \measuredangle ABC = 90°$ и $AD = 2BC$. Доказати да је $AC = CD$.



Сл. уз задатак 763

764. Одреди целе бројеве a, b и c који задовољавају услове $a < b < c$, $abc = 308$ и $ac = -28$.

VII разред

765. Ако је $a = 5$ и $b = -0{,}2$, израчунај $a^{2004} \cdot b^{2006}$.

766. У правоуглом троуглу ABC је $\measuredangle ACB = 90°$, $b = 3\,\mathrm{cm}$ и $t_b = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Нађи површину и обим троугла ABC.

767. Нацртај квадрат $ABCD$ странице a. Конструиши квадрат $A_1B_1C_1D_1$ такав да је $P_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{5}{4}P_{ABCD}$.

768. У једнакокраком троуглу ABC ($AC = BC$) је $\alpha + \gamma = 118°$. Шта је веће, висина која одговара краку или висина која одговара основици?

769. Постоје ли узастопни природни бројеви a, b и c такви да је $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{53}{60}$?

VIII разред

770. Ако се свака ивица коцке повећа за 20%, за колико ће се процената повећати површина те коцке?

771. Збир два броја је 2005. Ако 17% једног броја износи колико 68% другог броја, који су то бројеви?

772. Нека су α и β две паралелне равни, међусобно удаљене 12 cm. У равни α дате су тачке A и C, а у равни β тачке B и D. Одреди угао који права, одређена тачкама C и D, гради са равни α, ако права одређена тачкама A и B гради са равни α угао од $30°$ и $AB + CD = 48\,\mathrm{cm}$.

773. Колико се највише различитих природних бројева може сабрати да се добије збир 2005?

774. На колико различитих начина три друга могу поделити **7** кликера? Узети у обзир и могућност да неки од другова може добити све кликере.

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

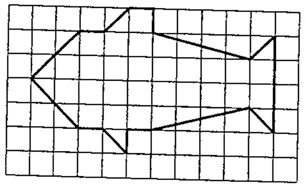
IV разред

775. Ученик је замислио један број. Прво је тај број помножио бројем 12, а други пут бројем 9 и саопштио да је први производ већи од другог за 270. Који је број замислио ученик?

776. Дато је шест картона облика правоугаоника дужине 3 cm и ширине 2 cm. Користећи све дате картоне саставити један правоугаоник. (Квадрат је такође правоугаоник.) Израчунати:

(а) највећи могући (б) најмањи могући

обим тако састављеног правоугаоника.



Сл. уз задатак 777

777. Одреди површину приказане фигуре ако је јединица мере један квадратић са квадратне мреже.

778. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Колико је потребно новца за куповину 60 свезака и 41 оловке?

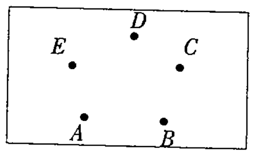
779. Природни бројеви a и b су такви да важи $a - b = 2005$. Наћи најмању вредност израза $2005 \cdot a - 2004 \cdot b$.

V разред

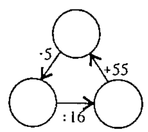
780. Разлика два упоредна угла једнака је половини мањег. Доказати да је угао комплементан мањем углу једнак четвртини мањег угла.

781. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Колико највише предмета се може купити за 2005 динара?

782. У равни је дато пет тачака као на слици. Да ли има више дужи са крајевима у тим тачкама или троуглова са теменима у тим тачкама?



Сл. уз задатак 782



Сл. уз задатак 784

783. У четвороцифреном броју $\overline{32♣4}$ замени ♣ одговарајућом цифром тако да добијени број буде дељив са 12.

784. У кругове (видети слику) уписати бројеве тако да све три једнакости приказане шемом буду тачне.

VI разред

785. Одредити све целе бројеве n такве да је $-\frac{1}{3} < \frac{n+1}{15} < \frac{1}{5}$.

786. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Ако је за 101 предмет плаћено 2005 динара, колико је купљено свезака, а колико оловака?

787. Висине CD и AE оштроуглог троугла ABC секу се у тачки H. Ако је $AB = CH$ израчунати $\measuredangle ACB$.

788. Бројеве $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ уписати у девет поља квадрата (видети слику) тако да производи по колонама и врстама буду једнаки датим бројевима (доле и десно).

			135
			336
			8
252	48	30	

Сл. уз задатак 788

789. У квадрату странице 44 cm дато је 2005 тачака. Доказати да се од тих тачака могу изабрати две чије је међусобно растојање мање од 2 cm.

VII разред

790. Доказати да је број $\overline{abcabc}$, где су $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ и $a \neq 0$, дељив са 7, 11 и 13.

791. Израчунати висину једнакокраког трапеза површине $16\,\mathrm{cm}^2$ ако се зна да су му дијагонале нормалне.

792. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. Да ли може да се за 2005 динара купи 205 предмета?

793. Дат је правоугли $\triangle ABC$ такав да је $\measuredangle ACB = 90°$, $CA = \sqrt{5}$ и $CB = 2\sqrt{5}$. Нека је $D \in AB$ и $CD = \sqrt{5}$. Одредити обим и површину троугла BCD.

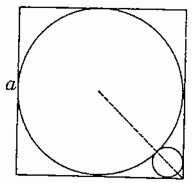
794. Доказати да не постоје прости бројеви p, q и r такви да је $p^2+q^2+r^2 = 2005$.

VIII разред

795. Наћи заједничка решења неједначина:
$$\frac{3}{4}y - \frac{2}{3}(y-1) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{1-y}{2} - \frac{2+y}{3} < 0.$$

796. Цена две оловке и три свеске је 100 динара, а цена три оловке и две свеске је 75 динара. На колико начина се може потрошити 2005 динара за набавку свезака и оловака?

797. Ако правилну четворострану призму пресечемо једном равни која садржи ивицу основе и са основом захвата угао од 30°, добијамо тела чије су запремине у односу 1 : 2. Израчунати запремину те правилне четворостране призме у зависности од странице основе.



Сл. уз задатак 798

798. У квадрат странице a уписан је круг, а затим је (видети слику) уписан још један мали круг који додирује велики круг и две странице квадрата. Наћи површину мањег круга.

799. Милан је написао десет узастопних природних бројева. Збир цифара ниједног од тих бројева није дељив бројем седам. Који је најмањи број који је Милан могао да напише?

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

IV разред

800. Колико је укупно цифара потребно одштампати за нумерацију књиге која има 225 страна?

801. Збир два броја је 2005, а њихова разлика умањена за 1 је 1000. Одредити те бројеве.

802. Квадрат је разрезан на два правоугаоника. Збир обима тих правоугаоника је за 210 cm већи од обима квадрата. Површина једног правоугаоника је четири пута већа од површине другог. Израчунај обим мањег правоугаоника.

803. Звездице заменити цифрама, тако да се добије тачна једнакост:

$$7\star 8=\star 9\cdot 8+7\star.$$

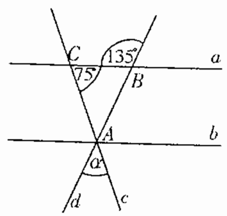
804. У празна поља (види слику) уписати бројеве тако да збирови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

	4	
10		
5		7

Сл. уз задатак 804

V разред

805. Израчунати меру угла α (види слику) ако су праве a и b паралелне.



Сл. уз задатак 805

		$\frac{4}{5}$
$\frac{7}{10}$		
		0,4

Сл. уз задатак 809

806. Мерни бројеви дужина ивица квадра су природни бројеви. Површина квадра је $P=592\,\text{cm}^2$, а запремина $V=960\,\text{cm}^3$. Ако је дужина једне ивица тог квадра $a=12\,\text{cm}$, одредити дужине остале две ивице.

807. Одредити најмањи природан број дељив са 36 који је записан само цифрама 4 и 7.

808. Један пешчани сат мери 10 min (пресипање садржаја песка из једног у други део траје 10 min), а други пешчани сат мери 7 min. Како се коришћењем ова два сата може измерити 23 min?

809. У празна поља (види слику) уписати бројеве тако да збирови по три броја у свакој врсти, колони и дијагонали буду међусобно једнаки.

VI разред

810. Одредити све целе бројеве x за које је $|x|<3$ и $|1-x|<|1+x|$.

811. На страницама ромба $ABCD$ дате су тачке E, F, G и H које припадају редом страницама AB, BC, CD и DA тако да важи $AE=AH=CF=CG$. Доказати да је четвороугао $EFGH$ правоугаоник.

812. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $p+5q+7r=47$ (p, q и r не морају бити различити).

813. Одредити најмањи разломак $\frac{x}{y}$ (x и y природни бројеви) такав да су količници $\frac{x}{y}:\frac{11}{210}$ и $\frac{x}{y}:\frac{11}{280}$ природни бројеви.

814. Конструисати троугао ABC ако је дато $h_a=4\,\text{cm}$, $t_a=6\,\text{cm}$ и $t_b=9\,\text{cm}$.

VII разред

815. Средишта страница правилног шестоугла странице дужине a су темена новог шестоугла. Доказати да је тај нови шестоугао правилан и одредити његову површину у зависности од a.

816. Одредити три проста броја чији је производ 47 пута већи од њиховог збира.

817. Нека је $ABCD$ четвороугао чије се дијагонале секу под правим углом. Ако су M и N средине страница AD и BC доказати да је $2MN\leqslant AD+BC$.

818. Број је „ружичаст“ ако у свом запису има цифре 1 и 2 које су суседне. Колико има „ружичастих“ четвороцифрених бројева којима су све цифре различите?

819. Од квадрата са страницама целобројне дужине треба сложити правоугаоник површине 2005. Колико је најмање квадрата потребно?

VIII разред

820. Дата је функција $y = (2m+1)x + 6$.

(а) Одредити вредност броја m тако да њен график садржи тачку $M(4,3)$.

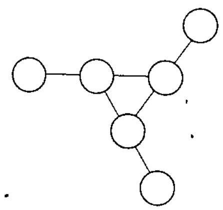
(б) За ту вредност броја m, одредити удаљеност координатног почетка од тог графика.

821. На страници AB троугла ABC уочена је тачка D. Нека су r, r_1 и r_2 редом дужине полупречника уписаних кружница у троуглове ABC, ADC и DBC. Доказати да је $r_1 + r_2 > r$.

822. Одредити просте бројеве p, q и r тако да важи $p + pq + pqr = 2005$.

823. Теме коцке удаљено је 2005 cm од дијагонале коцке. Наћи површину и запремину те коцке.

824. Бројеви $1,2,3,4,5$ и 6 могу се уписати у кругове (види слику) тако да су збирови по сва три правца међусобно једнаки. Доказати да је збир бројева уписаних у кругове који чине нацртани троугао дељив са 3.



Сл. уз задатак 824

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

VI разред

825. У хотелу Славија у Врњачкој Бањи цена пансиона је у фебруару повећана за 20%, а онда у марту снижена за 20%. У исто време у хотелу Звезда је у фебруару прво снижена цена за 20%, а затим повећана за 20%. Сада је разлика у цени пансиона 240 динара. Колика је та разлика била пре прве промене цене?

826. Доказати да у $\triangle ABC$ чије су странице a, b и c и t_c дужина тежишне дужи из темена C важи

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}.$$

827. Троцифрени број $\overline{abc}$ је за 860 већи од троцифреног броја $\overline{def}$. Одредити све шестоцифрене бројеве $\overline{abcdef}$ који су дељиви са 9.

828. Нека је $ABCD$ ромб. Конструисати кружницу тако да су темена датог ромба на једнаким растојањима од те кружнице. Колико има решења? [Под растојањем тачке M од кружнице $k(O,r)$ подразумевамо број $|OM - r|$.]

829. Природни бројеви од 1 до mn уписани су у поља табеле $m \times n$ (m врста и n колона). У поља прве врсте, слева на десно, уписани су редом бројеви $1,2,\dots,n$; затим су у поља друге врсте, опет слева на десно, уписани редом

бројеви $n+1, n+2, \dots, 2n$ итд. Ако је број 77 уписан у пету врсту, 127 у седму врсту и 307 у последњу врсту, одредити бројеве m и n.

VII разред

830. Шта је веће, $\dfrac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6}$ или $\dfrac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$?

831. Симетрала угла ACB сече страницу AB троугла ABC у тачки D. Ако је центар O уписане кружнице у троугао ADC уједно и центар кружнице описане око троугла ABC, израчунати углове троугла ABC.

832. Нека су p, q и r прости бројеви, а a, b и c такви природни бројеви да важи:

$$p = a^b + c, \quad q = b^c + a, \quad r = c^a + b.$$

Доказати да су у том случају два од бројева p, q и r међусобно једнака.

833. У троуглу ABC је $\measuredangle BAC = 65°$, $\measuredangle ABC = 55°$ и $AB = 10$ cm. Ако је A' подножје висине из темена A, а B' подножје висине из темена B тог троугла, израчунати дужину дужи $A'B'$ и углове троугла $A'B'C$.

834. У квадрату странице $a = 31$ cm на произвољан начин је распоређено 2005 тачака. Доказати да међу датим тачкама постоје бар две чије је растојање мање од 1 cm.

VIII разред

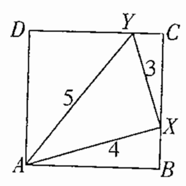
835. Одредити све природне бројеве m и n који су решења једначине

$$\frac{5}{m} + \frac{401}{n} = 1.$$

836. Нека је $ABCV$ правилна тространа пирамида основне ивице a и бочне ивице b. Нека је T тежиште бочне стране BCV и S подножје висине пирамиде из врха V. Доказати да се дужи AT и VS секу и одредити у којој размери пресечна тачка дели дуж AT.

837. У круг су уписани квадрат и једнакостраничан троугао тако да ниједно теме квадрата није истовремено и теме троугла. Доказати да постоји лук одређен двема од тих седам тачака чија дужина није већа од $\dfrac{O}{24}$ (O – обим круга).

838. Тачке X и Y припадају страницама BC и CD квадрата $ABCD$ (видети слику). Дужине дужи XY, AX и AY су редом 3, 4 и 5. Одредити дужину странице квадрата.



Сл. уз задатак 838

839. Један хотел има 40 соба. Цена једнодневног издавања собе је 1000 динара. Ако би се та цена повећала за 50 динара, једна соба би остала празна, ако би се повећала за 100 динара, две собе би остале празне, итд. Трошкови одржавања једне издате собе су 100 динара дневно. Колико би требало да буде цена једнодневног издавања собе, па да дневна зарада хотела буде највећа?

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2005.

VI разред

840. Одредити све просте бројеве p и q за које важи једнакост $249 \cdot p^3 + q = 2005$.

841. У троуглу ABC симетрале спољашњих углова код темена A и B секу праве BC и CA редом у тачкама D и E, тако да је $AD = BE = AB$. Израчунати углове троугла ABC ако је:

(а) $\alpha < 90°$; (б) $\alpha > 90°$.

842. Анка, Бранка и Весна су купиле по један примерак исте књиге и при томе потрошиле, редом, 100%, $55\frac{5}{9}$% и 50% новца који је свака од њих имала код себе. Онда су решиле да укупни остатак новца међусобно поделе на једнаке делове. Бранка је дала Анки 100 динара. Колико је новаца Анки дала Весна?

843. Дат је једнакокраки труогао ABC код кога је $AC = BC$. Симетрала угла ABC сече крак AC у тачли D. Права p садржи тачку D, нормална је на BD и сече праву AB у тачки E. Доказати да је $BE = 2 \cdot AD$.

844. На кружници су редом дате тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{108}$. Свакој тачки је додељен један природан број тако да важе следећи услови:

(а) тачкама A_1, A_{19} и A_{50} су редом додељени бројеви 1, 19 и 50;

(б) збир бројева који су додељени било ком низу од 20 узастопних тачака је 1000.

Одредити који је број додељен тачки A_{100}.

VII разред

845. У оштроуглом троуглу ABC висине BE и AG секу се у тачки D. Тачке M, N, P и Q су, редом, средишта дужи AD, BD, BC и AC. Доказати да је четвороугао $MNPQ$ правоугаоник.

846. Доказати да је број $2002 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008 + 36$ квадрат неког природног броја.

847. Ако су a и b природни бројеви и ако је број $ab + 1$ дељив са 24, онда је и број $a + b$ дељив са 24. Доказати.

848. Шесторка цифара $abcdef$ представља време на дигиталном часовнику. При томе цифре ab одређују број сати од 00 до 23, цифре cd одређују број минута од 00 до 59, а цифре ef одређују број секунди од 00 до 59. Колико има оваквих шесторки за које и шесторка цифара $fedcba$ представља време које се може прочитати на дигиталном часовнику?

849. Нека је ABC једнакокраки троугао код кога је $AC = BC$ и угао при врху C једнак 20°. Ако је M тачка на краку BC и $CM = AB$, одредити величину угла AMB.

VIII разред

850. Одредити најмањи број облика $101010\ldots10101$ који је дељив са 9999.

851. Дужина основне ивице правилне тростране пирамиде је 3 dm. Пирамида је пресечена са равни која садржи једну основну ивицу и нормална је на наспрамну бочну ивицу и при томе је дели у односу 9 : 8, рачунајући од темена основе. Израчунати површину пирамиде.

852. Ако су a, b и c дужине страница троугла, онда је

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c}\right| < 1.$$

Доказати.

853. Дат је правилан седмоугао $ABCDEFG$ странице 1. Доказати да је

$$\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1.$$

854. На кружници је дато 2005 плавих и 2005 црвених тачака које деле кружницу на 4010 подударних лукова. Свака црвена тачка је средиште неког лука са плавим крајевима. Доказати да је свака плава тачка средиште неког лука са црвеним крајевима.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 9. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

855. Дат је правоугли троугао ABC са правим углом код темена B и $BC < AB < 2BC$. Нека је M тачка катете AB, таква да је $AM = BC$ и нека је N тачка катете BC, таква да је $CN = BM$. Одредити угао између правих AN и CM.

856. Дат је квадрат странице 2. Унутар квадрата дато је 2005 тачака тако да никоје три нису колинеарне. Квадрат је подељен на троуглове чија су темена све дате тачке и сва темена квадрата. Странице троуглова се међусобно не секу. Доказати да постоји троугао чија површина није већа од $\frac{1}{1003}$.

857. Нека су a, b, c и d бројеви из интервала $[0,1]$. Доказати да је

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}-\frac{1}{4}\leqslant\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2.$$

Када важи једнакост?

ДЕВЕТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Вериа (Грчка), 2005.

858. Наћи све природне бројеве x, y који задовољавају једначину

$$9(x^2+y^2+1)+2(3xy+2)=2005.$$

859. Нека је ABC оштроугли троугао уписан у кружницу k. Познато је да тангента на кружницу k у тачки A сече праву BC у тачки P. Нека је M средиште дужи AP, а R друга тачка пресека кружнице k и праве MB. Права PR сече поново кружницу k у тачки S, различитој од R. Доказати да су праве AP и CS паралелне.

860. Доказати да:

(а) постоји 5 тачака у равни таквих да међу свим троугловима са теменима у тим тачкама постоји 8 правоуглих троуглова;

(б) постоје 64 тачке у равни такве да међу свим троугловима са теменима у тим тачкама има бар 2005 правоуглих троуглова.

861. Наћи све троцифрене природне бројеве $\overline{abc}$ такве да је

$$\overline{abc}=abc(a+b+c)$$

где је $\overline{abc}$ декадни запис броја.

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

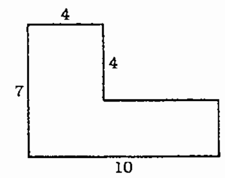
IV разред

862. Шта је веће: $27\cdot10^6$ или $3\cdot10^7$?

863. На основу података на слици израчунати површину фигуре (мере су дате у метрима).

864. Израчунати збир $1+2+3+\cdots+2006$.

865. Слагањем 12 једнаких квадрата странице 1 cm (један до другог, тако да имају заједничку страницу) треба направити правоугаоник. Навести сва решења и одредити који ће од тако добијених правоугаоника имати најмањи обим.



Сл. уз задатак 863

866. Наћи највећи шестоцифрен непаран број чији је збир цифара 4.

V разред

867. Одредити све скупове X за које је $\{2,3,4,5\}\cup X=\{2,3,4,5\}$.

868. Разлика угла α и њему упоредног угла β је $48°$. Израчунати угао комплементан углу β.

869. Одредити све цифре a такве да је производ $\overline{17a}\cdot520$ дељив са 12.

870. Дуж AB чија је дужина 28 cm подељена је тачкама P и Q на три дела, тако да је први део два пута мањи од другог, а два пута већи од трећег. Ако су M и D средишта крајњих делова, израчунати дужину дужи MD.

871. Ивице дрвеног квадра су 21 cm, 24 cm и 27 cm. Све стране квадра обојене су плавом бојом, а затим је цео исечен на једнаке коцке највећих могућих ивица. Колико тих коцки има плаво обојену само једну страну?

VI разред

872. Одредити све двоцифрене бројеве који су 4 пута већи од збира својих цифара.

873. Нека је D средиште крака BC једнакокраког троугла ABC. Израчунати дужину основице AB тог троугла ако је познато да је његов обим 25 cm, а да је обим троугла ABD за 1 cm већи од обима троугла ADC.

874. Израчунати збир свих природних бројева којима је при дељењу са 6 количник једнак остатку.

875. У оштроуглом троуглу ABC је $\measuredangle BAC = 2\measuredangle ABC$. Доказати да висина из темена C и симетрала угла BCA образују угао једнак полуразлици углова BAC и ABC.

876. Каубој пешачи од места А до места Б, а враћа се назад јашући, и за све то му је потребно $5\frac{1}{4}$ сати. Да је пешачио у оба смера требало би му 7 сати. Колико би му времена требало да је јахао у оба смера? (Подразумева се да каубој пешачи и јаше константним брзинама.)

VII разред

877. Упоредити бројеве $\sqrt{7-\sqrt{7}}$ и 2.

878. Доказати да вредност израза $(8^{2n+1}\cdot 16^{n}) : 4^{5n+1}$ не зависи од природног броја n.

879. Израчунати обим једнакокраког трапеза ако су му оштри углови $45°$, дужина висине $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и површина $32\,\mathrm{cm}^2$.

880. Цифра десетица два различита двоцифрена броја је 6. Ако у сваком од њих цифре десетица и јединица замене места, производ тако добијених бројева је једнак производу датих бројева. О којим бројевима је реч?

881. Страница AB правоугаоника $ABCD$ је два пута већа од странице BC. Нека је E тачка странице AB таква да су углови AED и DEC једнаки. Одредити величину тих углова.

VIII разред

882. Доказати да је $4x^2 - 4x + 3 > 0$ за сваки реалан број x.

883. Збир дужина катета датог правоуглог троугла је $22\,\mathrm{cm}$. Ако се једна катета смањи за $4\,\mathrm{cm}$, а друга повећа за $2\,\mathrm{cm}$, добија се правоугли троугао чија је површина једнака површини датог троугла. Одредити дужине катета датог троугла.

884. Одредити бројеве x, y и z такве да је $xy = 20$, $yz = 35$ и $xz = 28$. Наћи сва решења.

885. У кружницу полупречника дужине R смештено је шест подударних мањих кружница полупречника дужине r, тако да свака додирује велику кружницу и две суседне мале кружнице. Одредити R у функцији од r.

886. Колико има четвороцифрених бројева у којима се појављују тачно две различите цифре?

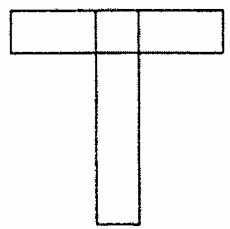
ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

IV разред

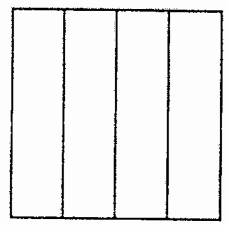
887. Одредити разлику највећег и најмањег шестоцифреног броја записаних помоћу цифара $0, 2, 3, 6, 7$ и 9, тако да се свака цифра појављује у сваком од бројева тачно једном.

888. Ако су x и $x - 2006$ природни бројеви, колико решења има неједначина $x - 2006 < 6002$?

889. Од два правоугаоника чије су дужине страница 15 cm и 3 cm делимичним преклапањем (као на слици) добијена је фигура (у облику слова Т). Израчунати обим тако добијене фигуре.



Сл. уз задатак 889



Сл. уз задатак 890

890. Квадрат је подељен на четири једнака правоугаоника (као на слици). Ако је обим једног од тако добијених правоугаоника 20 cm, одредити површину квадрата.

891. Колико листова има књига ако је за нумерисање њених страна употребљено тачно 77 седмица?

V разред

892. Одредити све парове цифара x и y тако да важи $\frac{x}{5} - \frac{2}{y} = \frac{4}{5}$.

893. Означимо са $*$ операцију на скуповима дефинисану са $A*B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Одредити $A * B$ ако је $A = \{\,x \mid x \in \mathbf{N}, 500 \leqslant x \leqslant 2005\,\}$, а $B = \{\,x \mid x \in \mathbf{N},\ x$ паран $, 1000 \leqslant x \leqslant 2006\,\}$.

894. Збир два угла износи $\frac{8}{9}$ правог угла, а један од њих је за четвртину правог угла већи од другог. Колики су ти углови?

895. Множењем два двоцифрена броја добија се број у чијем се запису појављују једино седмице. Одредити све такве парове двоцифрених бројева.

896. У једној години је било 53 петка. Ако је 1. јануар био четвртак, који дан је био 1. април?

VI разред

897. Одредити 2006-у цифру иза децималне запете у децималном запису броја $\frac{21}{37}$.

898. При сабирању два децимална броја ученик је непажњом код једног од бројева померио децималну запету за два места удесно. Услед тога је уместо резултата 62,5876 добио 295. Које бројеве је ученик требало да сабере?

899. У оштроуглом једнакокраком троуглу ABC дужина основице AB већа је од дужине крака BC. Симетрала угла на основици и висина из истог темена граде угао од $18°$. Колики је угао на основици тог троугла?

900. Нека је $ABCD$ правоугаоник $(AB > BC)$, а тачке E и F су такве да су троуглови AED и CDF једнакостранични и тачка E припада унутрашњости и правоугаоника $ABCD$ и троугла CDF. Доказати да је троугао BEF једнакостраничан.

901. Таблица 5×5 попуњена је на произвољан начин бројевима из скупа $\{-1, 0, 1\}$. Посматрају се збирови тих бројева по врстама, колонама и обе дијагонале таблице. Доказати да међу њима бар два морају бити једнака.

VII разред

902. Израчунати вредност израза $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ако се зна да је $\frac{a+b}{b} = 2 - \sqrt{2}$.

903. Нека су a и b дужине основица AB и CD, а c дужина крака једнакокраког трапеза $ABCD$ са узајамно нормалним дијагоналама. Доказати да је $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

904. Нека је $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}$, $b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}$, а $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Доказати да је збир квадрата нека два од бројева a, b, c једнак квадрату трећег.

905. Нека су P и R тачке страница AB и CD паралелограма $ABCD$ и нека је $\{Q\} = PC \cap BR$ и $\{S\} = AR \cap DP$. Доказати да је површина четвороугла $PQRS$ једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ.

906. Бројеви $1, 2, \ldots, 9$ су подељени у три групе. Доказати да бар у једној од тих група производ бројева није мањи од 72.

VIII разред

907. Ако су x и a реални бројеви такви да важи $x + \frac{1}{x} = a$, изразити $x^4 + \frac{1}{x^4}$ у функцији од a.

908. Одредити цифре x, y и z такве да је $\frac{1}{x+y+z} = 0,\overline{xyz}$. Наћи сва решења.

909. Дужине катета правоуглог троугла ABC су a и b. Симетрала правог угла код темена C сече хипотенузу у тачки D. Израчунати дужину дужи CD.

910. Одредити све реалне бројеве a за које једначина $|x-1| + |x-2| = a$ има бесконачно много решења.

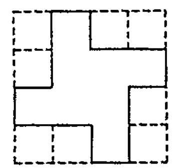
911. Одредити запремину квадра код кога су растојања од тачке пресека дијагонала до ивица једнака 7 cm, 8 cm и 9 cm.

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

IV разред

912. Одредити све троцифрене бројеве чији производ са неким једноцифреним бројем је 2030.

913. Мирко је од комада картона облика квадрата одсекао комаде облика осам једнаких малих квадрата тако да је остао комад облика фигуре као на слици. Ако је површина те фигуре 200 mm^2, израчунати њен обим.



Сл. уз задатак 913

914. На сваком од такмичења из математике, српског језика и природе из једне школе учествовало је по 30 ученика. Колико је ученика из те школе учествовало на сва три такмичења ако се зна да је 23 ученика учествовало на по тачно једном, а 23 ученика на по тачно два такмичења?

915. Ако неком броју допишемо са десне стране 9, добијени број поделимо са 13, затим количнику допишемо са десне стране 1 и добијени број поделимо са 11, добијамо број 21. Који је почетни број?

916. Од три коцке са ивицама дужине 1 cm, 2 cm и 3 cm треба направити (само прислањањем, без сечења) тело најмање могуће површине. Колика је та површина?

V разред

917. У једној корпи налазе се црвене, а у другој беле руже. Број црвених једнак је $\frac{7}{8}$ броја белих ружа. Ако се 7 белих ружа премести у корпу са црвеним ружама, у корпама ће бити исти број ружа. Колико има црвених ружа?

918. Производ пет узастопних природних бројева је број $\overline{95*4*}$. Одредити непознате цифре.

919. Нека је $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,4\}$, $C=\{2,4,c\}$, $D=\{a,b,3\}$, $E=\{1,b\}$. Одредити бројеве a,b,c и d тако да важи $B\subset A$, $C\subset A$, $D\subset A$ и $E\subset B$. Подразумева се да су у сваком од датих скупова елементи различити.

920. Пресек правоугаоника $ABCD$ и $PQRS$ је правоугаоник $TURS$, при чему је $PQUT$ квадрат површине $25\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати површину правоугаоника $ABCD$ ако је површина правоугаоника $TURS$ једнака $\frac{2}{7}$ површине правоугаоника $PQRS$, а такође једнака $\frac{2}{11}$ површине правоугаоника $ABCD$.

921. Првих десет простих бројева исписани су један иза другог у растућем поретку. На тај начин је добијен низ цифара. Избрисати девет цифара из тог низа тако да број који чине преостале цифре буде највећи могућ.

VI разред

922. Разлика $\frac{7}{9}$ једног и $\frac{7}{9}$ другог броја је $\frac{3}{7}$. Колико износи разлика $\frac{3}{4}$ другог и $\frac{3}{4}$ првог броја?

923. Кроз центар O уписане кружнице у троугао ABC повучена је права паралелна са AB која сече AC у тачки K, а BC у тачки L. Ако је дужина дужи AB једнака c, а обим троугла KLC једнак s, колики је обим троугла ABC?

924. Одредити најмањи 2006-тоцифрени природан број који се записује само цифрама 0, 2 и 6, а дељив је са 18.

925. Тачка M је средиште странице AD паралелограма $ABCD$, а тачка K је пресек дужи BD и CM. Доказати да је $3KD=BD$.

926. Продавац има шест балона запремине 7, 9, 13, 14, 15 и 16 ℓ. Неки од њих су напуњени соком од боровнице, неки соком од рибизле, а само један је празан. Укупна запремина сока од боровнице је два пута већа од укупне запремине сока од рибизле. Одредити садржај сваког балона.

VII разред

927. Одредити скуп свих целих бројева a за које је $\frac{a^2}{a+3}$ цео број.

928. Израчунати површину ромба чији је обим 36 cm, а збир дужина дијагонала 20 cm.

929. Одредити све двоцифрене бројеве $\overline{ab}$ чији је корен једнак $a+\sqrt{b}$.

930. Израчунати дужину странице правилног дванаестоугла уписаног у круг чији је полупречник дужине R.

931. Колико има петоцифрених бројева који се исто читају и са леве на десну и са десне на леву страну?

VIII разред

932. Данас (15-тог априла 2006.) једна особа пуни толико година колики је збир цифара године њеног рођења. Које године је рођена та особа?

933. Одредити све парове реалних бројева k и n, такве да график функције $y=kx+n$ садржи тачку $M(4,6)$ и са графиком функције $y=x+2$ и x осом гради троугао површине 36.

934. Око круга чији је полупречник дужине 2 cm описан је једнакокраки трапез површине $20\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати дужине страница тог трапеза.

935. Нека су a, b и c реални бројеви различити од нуле, такви да је збир њихових реципрочних вредности једнак нули. Доказати да је збир бројева a, b и c различит од нуле.

936. Коцка чија је страница дужине 5 cm пресечена је са равни која од три ивице са заједничким теменом A одсеца дужи AM, AN и AP једнаке дужине. Ако је однос запремина тако добијених делова коцке $371:4$, одредити разлику површина тих делова.

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

VI разред

937. Да ли је могуће бројеве $1,2,\dots,9$ распоредити у таблици 3×3 тако да производи бројева у свакој врсти и свакој колони буду међусобно једнаки?

938. У једној туристичкој агенцији авионска карта за Лондон може се купити са попустом од 10% ако се резервише од 7 до 13 дана раније од дана путовања, са попустом од 25% ако се резервише од 14 до 29 дана раније од дана путовања и са попустом од 40% ако се резервише 30 и више дана раније од дана путовања. Путник је купио карту за 21 000 динара. Да је резервисао дан касније морао би да је плати 4 200 динара више. Колико дана пре путовања је путник резервисао карту?

939. Нека су тачке E и F средишта страница AD и CD правоугаоника $ABCD$. Ако је тачка G пресек дужи AF и EC, доказати да је $\measuredangle EBF=\measuredangle EGA$.

940. Велики миксер у фабрици еурокрема напуни се славином за течну црну чоколаду за 23 минута, а славином за течну белу чоколаду за 17 минута. После колико времена од отварања славине за црну треба отворити славину за белу чоколаду, тако да у миксеру који је на почетку био празан, на крају буде 2,5 пута више црне него беле чоколаде?

941. У спољашњости правоуглог троугла ABC конструисани су квадрати чије су странице хипотенуза AB и катета AC. Доказати да су растојања од средишта A_1 катете BC до пресека дијагонала сваког од квадрата једнака.

VII разред

942. Испитати да ли постоји природан број од којег се, премештањем прве цифре иза последње, тј. иза цифре јединица, добија пет пута већи број.

943. Нека је k круг са центром O и полупречником дужине 10 cm. Тетиви AB круга k одговара централни угао од $90°$. У троугао ABO уписан је круг k_1, а у област одређену тетивом AB и мањим луком AB уписан је највећи могући круг k_2. Одредити однос дужина полупречника кругова k_1 и k_2.

944. Одредити све просте бројеве p такве да број p^2+11 има тачно 6 различитих делилаца.

945. Квадрати природних бројева записани су редом један за другим: $1491625\ldots$. Одредити цифру која се налази на 2006. месту у том низу.

946. Тачка D је средиште странице BC троугла ABC, а E је тачка дужи AD таква да је $AE : ED = 3 : 1$. Одредити однос дужи AF и FC, где је F пресечна тачка праве BE и странице AC.

VIII разред

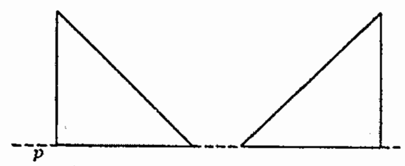
947. Одредити све четвороцифрене природне бројеве $\overline{abcd}$ за које важи

$$\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b+d}{8}=\frac{a+c+d}{8}=\frac{b+c+d}{6}.$$

948. (а) Одредити све могуће остатке при дељењу куба природног броја са 7.
(б) Испитати да ли постоје природни бројеви x и y такви да је $x^3+y^3=2^{2006}$.

949. На столу се налази суд облика праве четворостране призме висине 10 cm, чија је основа квадрат странице дужине 4 cm. У суду је вода која заузима више од половине његове запремине. Суд се нагне тако да додирује сто само једном својом основном ивицом, а угао између равни основе суда и равни стола је $30°$. Тада вода дође до горње ивице суда, али не пређе преко ње. Одредити висину празног дела суда пре његовог нагињања.

950. Дато је 50 позитивних реалних бројева чији је збир 100. Доказати да међу њима постоје три броја чији збир није мањи од 6.



Сл. уз задатак 951

951. Дата су два подударна једнакокракоправоугла троугла чије су катете дужине 1 cm (као на слици). Одредити максималну површину пресека ових троуглова која се може добити померањем троуглова по правој p.

САВЕЗНО ТАКМИЧЕЊЕ 2006.

VI разред

952. Троцифрени број $\overline{abc}$ је прост, а број $\overline{cba}$ је куб једног природног броја. О којим бројевима је реч?

953. Нека је K средиште тежишне дужи CC_1 троугла ABC и M пресечна тачка правих AK и BC. Одредити однос дужина дужи CM и MB.

954. На столу су три свеће једнаких дужина, али неједнаких дебљина. Јагода је у 8 h упалила прву свећу, а после једног сата и друге две. Сат после тога су се изједначиле по дужини прва и трећа свећа. Када ће се изједначити по дужини прва и друга свећа ако трећа цела изгори за 8 сати, а друга цела изгори за 12 сати?

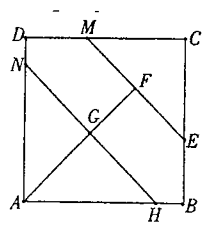
955. У једнакокраком троуглу ABC је $\measuredangle CAB=\measuredangle ABC=40°$. Симетрала угла CAB сече наспрамни крак у тачки D. Доказати да је $AD+DC=AB$.

956. Јелена и Радован играју следећу игру. На листу облика паралелограма наизменично уписују кругове, све једнаке величине, који се не поклапају међу собом и не излазе из оквира папира. Победник је онај ко упише последњи круг. Доказати да Јелена, ако она црта први круг, може да игра тако да сигурно побеђује.

VII разред

957. Да ли постоје прости бројеви p, q и r такви да је

$$pqr+pq+qr+rp+p+q+r=2006\ ?$$



Сл. уз задатак 958

958. Квадрат $ABCD$ странице a разрезан је на 5 фигура једнаких површина као на слици. Тачке F и G припадају дијагонали AC, а дужи NH и ME паралелне су дијагонали BD. Израчунати обим петоугла $BEFGH$.

959. Нека је

$$\frac{1}{1\cdot 6\cdot 11}+\frac{1}{6\cdot 11\cdot 16}+\frac{1}{11\cdot 16\cdot 21}+\cdots+\frac{1}{1996\cdot 2001\cdot 2006}=\frac{p}{q}$$

и нека су p и q узајамно прости бројеви. Доказати да број q није дељив са 2006.

960. Кошаркаш на тренингу изводи слободна бацања. Прво је промашио, а испоставило се да је на крају тренинга имао проценат успешности (однос броја датих кошева и броја свих покушаја) слободних бацања већи од 80%. Доказати да је у једном тренутку проценат успешности овог кошаркаша био тачно 80%.

961. У унутрашњости правоугаоника чије су странице 7 cm и 3 cm на произвољан начин је распоређено 9 тачака. Доказати да постоје две тачке чије је растојање мање од $\sqrt{5}$ cm.

VIII разред

962. За природан број кажемо да је палиндром ако се исписивањем цифара у обрнутом поретку добија исти број (на пример, 7482847 је палиндром). Наћи највећи петоцифрени палиндром који је дељив са 101.

963. У троуглу ABC тачка A_1 је средиште странице BC, а тачка E је пресек симетрале угла CAB и странице BC. Круг описан око троугла AEA_1 сече странице AB и CA, редом, још у тачкама F и G. Доказати да је $BF=CG$.

964. Производ три позитивна броја је 1, а њихов збир је већи од збира њихових реципрочних вредности. Доказати да је тачно један од ових бројева већи од 1.

965. На рукометном турниру за победу се добија 2 бода, за реми 1 бод, а за пораз 0 бодова. Зна се да је свака екипа играла са сваком једанпут и да је победничка екипа на крају освојила 7 бодова, другопласирана 5 бодова, а трећепласирана екипа 3 бода. Колико бодова је имала екипа која је била последња на турниру?

966. У троуглу ABC је $\angle A=60^\circ$, $\angle C>60^\circ$, D и E су тачке на страници BC такве да је AD симетрала угла CAB, а AE симетрала угла BAD и $CD=DE$. Одредити $\angle BCA$.

ИЗБОРНО ТАКМИЧЕЊЕ ЗА УЧЕШЋЕ НА 10. ЈУНИОРСКОЈ БАЛКАНИЈАДИ

967. Одредити највећи природан број n, такав да је број $n^2+2006n$ потпун квадрат.

968. Дат је једнакокраки троугао чија је основица a и крак b. Ако за углове на основици важи $\angle ABC=\angle BCA=80^\circ$, онда је $a^3+b^3=3ab^2$. Доказати.

969. Правоугаоник је са 6 хоризонталних и 6 вертикалних правих подељен на 49 мањих правоугаоника. Обими малих правоугаоника су цели бројеви. Доказати да је и обим великог правоугаоника цео број.

ДЕСЕТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

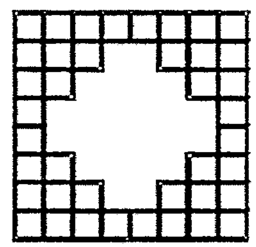
Чишинау (Молдавија), 2006.

970. Доказати да за сваки сложени број $n>4$, број $2n$ дели производ $(n-1)!$.

971. Нека је ABC једнакокраки троугао са $AB=AC$ и $\angle BAC<60^\circ$. Нека су D и E унутрашње тачке странице AC такве да је $EB=ED$ и $\angle ABD=\angle CBE$. Симетрале углова ACB и BDC секу се у тачки O. Израчунати $\angle COD$.

972. Цео број $n>1$ се зове *савршеним* ако је збир свих његових делилаца (укључујући 1 и n) једнак $2n$. Наћи све савршене бројеве n такве да су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви.

973. Нека је $n\geqslant 2$ цео број. Из квадратне таблице $2n\times 2n$ (састављене од 1×1 малих квадрата) уклоњени су неки од малих квадрата, и то: средња два из реда број 2, средња четири из реда број 3, ... , средња $2n-2$ из реда број n, средња $2n-2$ из реда број $n+1$, ... , средња четири из реда број $2n-2$ и средња два из реда број $2n-1$, тако да се добила нова фигура (као што је показано на датој слици за $n=4$). Наћи највећи број 2×1 правоугаоника који се могу поставити на добијену фигуру, без преклапања, тако да сваки правоугаоник прекрива тачно два мала квадрата.



Сл. уз задатак 973

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

III разред

974. Израчунај:

а) $462 + 231 =$ б) $892 - 351 =$
в) $486 + 392 - 678 =$

975. Које бројеве треба написати на црте тако да једнакост буде тачна:

$$8 \cdot \_\_\_\_ + 8 : \_\_\_\_ = 60\ ?$$

976. Мењајући место тачно једном „штапићу“ учини да једнакост постане тачна:

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} + \mathrm{VI} = \mathrm{XIV}.$$

Нађи два различита решења.

977. Користећи цифре 5 и 2 можеш да напишеш 8 троцифрених бројева (цифре се могу понављати).

а) Одреди два таква броја чији је збир 777.

б) Одреди два таква броја чија је разлика 33.

Нађи сва могућа решења.

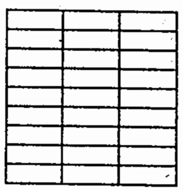
978. Софија је написала број који је за 70 већи од броја који је за 148 мањи од 600. Који број је Софија написала?

IV разред

979. Ако је $a + b = 2\,006\,000$, израчунати $a + 444\,444 + b$.

980. Брат има 20, а сестра 6 година. За колико година ће брат бити два пута старији од сестре?

981. Дужина странице квадрата је 2007 cm. Тај квадрат је паралелним дужима подељен на 27 једнаких правоугаоника, као на слици. Израчунати обим једног од тих правоугаоника.



Сл. уз зад. 981

982. У једној основној школи је 1458 ученика, а у другој 946. Колико ученика треба преместити из једне школе у другу тако да у обе школе буде исти број ученика?

983. Збир три различита четвороцифрена броја је 10 000. Ако је a највећи од та три броја, колика је највећа могућа вредност броја a?

V разред

984. Производ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ поделити бројем 4536.

985. Разлика мера два комплементна угла је $2007'$. Одредити мере тих углова.

986. Одредити све четвороцифрене бројеве дељиве са 15 код којих је цифра десетица 5, а цифра стотина 1.

987. Дуж AB дужине 60 cm тачкама C и D подељена је на три неједнака дела. Растојање средишта крајњих делова је 45 cm. Колика је дужина дужи CD?

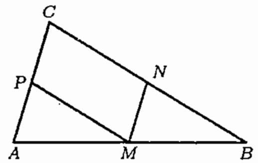
988. Скупови A и B имају исти број елемената. Ако је $A \cup B = \{x \mid x \in \mathbf{N}$ и $x < 18\}$, а $A \cap B = \{1, 2, 7, 13, 17\}$, одредити скупове A и B знајући да је сваки елемент скупа $A \setminus B$ већи од сваког елемента скупа $B \setminus A$.

VI разред

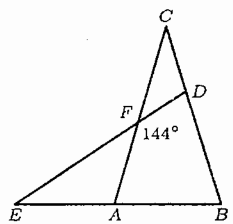
989. Израчунати вредност израза $\dfrac{9 \cdot \left(-2007 + \dfrac{2007}{9}\right)}{(9 \cdot 2007 - 2007) : 9}$.

990. Израчунати збир заједничких целобројних решења неједначина $7x - 16 \geqslant -58$ и $-9x + 73 > 100$.

991. У троуглу ABC тачка M је средиште странице AB. Ако је MN паралелно са AC и MP паралелно са BC (као на слици), доказати да је $\triangle AMP \cong \triangle MBN$.



Сл. уз зад. 991



Сл. уз зад. 993

992. Упоредити бројеве a и b ако је

$$a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots + 2005 - 2006,$$
$$b = 1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \cdots + 2005 - 2007.$$

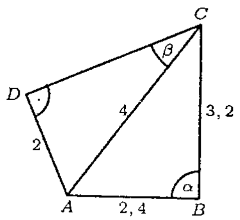
993. Израчунати углове једнакокраких троуглова ABC ($AC = BC$) и BDE ($BE = DE$) (видети слику).

VII разред

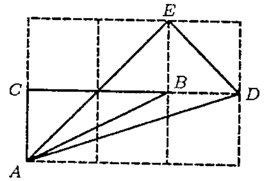
994. Израчунати x ако је $\frac{1}{9} \cdot 3^{10} + \frac{1}{3} \cdot 3^9 - 5 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8$.

995. Поређати бројеве $-5\sqrt{2}$, $4\sqrt{3}$, $-3\sqrt{5}$ и $2\sqrt{6}$ по величини од већег ка мањем.

996. Користећи податке са слике одредити меру угла $\alpha + \beta$.



Сл. уз зад. 996



Сл. уз зад. 1001

997. Упоредити бројеве 15^{15} и 45^{10}.

998. Израчунати површину једнакокраког трапеза $ABCD$ чије су дијагонале узајамно нормалне, а дужина висине је 5 cm.

VIII разред

999. Дужина правоугаоника повећана је за $p\%$, а ширина је смањена за $p\%$. Ако се површина правоугаоника смањила за 16%, одредити p.

1000. У скупу реалних бројева решити неједначину
$$\frac{x}{2\cdot 3} + \frac{x}{3\cdot 4} + \frac{x}{4\cdot 5} + \frac{x}{5\cdot 6} - x \geqslant -\frac{2}{3}.$$

1001. Правоугаоник се састоји од шест квадрата, као на слици. Ако је површина троугла ABC једнака $32\,\mathrm{cm}^2$, израчунати површину троугла ADE.

1002. У скупу реалних бројева решити једначину $x + |x| = \frac{x}{|x|}$.

1003. У простору су дате две различите паралелне праве и три различите тачке. Колико највише равни оне одређују?

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

III разред

1004. Израчунај:

а) $438 + 163$; б) $908 - 159$;
в) $60 : 5 + 5 \cdot 3$; г) $85 + 15 : 5$.

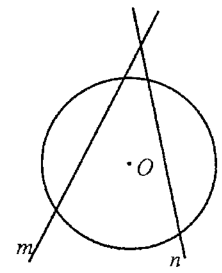
1005. Нацртај на свом папиру круг са центром у тачки O и две праве m и n које се секу ван тог круга (види слику).

а) Нацртај тачку B која припада и нацртаном кругу и правој n.

б) Нацртај праву s која сече праву n у тачки B и пролази кроз центар O круга.

в) Нацртај тачке C и D у којима права s сече кружну линију (кружницу).

г) Шта представља дуж OC за дати круг?



Сл. уз зад. 1005

1006. Симонида је рекла: „За три године ћу имати три пута мање година од своје мајке, која сада има 27 година.“ Колико година Симонида има сада?

1007. Милан је поподне гледао пренос утакмице на ТВ-у од 14 часова и 30 минута до 16 часова и 15 минута, а увече емисију о рибама од 19 часова и 15 минута до 20 часова и 10 минута.

а) Колико је трајао пренос утакмице?

б) Да ли је дуже трајао пренос утакмице или емисија о рибама и за колико?

1008. Број 509 има збир цифара 14 јер је $14 = 5+0+9$. Нађи највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 и најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21, а затим и разлику тако добијених бројева.

IV разред

1009. Између две цифре броја 664422 уписати цифру 3 тако да добијени седмоцифрени број буде:

(а) највећи могући, (б) најмањи могући.

1010. Годишњи комплет Математичких листова састоји се од шест свешчица. Свешчице не морају имати исти број страница, али се зна да свака свешчица има 40 или 44 странице. Одредити може ли годишњи комплет Математичких листова имати укупно 260 страница.

1011. Правоугаоник је са две паралелне праве подељен на три једнака квадрата. Колико пута је обим тог правоугаоника већи од обима једног од квадрата?

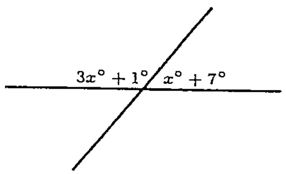
1012. Љиља и Биља заједно имају 228 динара, а Маша и Таша 166. Ако Љиља има 70 динара више од Маше, ко има више динара, Биља или Таша и за колико?

1013. Колико има троцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 4, а колико четвороцифрених природних бројева чији је производ цифара једнак 4?

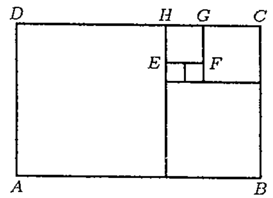
V разред

1014. Цифрама 1, 4, 5 и 7 написати све троцифрене бројеве чије су све цифре међусобно различите, а дељиви су са 3.

1015. Израчунати мере углова на слици.



Сл. уз зад. 1015



Сл. уз зад. 1017

1016. У једној школи сваки ученик учи бар један од два језика, енглески и француски. Енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, а француски $\frac{3}{4}$. Који део свих ученика учи оба језика?

1017. Правоугаоник $ABCD$ подељен је на шест квадрата, као на слици. Одредити површину правоугаоника $ABCD$ ако је обим квадрата $EFGH$ једнак 8 cm.

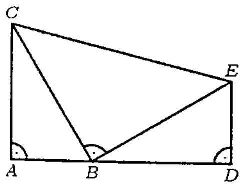
1018. Поређати, од мањег ка већем, бројеве $\frac{2}{9}$, $\frac{25}{111}$ и $\frac{447}{2007}$.

VI разред

1019. Одредити збир целобројних решења неједначине $|x-1| < 6$.

1020. Симетрале углова BAC и ABC троугла ABC секу се под углом од $124°$. Одредити меру угла ACB.

1021. Аца, Бора и Веса су имали неколико кликера у кеси. Аца је пришао и додао онолико кликера колико је било у кеси и још 1 кликер. Затим је Бора пришао и додао два пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 3 кликера. Последњи је пришао Веса и додао три пута онолико кликера колико је у том тренутку било у кеси и још 5 кликера. Ако је на крају у кеси било 149 кликера, колико кликера је било у кеси на почетку?



Сл. уз зад. 1022

1022. На дужи AD дата је тачка B, таква да су троуглови ABC и DEB правоугли, а троугао CBE једнакокрако правоугли, као на слици. Доказати да су троуглови ABC и DEB подударни.

1023. У једној школи има 800 ученика. Доказати да бар три ученика имају рођендан истог датума.

VII разред

1024. Израчунати вредност израза $\sqrt{(\sqrt{5}-5)^2} - (\sqrt{5}-5)$.

1025. У правоуглом троуглу ABC дужине катета AC и BC су редом 30 cm и 40 cm. Ако је C_1 средиште хипотенузе, а C_2 подножје хипотенузине висине, израчунати дужину дужи C_1C_2.

1026. Дужине страница AB и BC правоугаоника $ABCD$ су редом 5 cm и 3 cm. Пресек праве која садржи тачке B и C и симетрале угла BAD је тачка M, а пресек праве која садржи тачке A и D и симетрале угла BCD је тачка N. Израчунати површину четвороугла $ANCM$.

1027. Одредити најмањи природан број који је дељив са 15, а свака цифра му је 0 или 4.

1028. Одредити најмањи природан број који се може добити кад се у изразу $1*2*3*\cdots*2005*2006$ свака звездица замени са $+$ или $-$.

VIII разред

1029. У једначини $3\cdot(x-4k)-2k = 3\cdot(2x-3)+1$ број k је реалан параметар. Одредити све вредности тог параметра за које је решење једначине веће од -2.

1030. У једнакостраничан троугао ABC уписана су три круга, тако да сваки од њих додирује по две странице и уписани круг k тог троугла. Одредити однос површине круга k и збира површина та три уписана круга.

1031. Одредити скуп свих вредности позитивног реалног броја a за које неједначина $|x-2| < a$ има тачно четири решења у скупу целих бројева.

1032. Коцка чија ивица је дужине 10 cm пресечена је једном равни на два квадра. Одредити однос запремина тих квадара ако је однос њихових површина 2 : 3.

1033. На свакој страници квадрата дате су по 3 тачке тако да ниједна од њих није теме квадрата. Колико је троуглова одређено овим тачкама?

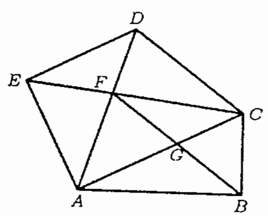
ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

IV разред

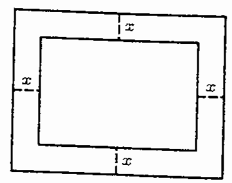
1034. Колико има троуглова на слици? Наведи те троуглове.

1035. На колико начина Воја, Раде и Зоран могу да поделе 7 једнаких кликера, тако да сваки од њих добије бар један кликер?

1036. Травњак је облика правоугаоника чија је краћа страница дужине 16 m. Око травњака је направљена стаза исте ширине на свим правцима (као на слици) чија је површина 176 m^2. Израчунати дужину друге странице правоугаоника



Сл. уз зад. 1034



Сл. уз зад. 1036

(травњака) ако пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе пређе 16 m више него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе.

1037. У шуми је укупно било 565 фазана и јаребица. Када је број фазана порастао 3 пута, а број јаребица порастао 5 пута, било их је укупно 2007. Колико је фазана, а колико јаребица било на почетку у шуми?

1038. Дата је једнакост ВУК + ЛОВАЦ = БАЈКА. Иста слова заменити истом цифром, а различита слова различитим цифрама, тако да једнакост буде тачна. Познато је да слово Л треба заменити цифром 5. Детаљно образложити.

V разред

1039. Одредити све природне бројеве a и b такве да је $\frac{a}{10}+\frac{b}{15}=\frac{5}{6}$ и $\frac{1}{2}<\frac{a}{10}<\frac{3}{4}$.

1040. Стена у облику коцке чија је дужина ивице 10 m исечена је на једнаке коцкице чије су дужине ивица 1 dm. Ређањем тих коцкица једне поред друге поплочана је правоугаона стаза ширине 1 m. За колико сати би ту стазу прешао пешак који сваког сата прелази 5 km?

1041. Одредити све просте бројеве p, q и r такве да је $2p+3q+4r=2006$.

1042. При дељењу бројева 287 и 431 природним бројем n добијају се редом остаци 1 и 2, а при дељењу броја 231 бројем $n+1$ добија се остатак 3. Одредити све такве бројеве n.

1043. Нацртати 6 правих и 7 тачака тако да свака од тих правих садржи тачно 3 од тих тачака.

VI разред

1044. Одредити све парове природних бројева a и b таквих да је $a+b=30$ и $\frac{2005}{2007}=\frac{198}{223}+\frac{a}{b}$.

1045. Нека је $ABCD$ паралелограм код кога је $AB>BC$. Права p која садржи пресек дијагонала O и нормална је на дијагоналу BD сече страницу AB у тачки M и страницу CD у тачки N. Доказати да је четвороугао $MBND$ ромб.

1046. Ако су a и b прости бројеви већи од 3 и $a>b$, доказати да је производ $(a+b)\cdot(a-b)$ дељив са 12.

1047. У оштроуглом троуглу ABC тачке D и E су средишта страница AC и BC. Ако се симетрале углова ADE и BED секу на страници AB, доказати да је $AB=\frac{AC+BC}{2}$.

1048. Одредити колико има једнакокраких троуглова чије странице имају целобројне дужине (у cm), а обим им је једнак 2005 cm.

VII разред

1049. Доказати да је $\sqrt{5+\sqrt{\sqrt{17}+\sqrt{37}}+\sqrt{2}}>3$.

1050. У квадрат чија је дужина странице 10 cm уписан је правилни дванаестоугао, тако да свакој страници квадрата припада по једна страница дванаестоугла. Израчунати дужину странице тог дванаестоугла.

1051. Упоредити бројеве $3^{2007}-2^{3000}$ и $2007\cdot 2^{2007}$.

1052. Испитати да ли постоји троугао чије су дужине висина 1 cm, 2 cm и 3 cm.

1053. Одредити колико има четвороцифрених бројева који се записују помоћу цифара 1, 2 и 3, али тако да се ниједна од тих цифра не појављује више од два пута у запису броја.

VIII разред

1054. Доказати да је број $2007^{2005}-2007$ дељив са 90.

1055. Бочна страна правилне тростране пирамиде је једнакокраки троугао са углом од 30° при врху. Дужина бочне ивице је 8 cm. Израчунати површину те пирамиде.

1056. Израчунати разлику израза $1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2$ и $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+\cdots+2004\cdot2006$.

1057. Хипотенузе BC и AD правоуглих троуглова ABC и ABD секу се у тачки E. Ако је дужина дужи AC једнака 6 cm, а дужина дужи BD једнака 3 cm, израчунати растојање тачке E од дужи AB.

1058. Петоцифрен број је „петоразлик“ ако су му све цифре различите и припадају скупу $\{1,2,3,4,5\}$. Израчунати збир свих таквих бројева.

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ 2007.

VI разред

1059. Одредити све седмоцифрене бројеве који почињу са 7002, а дељиви су и са 5 и са 7 и са 11.

1060. Конструисати паралелограм $ABCD$ чија је дијагонала AC дужине 6 cm, дијагонала BD дужине 4 cm, а висина DD' дужине 3 cm.

1061. На једном тестирању учествовало је 300 ученика, од којих је 10% било дечака. Сви дечаци су освојили исти број бодова, а просечан број бодова девојчица је био 83. Ако је просечан број бодова свих ученика био 84, колико бодова је освојио сваки дечак? (*Напомена.* Просечан број бодова за неколико ученика се рачуна тако што се збир бодова које су освојили ти ученици подели бројем тих ученика.)

1062. Троуглови ABC и $A_1B_1C_1$ су једнакокракоправоугли са хипотенузама AB и A_1B_1, при чему $C_1 \in BC$, $B_1 \in AB$, $A_1 \in AC$. Доказати да је $AA_1 = 2 \cdot CC_1$.

1063. Дато је 2007 различитих простих бројева. Доказати да се бар 502 од тих бројева завршавају истом цифром.

VII разред

1064. Ако за реалне бројеве a и b важи једнакост $ab = a-b$, доказати да вредност израза $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ не зависи ни од a ни од b.

1065. У правоуглом троуглу ABC са правим углом код темена C дата је тачка D таква да је дужина дужи CD једнака 5 cm. Одредити дужину хипотенузе AB ако су и површина троугла ACD и површина троугла BCD једнаке четвртини површине троугла ABC.

1066. Ћирило је написао на табли низ од пет бројева тако да је разлика сваког броја (почев од другог) и његовог претходника један исти број. Онда је дошао Методије и заменио све цифре словима, и то исте цифре истим словима, а различите цифре различитим словима. Тако је добијен запис: A, BC, BD, CE, FF. Које бројеве је написао Ћирило?

1067. Испитати постоји ли природан број n, такав да је збир $2^n + 3^{n+3}$ једнак квадрату неког природног броја.

1068. Нека су D и E тачке у којима уписани круг троугла ABC додирује странице AC и BC, а O центар тог круга. Ако је F пресечна тачка правих DE и AO, израчунати меру угла AFB.

VIII разред

1069. Одредити најмањи реалан број A, такав да за било који реалан број x за који је $|x-2| < 0{,}04$ важи да је $|x^2 - 5| < A$.

1070. Тачка D је средиште странице AC троугла ABC. Симетрала угла ADB сече страницу AB у тачки E, а симетрала угла BDC сече страницу BC у тачки F. Ако је пресек дужи BD и EF тачка M, доказати да је $EM = MF$.

1071. Одредити највећи заједнички делилац свих бројева облика $4^n + 15n - 1$, где је n природан број.

1072. Дужине ивица квадра (у cm) су природни бројеви. Ако се површина тог квадра (у cm^2) изражава истим бројем као збир дужина свих ивица тог квадра, одредити дужине ивица тог квадра.

1073. Раша и Гаша имају чоколаду квадратног облика која се састоји од $27 \cdot 27$ коцкица. На почетку је чоколада код Раше. Онај који држи чоколаду пресече је праволинијски једним потезом ножа онако како жели на два дела, али тако да не „оштети“ ниједну коцкицу. Један део поједе, а други да противнику. Губи онај играч који добије само једну коцкицу. Који од двојице играча може смислити стратегију којом побеђује независно од тога како противник игра и која је то стратегија?

ПРВА СРПСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

1074. У унутрашњој области паралелограма $ABCD$ дата је тачка P таква да је $\angle ADP = \angle ABP$ и да је $\angle DCP = 30°$. Одредити меру $\angle DAP$.

1075. На једној прослави било је укупно 2007 особа. За сваке 1003 од тих особа постојала је бар једна особа од преосталих присутних која се познавала са сваком од те 1003 особе. Доказати да је на прослави постојала особа која се познавала са свим присутним особама.

1076. За позитивне реалне бројеве x, y и z важи да је $xyz = 1$. Доказати да је
$$\frac{2}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{2}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{2}{(z+1)^2 + x^2 + 1} \leqslant 1.$$

1077. Поља таблице димензије 3×3 попуњена су бројевима -1 и 1. У сваком кораку истовремено се у свако поље таблице упише производ свих бројева који су у пољима која са тим пољем имају заједничку ивицу. Да ли се, независно од тога који су бројеви били у пољима таблице на почетку, овим поступком може добити да у свим пољима таблице буде број 1?

1078. Наћи највећи природан број k такав да постоји број облика $1!+2!+\cdots+n!$ $(n \in \mathbf{N})$ чији је делитељ број 3^k. $[m! = m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1]$

1079. Тачке D, E и F припадају редом страницама AB, BC и CA оштроуглог троугла ABC, при чему дужине дужи AE, BF и CD нису веће од $\sqrt{3}$ cm. Доказати да површина троугла ABC није већа од $\sqrt{3}$ cm^2.

ЈЕДАНАЕСТА ЈУНИОРСКА БАЛКАНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

Шумен (Бугарска), 2007.

1080. Нека је a позитиван реалан број, такав да је $a^3 = 6(a+1)$. Доказати да једначина $x^2 + ax + a^2 - 6 = 0$ нема реалних решења.

1081. Нека је $ABCD$ конвексан четвороугао у којем је $\measuredangle DAC = \measuredangle BDC = 36°$, $\measuredangle CBD = 18°$ и $\measuredangle BAC = 72°$. Дијагонале AC и BD секу се у тачки P. Одредити величину $\measuredangle APD$.

1082. У равни је дато 50 тачака, од којих никоје три не припадају истој правој. Свака од тих тачака је обојена једном од четири дате боје. Доказати да постоји боја и најмање 130 разностраничних троуглова чија су темена обојена том бојом.

1083. Доказати да ако је p прост број, тада $7p + 3^p - 4$ није квадрат целог броја.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

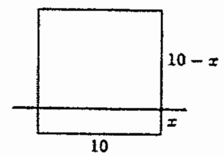
1998. година

1. Како је $9999 : 3 = 3333$ и $1001 : 11 = 91$, то је тражена разлика $3333 - 91 = 3242$.

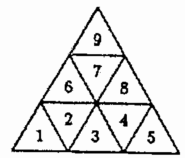
2. Не може, јер од два узастопна природна броја један је увек паран, а други непаран, па је њихов збир увек непаран број.

3. Када би сви дали по 6 динара сакупили би $32 \cdot 6 = 192$ динара. Значи да су преосталих $246 - 192 = 54$ динара обезбедили дечаци. Како су они дали $9 - 6 = 3$ динара више него девојчице њих има $54 : 3 = 18$, а девојчица је $32 - 18 = 14$.

4. Збир обима оба правоугаоника је $40 + 20 = 60$ cm, јер они садрже обим квадрата и још две веће странице правоугаоника (слика). Како је $60 : 5 = 12$ и како је двоструки обим једног правоугаоника једнак троструком обиму другог правоугаоника, то је $O_1 = 36$ cm и $O_2 = 24$ cm.



Сл. уз задатак 4



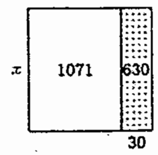
Сл. уз задатак 5

5. Тражени троуглови су: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1236, 3458, 6789$ и 123456789, па их има укупно $9 + 3 + 1 = 13$ (слика).

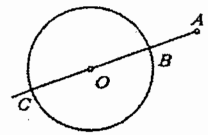
6. Како је $A = \{1, 8, 9, 10\}$, $B = \{4, 11, 12, 13\}$ и $C = \{2, 9, 10, 11\}$, то је $A \cap B = \emptyset$ и $(C \setminus A) \cup (A \setminus C) = \{2, 11\} \cup \{1, 8\} = \{1, 2, 8, 11\}$.

7. $\dfrac{71}{1998} < \dfrac{72}{1998} = \dfrac{8 \cdot 9}{9 \cdot 222} = \dfrac{8}{222} < \dfrac{8}{221}$.

8. Са слике је очигледно да је $x = (1701 - 1071) : 30 = 630 : 30 = 21$. Тражени бројеви су $1071 : 21 = 51$ и 21.



Сл. уз задатак 8



Сл. уз задатак 10

9. Угао $\alpha = 33°18'$; $\beta = 90° - \alpha = 56°42'$; $\gamma = 180° - \alpha = 146°42'$.

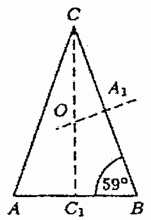
10. Полупречник круга је $OA - AB = 5 - 3 = 2$ cm, па је највеће растојање $AC = AO + OC = 5 + 2 = 7$ cm (слика).

11. Решавањем једначина добија се $a = -1800$ и $b = -2196$. Тада је вредност разломка $\dfrac{a+b}{1998} = \dfrac{-3996}{1998} = -2$.

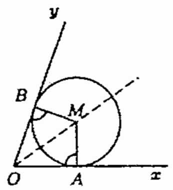
12. Како је $3888 = 2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 2^4\cdot3^5$ то је $m = 3$ и $n = 2\cdot2\cdot3 = 12$. Тада је $3888\cdot m = 2^4\cdot3^5\cdot3 = 2^4\cdot3^6 = (2^2\cdot3^3)^2 = 108^2$ и $3888\cdot n = 2^4\cdot3^5\cdot2\cdot2\cdot3 = 2^6\cdot3^6 = (2^2\cdot3^2)^3 = 36^3$.

13. Аца за један сат окречи $\frac{1}{10}$ стана. Ако Аца ради 6 сати (4 сам и 2 са Бором) окречиће $\frac{6}{10}$ стана. Значи да Бора за два сата окречи $1-\frac{6}{10}=\frac{4}{10}$ стана. Дакле, Бора за један сат окречи $\frac{2}{10}$ стана, што значи да би цео стан самостално окречио за 5 сати.

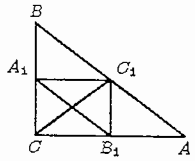
14. Како је $\measuredangle A_1OC_1 = 121°$, то је $\measuredangle A_1OC = 180° - 121° = 59°$ (слика). Тада је $\measuredangle A_1CO = 90° - 59° = 31°$, па је $\measuredangle BCA = 62°$, а $\measuredangle ABC = 59°$. Тада је наспрам већег угла већа страница, па је $AB > AC = BC$.



Сл. уз задатак 14



Сл. уз задатак 15



Сл. уз задатак 19

15. Ако је центар круга M, онда је $AM = BM = r$ (слика). Троуглови AMO и BMO су подударни ($OM = OM$, $AM = BM$ и $\measuredangle A = \measuredangle B = 90°$), па из подударности закључујемо да је и $OA = OB$.

16. Решавањем једначина добијамо $x = 2001$, $y = 669$ и $z = 1998+\sqrt{3}$, па је $x+y+z = 4668+\sqrt{3}$.

17. Из $\dfrac{1998^{1998}+1998^{1999}}{1999^{1999}} = \dfrac{1998^{1998}(1+1998)}{1999^{1998}\cdot1999}$ следи $x^{1998} = \dfrac{1998^{1998}}{1999^{1998}} = (\dfrac{1998}{1999})^{1998}$, па је $x = \dfrac{1998}{1999}$.

18. Како је $\alpha-\beta = 3\gamma$ и како је $\alpha+\beta+\gamma = 180°$, то је $2\alpha+\gamma = 3\gamma+180°$. Дакле, $2\alpha = 2\gamma+180°$, а само $\alpha = \gamma+90°$, што значи да је $\alpha > 90°$, а одатле следи да је дати троугао тупоугли.

19. Тражени круг је круг описан око правоугаоника $A_1CB_1C_1$ (слика). Дијагонала d тог правоугаоника је половина хипотенузе $c = 10$ cm, дакле 5 cm, па је тражени полупречник $r = 2.5$ cm.

20. Тражени производ је мањи од $100\cdot100 = 1000$ и дељив са 45, дакле са 5 и са 9. Како је $9 = 3^2$ то број $*2*\cdot5$ мора бити потпун квадрат мањи од $9999 : 9 = 1111$, што значи да је број $*2*$ мањи од $1111 : 5 = 222$ и дељив са 5. Због тога се $*2*$ завршава 0 или 5. У обзир долазе само бројеви 120, 125 и 220. Како је само $125\cdot5 = 625 = 25^2$ потпун квадрат то је тражени производ $125\cdot45 = 75^2$.

21. Нека је тражени двоцифрени број $\overline{xy}$. Из услова задатка је $9(10x+y) = 100x+y$. Значи да је $10x = 8y$ или $5x = 4y$. Тражене цифре су $x = 4$ и $y = 5$, а тражени број 45, јер је $9\cdot45 = 405$.

22. Дата једначина је еквивалентна са следећом једначином: $|x-1|+|x-3| = 1998$. Добијена једначина има два решења: $x = 1001$ или $x = -997$.

23. Ако је страница квадрата једнака $4x$, онда је $KD = x$ и $CK = 3x$ (слика). Правоугли троуглови AMB и BCK су слични (имају све углове једнаке). Из сличности је $BC : CK = AM : BM = 4 : 3$, па је $AM = 12$ cm. Тада се применом питагорине теореме добија да је $AB = 15$ cm, па је површина квадрата $225\,\text{cm}^2$.

24. Дијагонала квадра $D = \sqrt{1^2+5^2+7^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ cm. Како је $5\sqrt{3}$ cm и дужина дијагонале коцке, то је дужина ивице коцке $a = 5$ cm. Површина и запремина коцке су редом $P = 150\,\text{cm}^2$ и $V = 125\,\text{cm}^3$.

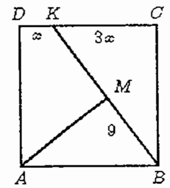
25. Тражени збир је $(11+12+13+14+15)\cdot(11+12+13+14+15) = 65^2 = 4225$.

26. Нека јесен има x дана. Тада зима има $x-1$ дан, лето $x+4$ и пролеће $x+2$ дана. Дакле $x+x-1+x+4+x+2 = 365$, па је $4x+5 = 365$. Одавде је $x = 90$, тј. јесен има 90 дана, зима 89 дана, лето 94 дана и пролеће 92 дана.

27. Нека је чинилац који је остао исти x. Тада је $24\cdot x = 1998 - 1110$. Дакле, $24x = 888$ или $x = 888 : 24 = 37$. Други чинилац је $1998 : 37 = 54$.

28. Све масе од 1 kg до 13 kg: $1 = 1$; $2 = 3-1$; $3 = 3$; $4 = 3+1$; $5 = 9-3-1$; $6 = 9-3$; $7 = 9+1-3$; $8 = 9-1$; $9 = 9$; $10 = 9+1$; $11 = 9+3-1$; $12 = 9+3$; $13 = 9+3+1$.

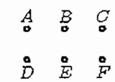
29. Ако дате тачке обележимо са A, B, C, D, E и F, онда су тражени троуглови: ABD, ABE, ABF, ACD, ACE, ACF, ADE, ADF, AEF, BCD, BCE, BCF, BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF (слика). Има их укупно 18.



Сл. уз задатак 23

5 1 6 5 1 6 5 1
5 6 1 5 6 1 5 6
5 2 3 5 2 3 5 2
5 3 2 5 3 2 5 3

Сл. уз задатак 30



Сл. уз задатак 29

30. Има укупно 4 решења (слика).

31. Како је $NZD(6,9,12,15) = 3$, то највећа могућа коцка има ивицу 3 cm, па коцка садржи $2\cdot2\cdot2 = 8$ таквих мањих коцки, а квадар $3\cdot4\cdot5 = 60$ мањих коцки. Како је то укупно 68 мањих коцки то се од њих не може направити нова коцка (могло би ако би их било $64 = 4\cdot4\cdot4$ или $125 = 5\cdot5\cdot5$).

32. Нека је резултат свих наведених операција број $2k$. Тада је први број $2k-2$, други $2k+2$, трећи $2k : 2 = k$ и четврти $2k\cdot2 = 4k$. Њихов збир је $2k-2+2k+2+k+4k = 9k = 1998$. Дакле $k = 1998 : 9 = 222$. Према томе, први број је 442, други 446, трећи 222, а четврти 888.

33. Производ 24 је могућ у комбинацијама: $1\cdot3\cdot8$, $1\cdot4\cdot6$, $2\cdot2\cdot6$, $2\cdot3\cdot4$. Тражени бројеви су 164, 416, 324, 432, јер су само њихови двоцифрени завршеци дељиви са 4.

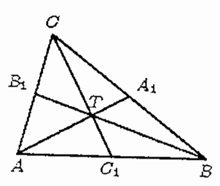
34. Мајка је 25 година старија од Раше. Према томе 1992. године Раша је имао x година, а његова мајка $6x$. Дакле, $6x - x = 5x = 25$, па је $x = 5$. То значи да је 1992. године Раша имао 5 година, а његова мајка 30 година. Сада Раша има 11 година, а његова мајка 36 година.

35. Правоугаоника од 12 поља има три врсте: $1\cdot 12$, $2\cdot 6$ и $3\cdot 4$. Како први правоугаоник не постоји на табли $8x8$, то остају само друга два. Правоугаоника $2\cdot 6$ има $7\cdot 3\cdot 2=42$, а правоугаоника $3\cdot 4$ има $6\cdot 5\cdot 2=60$, па је укупан број тражених правоугаоника 102.

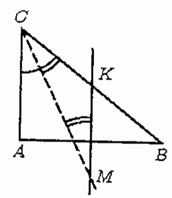
36. Нека је у понедељак било $3x$ гледалаца. У уторак је било за 1/3 више, дакле $4x$ гледалаца. У среду је опет било $3x$ гледалаца, што значи да их је било за 1/4 мање него у уторак.

37. Најмањи такав број био би број облика $\overline{1abc}$. Тада је $a+b+c$ једнако 8, или 17 или 26, $a\cdot b\cdot c=180=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5=4\cdot 5\cdot 9=6\cdot 6\cdot 5$. Дакле најмањи такав број је 1566, јер 1459 не долази у обзир пошто није дељив са 9.

38. Нека је T тежиште троугла ABC (слика). Из троугла ATC_1 је $\frac{2}{3}t_a+\frac{1}{3}t_c>\frac{c}{2}$. Слично се из троуглова BTA_1 и CTA_1 добија да је $\frac{2}{3}t_b+\frac{1}{3}t_a>\frac{a}{2}$ и $\frac{2}{3}t_c+\frac{1}{3}t_b>\frac{b}{2}$. Сабирањем добијених неједнакости добија се тражена неједнакост.



Сл. уз задатак 38



Сл. уз задатак 39

39. Нека се симетрала угла γ и симетрала странице AB секу у тачки M и нека симетрала странице AB сече страницу BC у тачки K (слика). Како је $\angle ACM=\angle KCM=\angle CMK=\frac{\gamma}{2}$, то је права KM паралелна са AC (паралелни краци). Како је права KM нормална на AB, то је и права CA нормална на AB, па је троугао ABC правоугли.

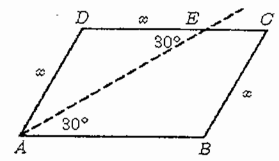
40. Све ученике поделимо у 7 категорија: прву чине они који су поклонили једну књигу; другу они који су поклонили две књиге: ... седму чине они који су поклонили 7 књига (у осмој категорији је само Дуле, јер је он поклонио највише књига). Како имамо 29 ученика (Дула не рачунамо) распоређених у 7 категорија, то на основу Дирихлеовог принципа $29:7=4(1)$ постоји категорија у којој има бар 5 ученика.

41. Ако је $x=19{,}9819981998\ldots$ онда је $10000x=199819{,}9819981998\ldots$, па је $10000x-x=9999x=199800$. Значи $x=\frac{199800}{9999}=19\frac{1091}{1111}$.

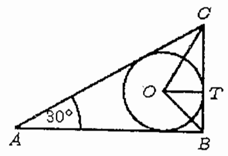
42. Нека је $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}=\overline{xxx}=111x$ $(1\leqslant x\leqslant 9)$. Дакле $n(n+1)=222x=2\cdot 3\cdot 37\cdot x$. Како је лева страна производ два узастопна природна броја и како је 37 прост број то $2\cdot 3\cdot x$ мора бити 36 или 38. Како 38 није дељиво са 3, у обзир долази само 36, па је $x=6$, а $n=36$.

43. Нека је $DE=x$ (слика). Тада је $CE=30-x$. Из услова задатка $P_{ABCE}=\frac{30+30-x}{2}\cdot h=2P_{\triangle ADE}=2\cdot\frac{x}{2}h$, па је $2x=60-x$. Дакле $x=20\,\mathrm{cm}$. Тада је очигледно $h=10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и $P=300\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

44. Нека је $\angle BOT=3x$ (слика). Тада је $\angle COT=4x$, па је $\angle TBO=90^\circ-3x$ и $\angle TCO=90^\circ-4x$. Одавде следи да је $30^\circ+180^\circ-6x+180^\circ-8x=180^\circ$. Дакле



Сл. уз задатак 43



Сл. уз задатак 44

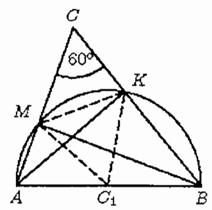
$14x=210^\circ$, па је $x=15^\circ$, одакле добијамо да је $\angle ABC=90^\circ$ и $\angle BCA=60^\circ$. Како је $OT=3\,\mathrm{cm}$, то је $OC=6\,\mathrm{cm}$, а $TC=\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, па је $BC=3+\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

45. I решење. Ако би сви ученици имали мање или једнако 10 динара, онда сви укупно не би имали више од 55 динара, јер је $1+2+\cdots 10=55$. Дакле бар један ученик има 11 или више динара. Ако први ученик има 1 динар, други 2 динара, трећи 3 динара, онда седми има најмање 7, осми најмање 8, девети најмање 9, а десети најмање 11 динара (јер сви морају имати различите суме новца). Последња четири имају заједно најмање $11+9+8+7=35$ динара, према томе преосталих 6 ученика имају највише 65, дакле мање од 66 динара.

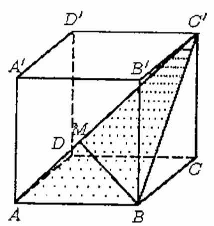
II решење. Ако 10 ученика има 100 динара, тада „свако“ од њих има просечно 10 динара. Зато шесторица „најсиромашнијих“ не могу имати више од 60 динара.

46. Решавањем дате једначине по x добија се да је $x=2+\frac{p}{3}$. Како x може бити само -1, 0 или 1, то је $p=-9$, $p=-6$ или $p=-3$. Дакле, $p\in\{-9,-6,-3\}$.

47. Ако је $h_c=h_a+h_b$, онда је $\frac{2P}{c}=\frac{2P}{a}+\frac{2P}{b}$ или $\frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$. Како најкраћој страници одговара највећа висина и како је највећа висина h_c, то је најмања страница c па је $\frac{1}{2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ или $ab-2a-2b+4=(a-2)(b-2)=4$. Једначина има три пара решења $(6,3)$, $(4,4)$ и $(3,6)$ од којих је само $a=b=4\,\mathrm{cm}$ право решење. Код осталих не добијамо троугао, јер је збир две странице мањи од треће $(2+3<6)$. Површина добијеног троугла је $\sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 48



Сл. уз задатак 49

48. Како је $\angle AMB=\angle AKB=90^\circ$, то је C_1 центар кружнице која садржи тачке A, M, K и B (слика). Дакле, $MC_1=KC_1$. Ако је $\angle ACB=60^\circ$, онда је $\angle CAK=\angle CBM=30^\circ$. Тада је $\angle MC_1K=60^\circ$ (као централни угао над тетивом KM), па је троугао MKC_1 једнакостраничан.

49. Нека је мерни број ивице дате коцке a (слика). Тада је $AB=a$ и у троуглу ABC' страница $AC'=a\sqrt{3}$, а $BC'=a\sqrt{2}$. Како је троугао ABC' правоугли, његова површина је $\frac{AB\cdot BC'}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{2}=\frac{AC'\cdot BM}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot 7$. Одавде је $a=7\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm. Површина коцке је $P=6a^2=6\cdot 49\cdot\frac{3}{2}=441\,\mathrm{cm}^2$.

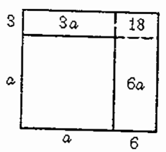
50. Запремина коцке је $14\cdot 14\cdot 14=2744\,\mathrm{m}^3$ и коцка се може изделити на 2744 коцке странице 1 m, чије су стране паралелне странама коцке сира. Како у коцки сира има 1998 мишева, онда на основу Дирихлеовог принципа постоји бар једна коцка странице 1 m унутар које се не налази ниједан миш.

51. Ако првобитни број означимо са $10x$, тада је новодобијени број x. Дакле, $10x-x=9x=1998$, па је $x=1998:9=222$. Тражени број је $10x=2220$.

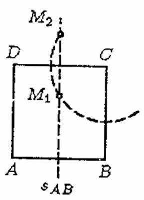
52. Ако Жарко има x динара, Лека има три пута више дакле $3x$. Када потроше по 10 динара, Жарко ће имати $x-10$, а Лека $3x-10$. Из услова задатка је $3x-10=4(x-10)=4x-40$. Решавањем претходне једначине добија се $x=30$, па је Жерко имао 30, а Лека 90 динара.

53. Ради се о сабирању $ABBA+CDC=1998$. Како је $A=1$, добијамо $1BB1+CDC=1998$, па је $C=7$. Онда је $1BB1+7D7=1998$, одакле је очигледно $B=2$ и $D=7$. Дакле $1221+777=1998$.

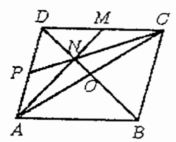
54. Нека је страница датог квадрата a (слика). Када се једна страница квадрата повећа за 3 cm, а друга за 6 cm, онда се површина повећа за $3\cdot a+6\cdot a+3\cdot 6=1998$, па је $9a+18=1998$. Одавде је $9a=1980$, тј. $a=1980:9=220$ cm.



Сл. уз задатак 54



Сл. уз задатак 58



Сл. уз задатак 63

55. Ако су учествовала 4 такмичара (два оца и два сина) онда је одиграно 6 партија. У случају да је било 3 такмичара (деда, отац и син) одигране су 3 партије.

56. За један дан Душко заврши 1/12, Ташко 1/15, а Рашко 1/20 посла, а сви заједно $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$ посла. За 4 дана, завршиће 4/5 посла, а преосталу 1/5 Ташко ће завршити за $\frac{1}{5}:\frac{1}{15}=\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{1}=3$ дана. Дакле Ташко је радио укупно $4+3=7$ дана.

57. Како је $1998=27\cdot 2\cdot 37$, то су могући следећи случајеви: $\frac{a}{27}+\frac{b}{74}=\frac{145}{1998}$, $\frac{a}{37}+\frac{b}{54}=\frac{145}{1998}$ и $\frac{a}{74}+\frac{b}{54}=\frac{145}{1998}$. Тада је $74a+27b=145$, $54a+37b=145$, $27a+37b=145$. Прва једначина нема решење. Решење друге једначине је $a=2$, $b=1$, а тражени разломци су $\frac{2}{37}$ и $\frac{1}{54}$. Решење треће једначине је $a=4$, $b=1$, а тражени разломци су поново $\frac{4}{74}=\frac{2}{37}$ и $\frac{1}{54}$.

58. Све тачке које су једнако удаљене од темена A и B припадају симетрали дужи AB (слика). Све тачке које су од темена C удаљене 3 cm припадају кружници са центром у тачки C полупречника 3 cm. Постоје две такве тачке M_1 и M_2.

59. Како је збир цифара броја JOBAH једнак 10 и како су све цифре J, O, B, A и H различите једина могућност је $0+1+2+3+4=10$. Тражени збир је тада очигледно 44444 па је $\text{JOBAH}\in\{10243, 14203, 30241, 34201\}$.

60. Обележимо златнике словима a,b,c,d,e,f,g,h. На један тас ставимо златнике a,b и c, а на други тас d,e и f. Разликујемо три случаја:

(1) Ако је $a+b+c>d+e+f$, неисправан златник је d,e или f. У другом мерењу упоређујемо d и e: ако је $d\neq e$, неисправан је лакши златник, а ако је $d=e$, неисправан је златник f.

(2) Ако је $a+b+c=d+e+f$, неисправан је лакши од два преостала златника.

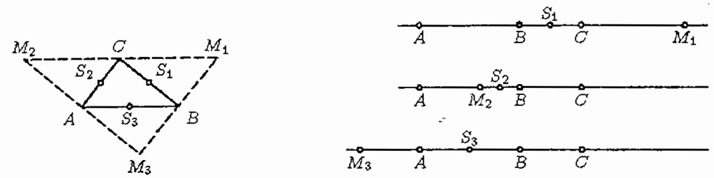
(3) Ако је $a+b+c<d+e+f$, као у случају (1), једним мерењем проналазимо лакши златник међу златницима a, b, c.

61. Очигледно је $\frac{3}{4}$ прве цистерне једнако са $\frac{4}{5}$ друге и $\frac{4}{7}$ треће цистерне, тј. $\frac{12}{16}$ прве, једнако је са $\frac{12}{15}$ друге, односно $\frac{12}{21}$ треће цистерне. Дакле, количине млека у цистернама се односе као $16:15:21$, па је $16k+15k+21k=52k=780$. Одавде је $k=15$, што значи да је у првој цистерни било 240, у другој 225, а у трећој 315 литара млека.

62. Како је $12=2\cdot 2\cdot 3=(-2)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 2\cdot 3$ једина могућа комбинација пет различитих целих бројева чији је производ 12, то је $(4-a)+(4-b)+(4-c)+(4-d)+(4-e)=(-2)+(-1)+1+2+3=3$, односно $20-(a+b+c+d+e)=3$, па је $a+b+c+d+e=20-3=17$.

63. Нека је тачка O пресек дијагонала AC и BD паралелограма $ABCD$ (слика). Тада је $AO=CO$. У троуглу ACD праве AM и DO су тежишне дужи. Значи да је тачка N тежиште. Тада је и дуж CP тежишна дуж (јер садржи тежиште), а то значи да дуж CP дели наспрамну страницу AD на два једнака дела, односно $AP=PD$.

64. Задатак има 3 решења. Тачка M је централно симетрична слика једне од тачака A, B, C, у односу на средиште дужи одређене са преостале две тачке (слика). Треба разликовати случајеве када тачке A, B и C припадају једној правој и када то није случај.



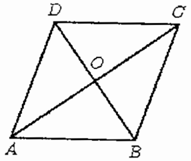
Сл. уз задатак 64

65. Израз $(12\frac{1}{2}\cdot 2+0.2\cdot 25):5-5\cdot(1\frac{8}{15}:\frac{2}{3}-1.1)$ има вредност $(25+5):5-5\cdot(\frac{23}{15}\cdot\frac{3}{2}-\frac{11}{10})=6-6=0$.

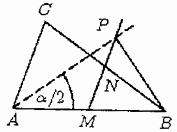
66. Како је $n^3+1997n+1998=n^3-n+1998n+1998=n(n^2-1)+1998(n+1)=(n-1)n(n+1)+6\cdot 333(n+1)$, то је дати број дељив са 6 јер је $(n-1)n(n+1)$ производ три узастопна природна броја.

67. Нека је тачка O пресек дијагонала ромба (слика). Површина датог ромба је $P=4\cdot(AO\cdot BO):2=2\cdot AO\cdot BO$. Из правоуглог троугла AOB следи да је $AB^2=AO^2+BO^2=81$. Како је $AC+BD=24$ cm то је $AO+BO=12$ cm и $(AO+BO)^2=AO^2+2\cdot AO\cdot BO+BO^2=AO^2+BO^2+P=12^2=144$. Одавде је $P=144-81=63\,\mathrm{cm}^2$.

68. Нека је број страница датог конвексног многоугла једнак је n. Тада је $\frac{2n(2n-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} = 1998$. Из добијене једнакости следи $4n^2-6n-n^2+3n = 3n^2-3n = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot37$ или $3n(n-1) = 2\cdot3\cdot3\cdot\cdot37$. Дељењем са 3 добијамо $n(n-1) = 2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot37 = 37\cdot36$. Одавде је $n = 37$, а $2n = 74$. Збир унутрашњих углова првог многоугла је $35\cdot180°$, а другог је $72\cdot180°$, па је тражена повећање $37\cdot180° = 6660°$.



Сл. уз задатак 67



Сл. уз задатак 69

69. Како су тачке M и N редом средишта страница AB и BC троугла ABC, то је MN средња линија троугла, па је MN, а и MP паралелно са AC (слика). Тада је $\angle MAP = \angle CAP = \angle MPA = \frac{\alpha}{2}$ (као углови са паралелним крацима). Дакле, троугао AMP је једнакокрак и $AM = MP$. Како је $AM = MB = MP$, то је и троугао MBP једнакокрак. Како је $\angle BMP = \alpha$, то је $\angle MBP = \angle MPB = 90° - \alpha/2$. Тада је $\angle APB = \alpha/2 + 90° - \alpha/2 = 90°$.

70. Цифре A, A, B и C се могу распоредити на 12 начина: $AABC$, $AACB$, $ABAC$, $ABCA$, $ACAB$, $ACBA$, $BAAC$, $BACA$, $BCAA$, $CAAB$, $CABA$, $CBAA$. У конкретном случају постоје три могуће комбинације цифара A, A, B, C: 1, 1, 8, 9; 8, 8, 1, 9 и 9, 9, 1, 8. Дакле, укупан број таквих четвороцифрених бројева је $12\cdot3 = 36$.

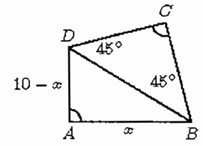
71. Значи да треба одредити све парове природних бројева (x, y) који задовољавају дату једначину, јер су у првом квадранту обе координате позитивне. Како је $4x + 7y = 1998$, то је $4x = 1996 - 8y + y + 2$. Дакле, $x = 499 - 2y + \frac{y+2}{4}$. Број x је цео само, ако је $y+2$ дељиво са 4, тј. ако је $y = 4k-2$. Тада је $x = 499 - 8x + 4 + k = 503 - 7k$. Решење једначине тада можемо приказати таблицом на наредној страни.
Из таблице је јасно да тражених тачака (x, y) има тачно 71. Тражени број тачака се може добити и из неједнакости $0 < x = 503 - 7k$ или $0 < y = 4k - 2 < 285$, $k \in N$.

k	0	1	2	...	70	71	72
$x = 503 - 7k$	503	496	489	...	13	6	-1
$y = 4k - 2$	-2	2	6	...	278	282	286

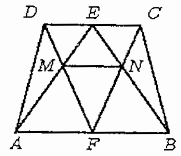
72. Очигледно су златници само у непарним редовима па је укупан број златника $1+3+5+\cdots+2k-3+2k-1 = 625$. Дакле, $2k\cdot k:2 = k^2 = 625$, па је $k = 25$. Значи да је последњи ред са златницима био $2\cdot25-1 = 49$–ти. Према томе, сребрњаци се завршавају или са 48-им или са 50-им редом. У првом случају сребрњака има $2+4+6+\cdots+48 = 50\cdot12 = 600$, а у другом случају $600+50 = 650$.

73. Ако је $AB = x$, онда је $AD = 10 - x$ (слика). Троугао ABD је правоугли, па је $P_{\triangle ABD} = \frac{AB\cdot AD}{2} = \frac{x\cdot(10-x)}{2} = 5x - \frac{x^2}{2}$. Троугао BCD је једнакокрако-правоугли, па је $P_{\triangle BCD} = \frac{BC\cdot CD}{2} = \frac{BC^2}{2} = \frac{BD^2}{4}$. Користећи Питагорину теорему, добија се

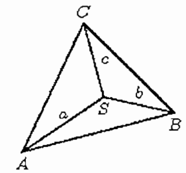
$BD^2 = AB^2 + AD^2 = x^2 + (10-x)^2 = 2x^2 - 20x + 100$, па је $P_{\triangle BCD} = \frac{x^2}{2} - 5x + 25$. Површина четвороугла $ABCD$ је збир површина троуглова ABD и BCD тј. $P = 5x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 5x + 25 = 25\,\text{cm}^2$.



Сл. уз задатак 73



Сл. уз задатак 74



Сл. уз задатак 75

74. Троуглови AMF и EMD су слични јер су им сви углови једнаки (слика). Из сличности следи да је $AM : ME = 6a : 2a = 3 : 1$. Из сличности троуглова FBN и CEN добијамо $BN : NE = 3 : 1$. Како је $AM : ME = BN : NE = 3 : 1$, то је $AB \parallel MN$. Тада су слични и троуглови ABE и EMN (сви углови су им једнаки). Из сличности уочених троуглова је $AB : MN = AE : ME = (AM + ME) : ME = 4 : 1$. Из ове релације је $MN = 12a : 4 = 3a$.

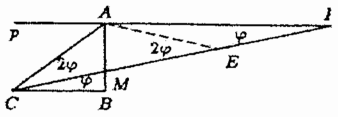
75. Нека је $AS = a$, $BS = b$ и $CS = c$ (слика). Тада је запремина дате пирамиде $V = \frac{ab}{2}\cdot\frac{c}{3} = \frac{abc}{6}$. Како је $P_{\triangle ABS} = \frac{ab}{2} = 54$, $P_{\triangle BCS} = \frac{bc}{2} = 96$ и $P_{\triangle CAS} = \frac{ac}{2} = 72$, то се множењем ових трију релација добија $a^2b^2c^2 : 8 = 54\cdot96\cdot72$ или $a^2b^2c^2 = 8\cdot9\cdot6\cdot6\cdot16\cdot8\cdot9$. Дакле, $abc = 8\cdot9\cdot6\cdot4$, и $ab = 108 = 2\cdot9\cdot6$, па је $c = 16\,\text{cm}$. Слично је $a = 8\cdot9\cdot6\cdot4 : (2\cdot6\cdot16) = 9\,\text{cm}$ и $b = 12\,\text{cm}$. Користећи Питагорину теорему добија се да је $AB = 15\,\text{cm}$, $BC = 20\,\text{cm}$ и $CA = \sqrt{337}\,\text{cm}$.

76. Очигледно је број јабука које има Гоца дељив са 3, а број јабука које има Нина дељива са 2. С друге стране, тај број је када се јабуке саставе дељив са 5. То значи да су Гоца и Нина имале по $30k$ јабука. Ако продају појединачно, Гоца ће зарадити $10k$ динара, а Нина $15k$ динара, што укупно износи $25k$ динара. Ако продају заједно, онда ће зарада бити $(60k:5)\cdot2 = 24k$ динара. Како је $25k = 24k + 4$, то је $k = 4$, па су и Гоца и Нина имале по 120 јабука.
Задатак се може решити и једначином: ако су Гоца и Нина имале по x јабука, онда је $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = \frac{2x}{5}\cdot2 + 4$, одакле је $x = 120$.

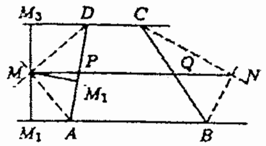
77. Ако Пеђа стазу претрчи за 24 минута, онда он за 9 минута претрчи $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ стазе. Дакле, за то исто време Дејан претрчи $\frac{5}{8}$ стазе. Ако трче у истом смеру, то значи да сваких 9 минута Дејан побегне Пеђи за $\frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$ дужине стазе. То значи да ће му цео круг побећи за $4\cdot9 = 36$ минута. За 36 минута Пеђа претрчи један и по круг, а Дејан два и по круга. То значи да ће се у почетној тачки наћи поново после 72 минута, када Пеђа претрчи 3, а Дејан 5 кругова.

78. Нека је тачка E средиште дужи KM, а $\angle KCB = \varphi$ (слика). Како је троугао AMK правоугли, то је $KE = ME = AE = AC$. Дакле, троугао ACE је једнакокрак ($AE = AC$). Како је $\angle KCB = \varphi$, то је и $\angle AKC = \varphi$ (као углови са паралелним крацима). Тада је у једнакокраком троуглу AEK и $\angle EAK = \varphi$. Тада је $\angle AEC =$

2φ (као спољашњи несуседни угао за троугао AEK), па је и $\measuredangle ACE = 2\varphi$. Коначно, $\measuredangle ACB = \measuredangle ACE + \measuredangle KCB = 2\varphi + \varphi = 3\varphi = 3\measuredangle KCB$.



Сл. уз задатак 78



Сл. уз задатак 79

79. I решење. Тачка M припада симетрали спољашњег угла код темена A па је M једнако удаљена од правих AB и AD, тј. $MM_1 = MM_2$ (слика). Међутим, тачка M припада и симетрали спољашњег угла код темена D, па је једнако удаљена од правих AD и CD, тј. $MM_2 = MM_3$. Одавде следи да је $MM_1 = MM_3$, тј тачка M је једнако удаљена од правих AB и CD, што значи да припада правој која саржи средњу линију датог трапеза. На сличан начин се доказује да и тачка N припада правој која садржи средњу линију трапеза.

Нека права MN сече краке AD и BC датог трапеза у тачкама P и Q. Троуглови ADM и BCN су правоугли (доказати), а тачке P и Q су средишта хипотенуза, па је $AD = 2MP$ и $BC = 2NQ$. Како је $AB + CD = 2PQ$, то је обим датог трапеза $O = AD{+}AB{+}CD{+}BC = 2MP{+}2PQ{+}2QN = 2(MP{+}PQ{+}QN) = 2{\cdot}MN = 1998\,\mathrm{cm}$.
II решење. Слично можемо дефинисати тачке N_1, N_2 и N_3. Тада је $2MN = M_1N_1 + M_3N_3 = M_1A{+}AB{+}BN_1{+}M_3D{+}DC{+}CN_3 = AM_2{+}AB{+}BN_2{+}M_2D{+}DC{+}CN_2 = AB + CD + AD + BC$.

80. Нека је Миле продао x килограма пасуља. Укупан приход је $8x$. Трошкови су: порез, који износи $0.23 \cdot 8x = 1.84x$, затим набавка пасуља за 5 динара за који је плаћено $(x-163)\cdot 5 = 5x-815$ динара и набавка скупљег пасуља за који је плаћено $163 \cdot 10 = 1630$ динара. Дакле, $8x - 1.84x - (5x - 815) - 1630 = 1998$, одакле се добија $x = 2415\,\mathrm{kg}$.

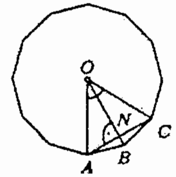
81. Нека су дати бројеви $n-2$, $n-1$, n, $n+1$ и $n+2$. Збир њихових квадрата је $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 2$. Број $5n^2$ се завршава цифрама 0 или 5 па се број $5n^2 + 2$ завршава цифрама 2 или 7. Како се квадрат ниједног природног броја не завршава цифрама 2 или 7, то збир квадрата пет узастопних природних бројева не може бити потпун квадрат.

82. Ради се о сабирању $1000{+}100a{+}10b{+}c{+}1000c{+}100b{+}10a{+}1 = 1000b{+}100b{+}10d{+}d$. После сређивања добијамо једнакост $1001{+}110a{+}110b{+}1001c = 1100b{+}11d$. Очигледно је и лева и десна страна једнакости дељива са 11, па је $91 + 10a + 10b + 91c = 100b + d$, тј., $90 + 10a + 90c + c + 1 = 90b + d$. Одавде је јасно да је $d = c + 1$, па се дељењем са 10 добија $9 + a + 9c = 9b$, одакле је, због дељивости са 9, a једнако 0 или 9.
Ако је $a = 0$, онда је $b = c + 1 = d$, што је немогуће, јер су бројеви b и d по услову задатка различити. Дакле, $a = 9$, па је $b = c + 2$. Како је $c \neq 0$, то добијамо следећа решења:
(1) $c = 1, b = 3, d = 2, a = 9$; тј. $1931 + 1391 = 3322$;
(2) $c = 2, b = 4, d = 3, a = 9$; тј. $1942 + 2491 = 4433$;
(3) $c = 3, b = 5, d = 4, a = 9$; тј. $1953 + 3591 = 5544$;
(4) $c = 4, b = 6, d = 5, a = 9$; тј. $1975 + 5791 = 7766$;
(5) $c = 5, b = 7, d = 6, a = 9$; тј. $1975 + 5791 = 7766$;
(6) $c = 6, b = 8, d = 7, a = 9$; тј. $1986 + 6891 = 8877$.

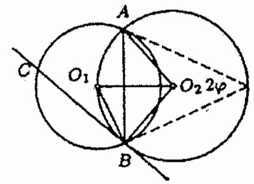
83. Површина $P = 6 \cdot P_{OABC} = 6\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = 3(2+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$ (слика). Применом Питагорине теореме на правоугли троугао ABM добијамо

$$(AB)^2 = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 \left(1 + (2-\sqrt{3})^2\right) = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})(1 + 4 - 4\sqrt{3} + 3) = 1.$$

Према томе, $AB = 1\,\mathrm{cm}$, а обим правилног дванаестоугла је $O = 12\,\mathrm{cm}$.



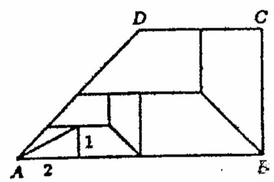
Сл. уз задатак 83



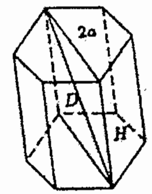
Сл. уз задатак 84

84. Нека су O_1 и O_2 редом центри кружница k_1 и k_2 и нека је φ угао између тангенте CB и тетиве O_1B, тј. $\measuredangle O_1BC = \varphi$ (слика). Тада је периферијски угао над тетивом O_1B једнак φ, а централни $\measuredangle BO_2O_1 = 2\varphi$. Тада је $\measuredangle AO_2B = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi$, па је периферијски угао над тетивом AB кружнице k_2 једнак 2φ. Угао између тетиве AB и тангенте BC је тада $\measuredangle ABC = 2\varphi$. Тада је $\measuredangle ABO_1 = \measuredangle ABC - \measuredangle O_1BC = 2\varphi - \varphi = \varphi$. Из подударности једнакокраких троуглова AO_1B и CO_1B следи да је $AB = BC$.

85. Дати трапез поделимо на четири подударна трапеза, а затим сваки од добијених трапеза поделимо опет на четири подударна трапеза (слика). Како имамо 17 тачака, а 16 трапеза, на основу Дирихлеовог принципа постоји трапез унутар кога се налазе бар две тачке датог скупа. Како је највеће растојање унутар једног од 16 добијених подударних трапеза, дијагонала трапеза која је једнака $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, то увек постоје две тачке чије растојање није веће од $\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 85



Сл. уз задатак 88

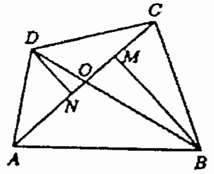
86. Како је $x^2{+}y^2 = 4x{+}4y{-}3$, то је $(x{-}2)^2{+}(y{-}2)^2 = 5$. Слично, из $y^2{+}z^2 = 4y{+}4z{+}5$ следи $(y-2)^2 + (z-2)^2 = 13$, а из $z^2 + x^2 = 4z + 4x + 2$ добијамо $(z-2)^2 + (x-2)^2 = 10$. Нека је $(x-2)^2 = a$, $(y-2)^2 = b$ и $(z-2)^2 = c$. Тада је $a + b = 5$, $b + c = 13$ и $c + a = 10$. Решење добијеног система је $a = 1$, $b = 4$ и $c = 9$. Тада је $(x-2)^2 = 1$, $(y-2)^2 = 4$ и $(z-2)^2 = 9$. Зато је $x - 2 \in \{1, -1\}$, $y - 2 \in \{2, -2\}$, $z - 2 \in \{3, -3\}$, односно $x \in \{3, 1\}$,

$y \in \{4, 0\}$, $z \in \{5, -1\}$. Постоји осам решења датог система: $(3,4,5)$, $(3,4,-1)$, $(3,0,5)$, $(3,0,-1)$, $(1,4,5)$, $(1,4,-1)$, $(1,0,5)$, $(1,0,-1)$.

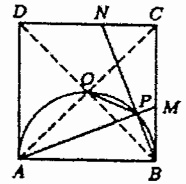
87. Ако је k неки природан број, онда су остаци при дељењу броја k са 15 једнаки 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 и 14. Тада су остаци при дељењу броја k^4 са 15 редом 0, 1, 1, 6, 1, 6, 1, 1, 6, 10, 1, 6, 1, 1. Дакле, појављују се само 4 различита остатка: 0, 1, 6 и 10. Како имамо 5 различитих природних бројева, а 4 остатка, онда на основу Дирихлеовог принципа, постоје два броја чији су остаци једнаки, тј. постоје бројеви $m^4 = 15a + r$ и $n^4 = 15b + r$. Тада је $m^4 - n^4 = 15(a - b)$, што је очигледно дељиво са 15.

88. Дужа дијагонала призме је дефинисана релацијом $D^2 = (2a)^2 + H^2$ (слика). Како је $a + H = 10$, то је $D^2 = 4a^2 + (10-a)^2 = 5(a-2)^2 + 80$. Дужа дијагонала призме D је најмања и износи $\sqrt{80} = 4\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ када је $a - 2 = 0$, тј. када је $a = 2\,\mathrm{cm}$ и $H = 8\,\mathrm{cm}$. Површина добијене призме је $P = (96 + 12\sqrt{3}) = 12(8+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$, а запремина је $V = 48\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$.

89. Нека је N подножје нормале из тачке D на дијагоналу AC (слика). Тада су троуглови OBM и ODN слични, јер је $\angle BOM = \angle DON$ (унакрсни углови) и $\angle DNO = \angle BMO = 90°$. Из уочене сличности је $BM : BO = DN : DO = 2k$. Тада је $DN = 2k \cdot DO$, па је $P_{ABCD} = P_{ABC} + P_{ACD} = \dfrac{AC \cdot BM}{2} + \dfrac{AC \cdot DN}{2} = \dfrac{AC}{2}(2k \cdot BO + 2k \cdot DO) = k \cdot AC(BO + DO) = k \cdot AC \cdot BD$, што је и требало доказати.



Сл. уз задатак 89



Сл. уз задатак 90

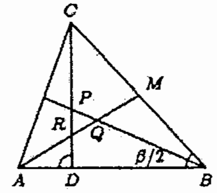
90. Троуглови ABM и BCN су подударни ($AB = BC$, $BM = CN$ и $\angle ABM = \angle BCN = 90°$) (слика). Из подударности је $\angle BAM = \angle CBN$, па пошто су краци BA и CB нормални, то су и краци AM и BN такође нормални, што значи да је угао $\angle APN = \angle APB = 90°$. Како је и $\angle AOB$ прав, то тачке A, O, P и B припадају једној кружници чији је пречник AB. Тада је $\angle APO = \angle ABO$ (као периферијски углови над тетивом AO) и како је $\angle ABO = 45°$, то је и $\angle APO = 45°$. Дакле, $\angle NPO = \angle APN - \angle APO = 90° - 45° = 45°$, па је права BO симетрала угла $\angle APN$.

91. Из услова задатка да две јабуке теже као 3 крушке и да три јабуке теже као 4 поморанџе следи да 6 јабука тежи као 9 крушака и да 6 јабука теже као 8 поморанџи. Одавде следи да 9 крушака теже као 8 поморанџи. Из услова да 6 крушака кошта као 5 поморанџи, закључујемо да 18 крушака кошта као 15 поморанџи. Како 18 крушака тежи као 16 поморанџи, закључујемо да је килограм поморанџи скупљи од килограма крушака.

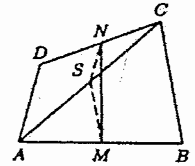
92. а) На основу услова задатка добијамо да су бројеви a, b и c редом једнаки: $a = \overline{ABCD}$; $b = \overline{ADDE}$ и $c = \overline{DBCA}$. Како је $\overline{ABCD} + \overline{ADDE} = \overline{DBCA}$, прво закључујемо да је $D = 9$. Даље је $A = 4$. Из $D + E = 10 + A$ следи да је $E = 5$, па је $b = 4995$.

б) Како B и C могу бити произвољни бројеви из скупа $\{0, 1, 2, \dots 9\}$, то постоји 100 могућности за број a.

93. Претпоставимо супротно, тј. да је троугао PQR једнакостраничан (слика). Тада је у правоуглом троуглу $\angle BPD = 60°$, па је $\dfrac{\beta}{2} = 30°$. Даље, нека је тачка M средиште странице BC. Тада је у троуглу BMQ угао $\angle BQM = 60°$, па је угао $\angle QMB = 90°$, тј. AM је нормално на BC и троугао ABC је једнакокраки, са једним углом на основици једнаким $60°$. Дакле, троугао ABC је једнакостраничан, што је супротно претпоставци задатка.



Сл. уз задатак 93



Сл. уз задатак 94

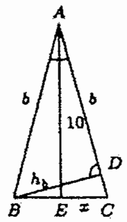
94. Нека је S средиште дијагонале AC (слика). Тада је MS средња линија троугла ABC, а NS средња линија троугла ACD, па је $BC = 2 \cdot MS$ и $AD = 2 \cdot NS$. Сабирањем добијених једнакости следи да је $AD + BC = 2MS + 2NS \geqslant 2MN$. Ако важи једнакост онда су тачке M, S и N колинеарне, па је $AD \parallel MN \parallel BC$, тј. дати четвороугао је трапез.

95. Најпре бројимо троуглове „једако усмерене“ као дати троугао.
Постоји $8 + 7 + \cdots + 1 = 36$ троуглова странице $1\,\mathrm{cm}$, $7 + 6 + \cdots + 1 = 28$ троуглова странице $2\,\mathrm{cm}$, $6+5+\cdots+1 = 21$ троуглова странице $3\,\mathrm{cm}$, $5+4+\cdots+1 = 15$ троуглова странице $4\,\mathrm{cm}$, $4+3+2+1 = 10$ троуглова странице $5\,\mathrm{cm}$, $3+2+1 = 6$ троуглова странице $6\,\mathrm{cm}$, $2+1 = 3$ троугла странице $7\,\mathrm{cm}$, 1 троугао странице $8\,\mathrm{cm}$.
Потом бројимо троуглове „обрнуто усмерене“ у односу на дати троугао. Постоји $7 + 6 + \cdots + 1 = 28$ троуглова странице $1\,\mathrm{cm}$, $5 + 4 + \cdots + 1 = 15$ троуглова странице $2\,\mathrm{cm}$, $3 + 2 + 1 = 6$ троуглова странице $3\,\mathrm{cm}$, 1 троугао странице $4\,\mathrm{cm}$.
Дакле, укупан број троуглова је 170.

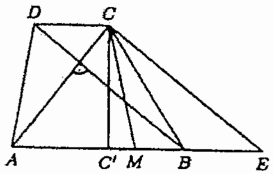
96. Из дате једнакости $\dfrac{1}{x+y+z} = 0{,}xyz$ следи $(100x+10y+z)(x+y+z) = 1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Како су x, y и z цифре, највећа могућа вредност $x+y+z$ је 27, а највећа могућа вредност за $100x+10y+z$ је 999. Могући су следећи случајеви $500 \cdot 2$; $250 \cdot 4$; $200 \cdot 5$; $125 \cdot 8$; $100 \cdot 10$; $50 \cdot 20$ и $40 \cdot 25$. Испитивањем закључујемо да само пар $x+y+z = 8$, $100x+10y+z = 125$, испуњава поменуте услове, па је једино решење дате једначине $x = 1$, $y = 2$ и $z = 5$, а тражени број је 0,125.

97. Из услова да је $a^2 + 9ab + b^2$ дељиво са 11 закључујемо да је и $a^2 - 2ab + b^2 + 11ab$ дељиво са 11, па је $(a-b)^2$ дељиво са 11. Како је 11 прост број, то је $a - b$ дељиво са 11, те је израз $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, такође делив са 11.

98. Нека су BD и AE висине датог троугла ABC (слика). У правоуглом троуглу ABD је угао $BAD = 30°$, па је $BD = \dfrac{b}{2}$. Нека је $CE = x$. Тада је основица $BC = 2x$, а из израза за површину троугла ABC добијамо једнакост: $AB \cdot BD = BC \cdot AE$, односно $\dfrac{b^2}{2} = 4x$, јер је $AE = 2$. Одавде је $b^2 = 8x$. Из правоуглог троугла ABE је $b^2 = 4 + x^2$, па је $8x = 4 + x^2$, а одавде следи $x^2 - 8x + 16 = 12$, тј. $(x-4)^2 = 3 \cdot 4$. Дакле, $x - 4 = -2\sqrt{3}$, па је $x = 4 - 2\sqrt{3}$. Сада из $b^2 = 8x$ добијамо: $b^2 = 8(4 - 2\sqrt{3}) = 4 \cdot 2(\sqrt{3} - 1)^2$. Одавде је $b = 2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) = \sqrt{2}(2\sqrt{3}-2)$, па је $m = 2$, $n = 1$ и $p = -1$ или $m = 1$, $n = 2$ и $p = -2$.



Сл. уз задатак 98



Сл. уз задатак 99

99. Уочимо тачку E на продужетку основице AB преко темена B, тако да је $BE = CD$ (слика). Нека је M средиште дужи AE. Тада је, због нормалности дијагонала, троугао ACE правоугли. Како је $AE = AB + BE = AB + CD$, то је $MC = m$. Како је MC хипотенуза правоуглог троугла MCC', а $CC' = h$ катета, то је $m \geqslant h$. Једнакост важи када је $MC = CC'$, тј. $AC = CE$, а то значи, када да је дати трапез једнакокраки.

100. Нека на олимпијади има n учесника. Пошто сваки учесник има 3 пријатеља значи има $3n$ парова пријатеља. Ако узмемо да је пријатељ учесника A учесник B, онда је један од пријатеља учесника B сигурно учесник A. Дакле, сваки пар се појављује два пута, те је број различитих парова пријатеља $\frac{3n}{2}$. Како 1999 није дељив са 2, то је одговор на постављено питање негативан.

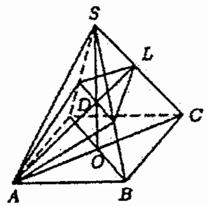
101. Напишимо број n у облику $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$. Тада је број делилаца броја n једнак $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_m+1)$. Како је $1998 = 2^1 \cdot 3^3 \cdot 37^1$, то 1998 има $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ делилаца. Како је $16 = 8 \cdot 2 = 4 \cdot 4 = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, бројеви са 16 делилаца морају бити неког од следећих облика: p^{15}; p^7q^1; p^3q^3; $p^3q^1r^1$; $p^1q^1r^1s^1$. Најмањи бројеви тих облика су $2^{15} = 32768$; $2^7 \cdot 3 = 384$; $2^3 \cdot 3^3 = 216$; $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ и $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. Према томе, најмањи природан број са тачно 16 делилаца је 120.

102. I решење. Ако је трећи исказ тачан тј. ако је $n + k = 3m$, онда други исказ није тачан јер би из $n = 2k+5$ следило да је $n-2k = n+k-3k = 5$, или $3m-3k = 3(m-k) = 5$, што је немогуће. Такође, ако је трећи исказ тачан, онда ни четврти није тачан, јер је $n + 7k = n + k + 6k = 3m + 6k$, а то је увек сложен број. Према томе, трећи исказ мора бити нетачан, а остала три су тачна. То значи да је $n + 1 = ak$ и $n = 2k + 5$, па је $2k+6 = ak$. Одавде следи да је $k\cdot(a-2) = 6$, па је $k \in \{1, 2, 3, 6\}$. Тада је $n \in \{7, 9, 11, 17\}$ и $(n + 7k) \in \{14, 23, 32, 59\}$. Према томе, једина решења су $(n, k) = (9, 2)$ или $(17, 6)$.

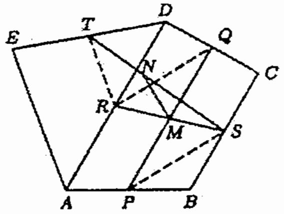
II решење. Постоје четири могућности.

Ако су искази 1), 2) и 3) тачни, а исказ 4) нетачан, онда из $n = 2k + 5$, следи да је $n + k = 3k + 5$, па исказ 2) искључује исказ 3). Слично је и у случају да су искази 2), 3) и 4) тачни, а исказ 1) нетачан. Ако су искази 1), 3) и 4) тачни, а исказ 2) је нетачан, онда је $n + k = 3m$, па је $n + 7k = 3m + 6k$, а то не може бити прост број, па и ова комбинација отпада. Дакле, једина преостала комбинација је 1), 2) и 4) су тачни искази, а 3) је нетачан.

103. а) Правоугли троуглови SKL и SML су подударни, па је $SK = SM$ (слика). Због тога је $SK : SB = SM : SD$, па је према обратној Талесовој теореми KM паралелно са BD.



Сл. уз задатак 103

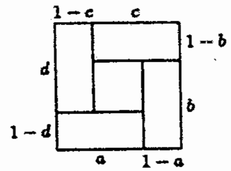


Сл. уз задатак 104

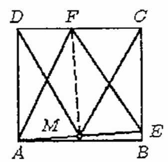
б) Троуглови AON и SOC су слични, па је $AO : ON = SO : OC$, односно $6 : ON = 8 : 6$. Одавде је $ON = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, па је $SN = 3{,}5\,\mathrm{cm}$. Из а) следи $MK : BD = SN : SO$, одакле је $MK = 5{,}25\,\mathrm{cm}$. Из површине једнакокраког троугла SAC, добијамо једнакост $AC \cdot SO = AL \cdot SC$, тј. $12 \cdot 8 = AL \cdot 10$, па је $AL = 9{,}6\,\mathrm{cm}$. Лако се доказује да је $AK = AM$, што значи да је пресек $AKLM$ делтоид, па је тражена површина $P = KM \cdot AL : 2 = 25{,}2\,\mathrm{cm}^2$.

104. Нека је R средиште дужи AD (слика). Тачке P, S, Q и R су средишта страница четвороугла $ABCD$, па је $PSQR$ паралелограм. Дијагонале PQ и RS секу се у тачки M, што значи да је MN средња линија троугла RST, па је $MN = \frac{1}{2}TR$. Дуж TR је средња линија троугла ADE, па је $TR = \frac{1}{2}AE$. Дакле, $MN = \frac{1}{4}AE = 1\,\mathrm{cm}$.

105. Нека је дати квадрат јединични (слика). Нека су дужине већих страница правоугаоника редом a, b, c и d при чему је a већа или једнака од осталих. Тада је $a \geqslant b$ и $1-d \geqslant 1-a$. Како су површине правоугаоника једнаке, то је $a(1-d) = b(1-a)$, па (због претходног услова) следи да је $a = b$ и $1-d = 1-a$ тј. $a = d$. Дакле, $a = b = d$. Слично се доказује да је и $b = c$, па је $a = b = c = d$. Због тога је унутрашњи правоугаоник квадрат.



Сл. уз задатак 105



Сл. уз задатак 107

106. Нека је разбојник изнео x килограма злата и y килограма дијаманата. Бројеви x и y задовољавају следеће релације:

(1) $x + y \leqslant 100$, јер разбојник не може понети више од 100 kg;

(2) $\frac{x}{200} + \frac{y}{40} = 1$, јер 1 kg злата заузима $\frac{1}{200}$ део сандука, а 1 kg дијаманата заузима $\frac{1}{40}$ део сандука;

(3) $x \leqslant 100$, $y \leqslant 40$.

Из релације (2) следи да је $x + 5y = 200$. Како је $x + y \leqslant 100$, то је $200 = x + y + 4y \leqslant 100 + 4y$. Дакле, $4y \geqslant 100$, а $y \geqslant 25$. Нека је $y = 25 + k$ $(0 \leqslant k \leqslant 15)$. Тада је $x + 5y = x + 5(25 + k) = 200$, тј. $x + 125 + 5k = 200$, или $x = 75 - 5k$. Вредност блага је $f(x,y) = 20x + 60y$ (јер 1 kg злата вреди 20, а 1 kg дијаманата 60 дуката), па је $f(x,y) = 20(75-5k) + 60(25+k) = 1500 - 100k + 1500 + 60k = 3000 - 40k \leqslant 3000$, јер је k позитиван број или 0.

Дакле, максимална вредност блага је 3000 дуката и добијамо је за $k = 0$, па је $x = 75$ kg, а $y = 25$ kg.

107. Како је $AM = ME$ то је $AE \perp FM$ и $\measuredangle AMF = 90° = \measuredangle ADF$, па је четвороугао $AMFD$ тетивни (слика).

Даље, како је $\measuredangle AFM = 30° = \measuredangle ADM$, то је $\measuredangle MDC = 60°$. Четвороугао $MECF$ је тетивни, јер је $\measuredangle EMF = \measuredangle FCE = 90°$. Како је $\measuredangle MFE = 30° = \measuredangle MCE$, то је $\measuredangle MCD = 60°$, па је троугао CDM једнакостраничан.

108. I решење. Из услова задатка и

$$\frac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = \frac{(\sqrt{1998}+\sqrt{n})^2}{1998-n} = \frac{1998+n+2\sqrt{1998\cdot n}}{1998-n}$$

следи да мора бити $1998 \cdot n = k^2$, тј. $2\cdot 3^3 \cdot 37 \cdot n = k^2$. Најмањи такав природан број n је $n_{min} = 2\cdot 3\cdot 37 = 222$. Тада је вредност израза једнака 2.

II решење. Како је $\dfrac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{1998}{n}}+1}{\sqrt{\dfrac{1998}{n}}-1} = \dfrac{k+1}{k-1} = 1 + \dfrac{2}{k-1}$, то је вредност датог израза природан број уколико је $k-1 \in \{1,2\}$, тј. $k=2$ или $k=3$. Како се за $k=2$ добија да n није природан број, то је једина могућност $k=3$ и $n=222$.

III решење. Нека је $\dfrac{\sqrt{1998}+\sqrt{n}}{\sqrt{1998}-\sqrt{n}} = k \in N$. Тада је $\sqrt{1998}+\sqrt{n} = k\sqrt{1998} - k\sqrt{n}$, одакле се добија да је $(k-1)\sqrt{1998} = (k+1)\sqrt{n}$, тј. $3(k-1)\sqrt{222} = (k+1)\sqrt{n}$. Одавде, из $\dfrac{3(k-1)}{k+1} = \sqrt{\dfrac{n}{222}}$ следи да је $n = 222$.

109. Како је

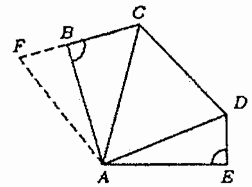
$$\begin{aligned}
\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5 &= \underbrace{11\ldots111}_{1997}\cdot 10^{1999} + \underbrace{22\ldots222}_{1998}\cdot 10 + 5 \\
&= \frac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999} + 2\cdot\frac{10^{1998}-1}{9}\cdot 10 + 5 \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{3996} - 10^{1999} + 2\cdot 10^{1999} - 20 + 45\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{3996} + 2\cdot 5\cdot 10^{1998} + 25\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(10^{1998}+5\right)^2,
\end{aligned}$$

то је

$$\underbrace{11\ldots111}_{1997}\underbrace{22\ldots222}_{1998}5 = \left(\frac{1\overbrace{000\ldots0}^{1997}5}{3}\right)^2 = (\underbrace{333\ldots33}_{1997}5)^2,$$

што је и требало доказати.

110. I решење. Посматрајмо дијагонале AC и AD датог конвексног петоугла $ABCDE$. Како је $AB = AE$ и $\measuredangle ABC = \measuredangle DEA = 90°$, могуће је конструисати троугао чија је висина $AB = AE = 1$ и основица $BC + DE = 1$ (користећи троуглове ABC и AED) (слика). Тада је површина овог троугла једнака $\frac{1}{2}$. Конструисани троугао је подударан троуглу ACD, па је површина петоугла $ABCDE$ једнака 1.



Сл. уз задатак 110

II решење. Нека је AF висина троугла ADC. Уведимо ознаке: $FD = x$, $DE = y$. Тада је, из услова задатка, $BC = 1-y$ и $CF = 1-x$. Користећи Питагорину теорему добија се: $AC^2 = 1 + (1-y)^2$, $AD^2 = 1 + y^2$ и $AF^2 = AC^2 - (1-x)^2 = AD^2 - x^2$, одакле је $x = y$. Одавде следи да су троуглови AED и ADF подударни, па је $AF = 1$ и

$$P_{ABCDE} = P_{\triangle ACB} + P_{\triangle ADC} + P_{\triangle AED} = \frac{1\cdot(1-x)}{2} + \frac{1\cdot 1}{2} + \frac{1\cdot y}{2} = 1.$$

111. Како су x и y природни бројеви, то је x^y природан број, па и y^{x-y} мора бити природан број. Одавде следи да је $x - y \geqslant 0$, тј. $x \geqslant y$.
Када је $x = y$, дата једначина се своди на једначину $x^x = x^0 = 1$, тј. $x = y = 1$.
У случају када је $y = 1$, очигледно је да мора бити $x = 1$.

Нека је $x > y \geqslant 2$. Тада је дата једначина еквивалентна једначини $\left(\dfrac{x}{y}\right)^y = y^{x-2y}$ (1).

Како је $\dfrac{x}{y} > 1$ и y природан број, то мора бити $x - 2y > 0$, тј. $\dfrac{x}{y} > 2$. Одавде следи да и $\dfrac{x}{y}$ мора бити природан број. Једначина (1) се може записати у облику $\dfrac{x}{y} = y^{\frac{x-2y}{y}} = y^{\frac{x}{y}-2}$ (2). Како смо закључили да је $y \geqslant 2$, то из једначине (2) следи да је $\dfrac{x}{y} \geqslant 2^{\frac{x}{y}-2}$, па је $\dfrac{x}{y} \leqslant 4$. Дакле, $\dfrac{x}{y} \in \{3,4\}$. За $\dfrac{x}{y} = 3$, добија се $x = 9$ и $y = 3$, а за $\dfrac{x}{y} = 4$, добија се $x = 8$ и $y = 2$. Дакле, скуп решења дате једначине је: $\{(1,1),(8,2),(9,3)\}$.

112. Претпоставимо да можемо написати 16 таквих бројева. Како има осам парних и осам непарних остатака при дељењу са 16, то је осам од тих бројева парно, а осам непарно. Одавде следи да цифре не могу бити све непарне нити све парне. Разматрајмо случај када су дате цифре две парне и једна непарна. (Случај са две непарне и једном парном је сличан.) Можемо написати тачно девет непарних троцифрених бројева са датим цифрама: $\overline{a_1k}, \overline{a_2k}, \ldots, \overline{a_9k}$, при чему су $a_1, a_2, \ldots, a_9$ двоцифрени бројеви и k дата непарна цифра.
Међу бројевима $a_1, a_2, \ldots, a_9$ три су непарна, тако да међу осам изабраних непарних троцифрених бројева бар пет бројева имају парни „почетак“ a_i (парну цифру десетица). Нека су a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 парни двоцифрени бројеви и нека су $\overline{a_1k}$, $\overline{a_2k}$, $\overline{a_3k}$, $\overline{a_4k}$ и $\overline{a_5k}$ пет изабраних троцифрених бројева. Бројеви $a_1, \ldots, a_5$ при дељењу са 8 могу имати остатке 0, 2, 4 или 6. Зато је разлика нека два од њих, рецимо $a_1 - a_2$, дељива са 8, па 16 дели $\overline{a_1k} - \overline{a_2k}$, јер је $\overline{a_1k} - \overline{a_2k} = (a_1 - a_2)\cdot 10$.
Дакле, не можемо написати таквих 16 троцифрених бројева.

1999. година

113. $23456 - 19876 + 99999 - 100 = 103479$.

114. $29 + 25 + 22 = 76$.

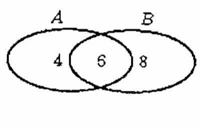
115. Како је $1999 = 83 \cdot 24 + 7$, то ће кроз 1999 сати бити $17 + 7 = 24$ сата, то јест поноћ, па никако не може бити сунчано време.

116. Сваких 1000 страница има дебљину $(1000 : 200) \cdot 2 = 10\,\mathrm{mm} = 1\,\mathrm{cm}$. Књига од 1 999 000 страница ће имати $1999 \cdot 1 = 1999\,\mathrm{cm}$.

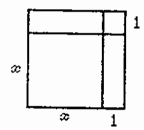
117. $435\,768\,\mathrm{a} = 43\,576\,800\,\mathrm{m}^2 > 43\,050\,000\,\mathrm{m}^2 = 43\,\mathrm{km}^2\,5\,\mathrm{ha}$.

118. $423 \cdot 54 = 22\,842$.

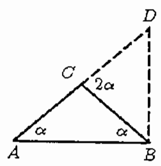
119. $18 - 6 - 4 = 8$ елемената (слика).



Сл. уз задатак 119



Сл. уз задатак 122



Сл. уз задатак 126

120. Углови $\alpha + \beta$ и $\alpha - \beta$ разликују се за 2β. Дакле 2β је $38°41'24''$, а $\beta = 19°20'42''$.

121. 102348 и 987651.

122. Означимо ивицу коцке са x (слика). Свака страна коцке повећала се за два правоугаоника страница x и $1\,\mathrm{cm}$ и један квадрат странице $1\,\mathrm{cm}$. Такође, површина сваке стране коцке повећала се за $66 : 6 = 11\,\mathrm{cm}^2$. Дакле, $2x + 1 = 11$, па је ивица коцке 5 cm. Њена запремина повећала се за $6 \cdot 6 \cdot 6 - 5 \cdot 5 \cdot 5 = 216 - 125 = 91\,\mathrm{cm}^3$.

123. Како је $xy > 0$ и $z < 0$, то је $xyz < 0$.

124. $80{,}25 \cdot 0{,}16 = 12{,}84\,\mathrm{N}$.

125. $x = -1$ и $y = -19$, па је $x + y = -20$.

126. Ако је $\measuredangle BAC = \alpha$, онда је $\measuredangle BCD = 2\alpha$, а $\measuredangle ADB = 90° - \alpha$ (слика). Тада је $\measuredangle ABD = 180° - \alpha - (90° - \alpha) = 90°$, а то је и требало доказати.

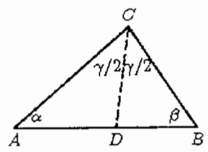
127. Како је $AC > BC$, то је и $\measuredangle ABC = \beta > \measuredangle BAC = \alpha$ (слика). Даље је $\measuredangle ADC = \beta + \frac{\gamma}{2}$, а $\measuredangle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, па је због $\beta > \alpha$ и $\measuredangle ADC = \beta + \frac{\gamma}{2} > \measuredangle BDC = \alpha + \frac{\gamma}{2}$.

128. Како је $5 + 2\sqrt{7} = \sqrt{25} + \sqrt{28}$, а $3\sqrt{3} + 2\sqrt{6} = \sqrt{27} + \sqrt{24}$ и како је $\sqrt{25} > \sqrt{24}$, а $\sqrt{28} > \sqrt{27}$, то је $5 + 2\sqrt{7} > 3\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$.

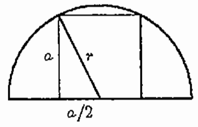
129. $16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} = 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) = 2^{15} \cdot 33$.

130. $13\,728 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13 = 22 \cdot 26 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 22 \cdot 24 \cdot 26$.

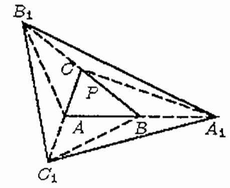
131. $P = a^2$, а како је $a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} = r^2$, то је $a^2 = \frac{4r^2}{5}$, па је $P = \frac{4r^2}{5}$ (слика).



Сл. уз задатак 127



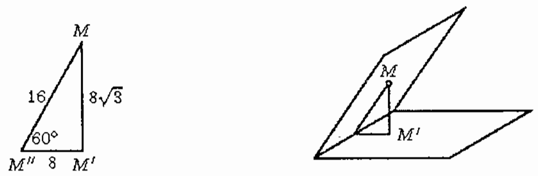
Сл. уз задатак 131



Сл. уз задатак 132

132. Површина троугла $A_1B_1C_1$ је седам пута већа од површине троугла ABC и износи $13\,993\,\mathrm{cm}^2$ (слика). Заиста, тежишна дуж дели троугао на два троугла једнаких површина. Зато је $P_{\triangle A_1BB_1} = 2P_{\triangle A_1BC} = 2P_{\triangle ABC}$ и слично, $P_{\triangle B_1CC_1} = 2P_{\triangle C_1AA_1} = 2P_{\triangle ABC}$.

133. Тражено одстојање је 16 cm. Заиста, ако су M' и M'' нормалне пројекције тачке M редом на страну диедра и на ивицу, тада је: $\measuredangle MM'M'' = 90°$, $\measuredangle MM''M' = 60°$ (слика).

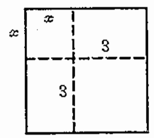


Слика уз задатак 133

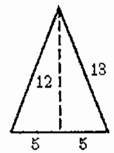
134. Ако је дужина пута x, онда је $\frac{4}{9}x + \frac{9}{20} \cdot \frac{5}{9}x + 330 = x$. Дакле, $16x + 9x + 330 \cdot 36 = 36x$, па је $11x = 330 \cdot 36$, а $x = 1080\,\mathrm{km}$.

135. Решења су $x_1 = 0{,}35$ или $x_2 = 0{,}15$.

136. Нека је основна ивица призме једнака x (слика). Како је $(x+3)^2 \cdot 10 = x^2 \cdot 10 + 210$, то је $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 21$, па је $x = 2$. Површина призме је $88\,\mathrm{cm}^2$, а запремина $40\,\mathrm{cm}^3$.



Сл. уз задатак 136



Сл. уз задатак 137

30	35	32
33	38	37
36	31	34

Сл. уз задатак 141

137. Дужа висина датог троугла одговара мањој страници, дакле основици и износи 12 cm (слика). Како је висина сличног троугла 24 cm, то је коефицијент сличности 2, па је основица другог троугла 20 cm, а површина $(20 \cdot 24) : 2 = 240\,\mathrm{cm}^2$.

138. а) 203 567 и 876 532; б) 200 022 и 888 777.

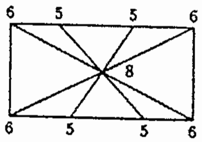
139. Ако је у другом сандуку x јабука, у првом је $x + 1999$. После преношења, у првом сандуку ће бити $x + 1999 - 1000 = x + 999$, а у другом $x + 1000$ јабука. Дакле, једна јабука је више у другом сандуку.

140. I решење. Површина просторије је $12 \cdot 27 = 324\,\mathrm{m}^2 = 324 \cdot 10\,000\,\mathrm{cm}^2 = 3\,240\,000\,\mathrm{cm}^2$. Површина једне плочице је $15 \cdot 15 = 225\,\mathrm{cm}^2$. Према томе, потребно је $3\,240\,000 : 225 = 14\,400$ плочица.

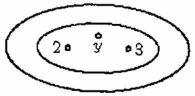
II решење. Како је $1200\,\mathrm{cm} : 15\,\mathrm{cm} = 80$ и $2700\,\mathrm{cm} : 15\,\mathrm{cm} = 180$, то је број потребних плочица $80 \cdot 180 = 14\,400$.

141. Једно од могућих решења дато је на слици.

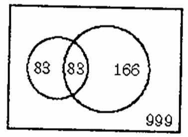
142. Дужи има $(4 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 8) : 2 = 26$, а троуглова $8 + 4 + 2 + 4 = 18$ (слика).



Сл. уз задатак 142



Сл. уз задатак 143



Сл. уз задатак 144

143. Како је $B \subset A$, то мора бити $x = 3$. Тада y може бити било који од бројева 1, 5 или 9 (слика).

144. Бројева који су мањи од 1 000, а дељиви су са 4 има $1\,000 : 4 - 1 = 250 - 1 = 249$; дељивих са 6 има $996 : 6 = 166$, а дељивих са 4 и 6, тј. дељивих са 12 има $996 : 12 = 83$. Према томе, бројева који су мањи од 1 000, а нису дељиви ни са 4 ни са 6 има $999 - 249 - 166 + 83 = 667$.

145. Број x је елемент скупа $\{4, 5, 6\}$.

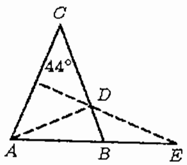
146. Први радник за 1 сат ископа $\frac{2}{25}$ дужине канала, а други $\frac{2}{23}$ дужине канала. Како је $\frac{2}{23} > \frac{2}{25}$, то други радник има бољи учинак.

147. Очигледно је $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) = 180°$. Дакле, $2\alpha = 180°$, а $\alpha = 90°$. Како је $\beta = 90° : 8$, то је $\beta = 11°15'$.

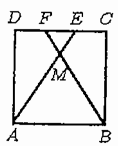
148. Бициклиста је првог дана прешао 25%, а другог 30% пута, што укупно износи 55%. Дакле, преосталих 45% износи 180 km, па је 1% једнако $180\,\mathrm{km} : 45 = 4\,\mathrm{km}$. Цео пут је тада $4\,\mathrm{km} \cdot 100 = 400\,\mathrm{km}$.

149. $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $x^2 + y^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$.

150. Израчунавањем углова $\triangle ABD$ и $\triangle BDE$, добија се: $\angle BAD = 24°$, $\angle ABD = 68°$, $\angle BED = 22°$, $\angle DBE = 112°$ (слика). Тада је $AD = CD$ (јер је $\triangle ACD$ једнакокрак); $BD < AD$ (јер је $\angle BAD = 24° < \angle ABD = 68°$); $BD < DE$ (јер је $\angle BED = 22° < \angle DBE = 112°$); $AD < DE$ (јер је $\angle BAD = 24° > \angle BED = 22°$). Дакле, $BD < AD = CD < DE$.



Сл. уз задатак 150



Сл. уз задатак 151

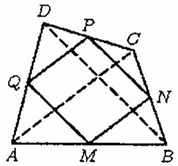
151. Троуглови AED и BFC су подударни ($AD = BC = a$; $\angle ADE = \angle BCF = 90°$ и $DE = CF = \frac{2a}{3}$). Из ове подударности је $\angle AED = \angle BFC$, па је и $\angle MEF = \angle MFE$. Дакле, троугао MEF је једнакокрак.

152. Ако би из сваког разреда било 24 или мање ученика, укупан број такмичара би био мањи или једнак $5 \cdot 24 = 120$. Како такмичара има тачно 123, то је број такмичара бар из једног разреда већи од 24.

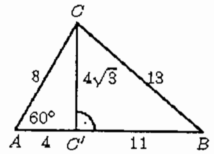
153. Нека је тражено снижење $x\%$. Тада је $25000(1-x)(1-x) = 16000$. Тада је $(1-x)^2 = \frac{16000}{25000} = \frac{16}{25}$. То значи да је $1 - x = \frac{4}{5}$, па је тражено снижење $x = \frac{1}{5} = 20\%$.

154. Очигледно је $\sqrt{6} < \sqrt{9} = 3$. Тада је $\sqrt{6 + \sqrt{6}} < \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3 < 3{,}00001$.

155. Дуж MN је средња линија троугла ABC, а дуж PQ средња линија троугла ACD (слика). Одавде следи да су дужи MN, PQ и $\frac{AC}{2}$ подударне и паралелне. Према томе, четвороугао $MNPQ$ је паралелограм.



Сл. уз задатак 155



Сл. уз задатак 156

156. Из правоуглог троугла ACC' је $AC' = 4\,\mathrm{cm}$ (слика). Тада је $BC' = 15 - 4 = 11\,\mathrm{cm}$, а висина $CC' = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Из Питагорине теореме је $BC^2 = (BC')^2 + (CC')^2 = 121 + 48 = 169$, па је $BC = 13\,\mathrm{cm}$. Површина троугла је $P = (15 \cdot 4\sqrt{3}) : 2 = 30\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Из површине су висине BB' и AA' редом једнаке $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ cm и $\frac{60\sqrt{3}}{13}$ cm.

157. Како су изрази $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$ и $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$ ненегативни, то су апсолутне вредности датих израза сами ти изрази, а њихов збир је $a^2 + b^2$.

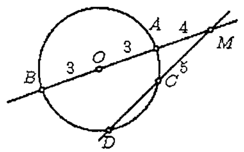
158. Ако се из друге цистерне одлије x литара на сат, онда се из прве одлије $3x$ литара на сат. Дакле, $540 - 6 \cdot 3x = 360 - 6 \cdot x - 60$. Решавањем једначине добија се $x = 20$ литара, па се из прве цистерне сваког сата одлије 60 литара, а из друге 20 литара воде.

159. Дата неједначина је еквивалентна са $(x-3)^2 - x(x-3) = (x-3)(x-3-x) = (x-3)(-3) < 0$. Дакле, $x - 3 > 0$, па је $x > 3$ решење дате неједначине.

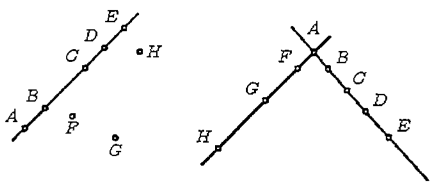
160. Дијагонала основе квадра је 10 cm, па је и висина 10 cm. Површина квадра је $376\,\mathrm{cm}^2$, а запремина $480\,\mathrm{cm}^3$.

161. Троуглови MAD и MCB су слични (слика), јер је $\angle AMD = \angle BMC$ и $\angle MDA = \angle MBC$, (као периферијски над тетивом AC). Из ове сличности је $AM : MD = MC : MB$, па је $MD = (MA \cdot MB) : MC = (4 \cdot 10) : 5 = 8\,\mathrm{cm}$. Тада је $CD = MD - MC = 8 - 5 = 3\,\mathrm{cm}$.

162. Највише троуглова има ако су тачке F, G, H неколинеарне и ако су у паровима неколинерне са тачкама A, B, C, D, E (слика). Тада је број троуглова $10 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 1 = 46$ (на правој p има 10 дужи од којих свака са 3 преостале тачке F, G и H даје 30 троуглова, три дужи FG, GH и FH са 5 тачака праве p граде 15 троуглова и додаје се троугао FGH).



Сл. уз задатак 161



Сл. уз задатак 162

Најмање троуглова има ако су тачке F, G, H колинеарне и ако су колинеарне са једном од тачака на правој p, на пример A. Тада је број троуглова $10\cdot 3+3\cdot 4=42$ (на правој p има 10 дужи од којих свака са 3 преостале тачке F, G и H даје 30 троуглова, три дужи FG, GH и FH са 4 тачке праве p граде 12 троуглова, јер овакви троуглови са тачком A не постоје, као ни троугао FGH).

163. Сваког минута први моторциклиста прелази 200 m више од другог. То значи да за $66\,\text{km}=66000\,\text{m}$ треба $66000:200=330$ минута вожње до сусрета. Дакле, први моторциклиста за то време пређе $330\cdot 1\,\text{km}=330\,\text{km}$, а други 66 km мање, тј. 264 km. Према томе, растојање између места A и места B је $330+264=594\,\text{km}$.

164. Површина баште је $4\cdot 5=20$ пута мања од површине винограда. Површина баште је $199900\,\text{m}^2:20=9995\,\text{m}^2$.

165. Нека од могућих решења су: $(2+4-6)\cdot 8\cdot 10=9-9=0$; $2+4-6+8+10=9+9=18$; $(2+4):6+8\cdot 10=9\cdot 9=81$.

166. Постоје четири решења: $222\cdot 9+1=1999$; $333\cdot 6+1=1999$; $666\cdot 3+1=1999$ и $999\cdot 2+1=1999$.

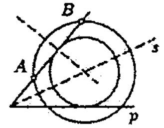
167. Ако је Миша 8 пута победио компјутер, он је добио $8\cdot 5=40$ жетона, што са 5 које је сам купио износи 45 жетона. Дакле, Миша је могао одиграти највише 45 игара. Према томе, Горан је био у праву.

168. I решење. Како је $5{,}7+12{,}3=18$ и како је $18:4{,}5=4$, то следи да је Јоца замислио број 4.
II решење. Ако је замишљени број x, онда је $x\cdot 4{,}5-12{,}3=5{,}7$. Решење једначине је $x=4$.

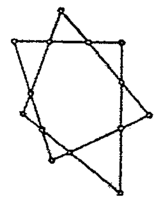
169. На преостали део канапа од 1,5 m најпре додамо 0,5 m и добијемо 2 m. Дакле, други део канапа је $2\cdot 2\,\text{m}=4\,\text{m}$. Опет додамо 0,5 m и добијемо 4,5 m. Дакле, цео канап је $2\cdot 4{,}5\,\text{m}=9\,\text{m}$.

170. Број је дељив са 36 ако је дељив са 4 и са 9, па његов двоцифрени завршетак мора бити дељив са 4, а збир цифара је број дељив са 9. Како је $0+1+2+3+4+5+6=21$, то је најмањи могући збир цифара једнак 27. Ако је најмањи такав број $1023***$, онда је збир преостале три различите цифре 21. Дакле, могући су само следећи случајеви: $9+8+4$; $9+7+5$; $8+7+6$. Најмањи такав број је дакле 1023768.

171. Кружнице k_1 и k_2 имају заједнички центар O (слика). Како кружница k_1 додирује праве AB и p, то се O налази на симетрали угла који чине ове две праве. Како кружница k_2 садржи тачке A и B, то се тачка O налази на симетрали дужи AB. Према томе, тачка O је пресек симетрале угла између правих AB и p и симетрале дужи AB. Кружница k_1 има центар O и полупречник једнак растојању тачке O од праве p, а кружница k_2 има центар O и полупречник $OA=OB$.
Задатак има два решења, јер праве p и AB имају две симетрале угла.



Сл. уз задатак 171



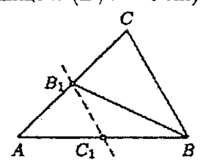
Сл. уз задатак 172

172. Једно од могућих решења дато је на слици.

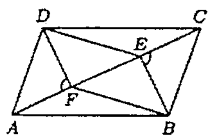
173. Како је $\alpha=0.4\beta$ и $\gamma=4\alpha$, то је $\gamma=4\cdot 0.4\beta=1.6\beta$. Тада је $\alpha+\beta+\gamma=0.4\beta+\beta+1.6\beta=3\beta=180°$, па је $\beta=60°$. Дакле, $\alpha=0.4\beta=0.4\cdot 60°=24°$ и $\gamma=4\alpha=4\cdot 24°=96°$.

174. Нека су и Јанко и Марко имали по x динара. Марко је купио $\frac{x}{40}$ килограма бомбона, а Јанко $\frac{x}{60}$ килограма бомбона. Када се бомбоне помешају добије се $\frac{x}{40}+\frac{x}{60}=\frac{3x}{120}+\frac{2x}{120}=\frac{5x}{120}=\frac{x}{24}$ килограма бомбона. Како је за њих плаћено $x+x=2x$ динара, то је цена једног килограма мешавине једнака $2x:\frac{x}{24}=48$ динара.

175. Анализа. Нека је B_1 средиште странице AC (слика). Тачка B_1 припада средњој линији C_1B_1 и од тачке B је удаљена 5 cm.
Конструкција. Најпре се конструише дуж $AB=4\,\text{cm}$ и код темена B угао $\beta=\measuredangle ABp=60°$. Затим се конструише тачка C_1, која представља средиште дужи AB. Средња линија C_1B_1 је на правој q која је паралелна са краком BC угла β. Тачка B_1 добија се у пресеку праве q и кружнице k $(B,\ r=5\,\text{cm})$. Теме C је пресек крака Bp и праве AB_1.



Сл. уз задатак 175

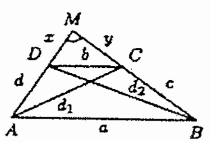


Сл. уз задатак 176

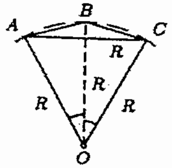
176. Слика: $\triangle AFD\cong\triangle CEB$ ($\measuredangle FAD=\measuredangle ECB$ – као углови са паралелним крацима; $AD=BC$; $\measuredangle ADF=\measuredangle CBE$ - као углови са паралелним крацима, јер је $DF\parallel BE\perp AC$). Из подударности је $DF\#BE$ (симбол $\#$ је ознака за паралелне и једнаке дужи). Према томе четвороугао $BEDF$ је паралелограм.

177. Од свих простих бројева само један, број 2, је паран, а сви остали су непарни. Ако су свих 1999 простих сабирака непарни њихов збир ће бити непаран. Према томе, један од датих сабирака је сигурно 2, а осталих 1998 су непарни. Према томе, производ тих 1999 бројева је паран, јер је један чинилац број 2. Ако саберемо 1998 непарних простих бројева збир је паран број. Ако саберемо 1997 непарних бројева са бројем 2, збир је непаран број.

178. Нека се краци трапеза секу у тачки M (слика). Тада је $\measuredangle AMB$ прав. Нека су мерни бројеви основице трапеза a и b, кракова c и d, дијагонала d_1 и d_2, а дужи DM и CM, x и y. Из Питагорине теореме је $a^2+b^2=(x+d)^2+(c+y)^2+x^2+y^2=(x+d)^2+y^2+(c+y)^2+x^2=d_1^2+d_2^2$.



Сл. уз задатак 178

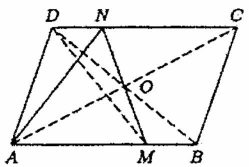


Сл. уз задатак 179

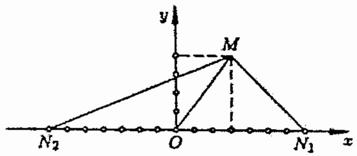
179. Површина правилног дванаестоугла једнака је површини 6 подударних делтоида (слика). Површина једног делтоида је $6 \cdot 6 : 2 = 18\,\mathrm{cm}^2$, па је површина дванаестоугла $6 \cdot 18 = 108\,\mathrm{cm}^2$.

180. Како је $x^2+y^2+2x-6y+10 = x^2+2x+1+y^2-6y+9 = (x+1)^2+(y-3)^2 = 0$ и како је збир квадрата једнак 0 ако и само ако је сваки од сабирака једнак 0, то је $x+1=0$ и $y-3=0$. Дакле, $x=-1$ и $y=3$, па је $x^{1999}+1999y = (-1)^{1998}+3\cdot 1999 = 1+5997 = 5998$.

181. Нека права MO сече страницу CD у тачки N (слика). Из услова задатка је $\angle MAD = \angle AMO$, па је трапез $AMND$ једнакокрак. Зато су дијагонале трапеза подударне, тј. $AN = MD$. Како је $\triangle AND \cong \triangle CMB$ ($AD = BC$, $\angle ADN = \angle MBC$, $DN = MB$- као дужи централно-симетричне у односу на тачку O), то је из подударности $AN = MC$. Због $AN = MD$, следи да је $MC = MD$.



Сл. уз задатак 181



Сл. уз задатак 183

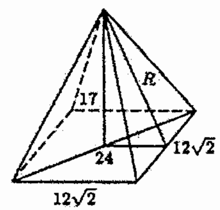
182. Уочимо класе бројева тако да сваку класу чине два непарна броја чији је збир 100. Те класе су: $(1,99)$; $(3,97)$; … $(47,53)$; $(49,51)$. Како класа има 25, а бројева 26, то на основу Дирихлеовог принципа постоји класа у којој се налазе два од датих бројева. Та два непарна броја имају збир 100.

183. Висина троугла OMN је 4 (слика). Да би површина троугла OMN била 14, то основица ON мора бити 7. Дати услов задовољавају две тачке: $N_1(7,0)$ и $N_2(-7,0)$. Једначине тражених правих су:

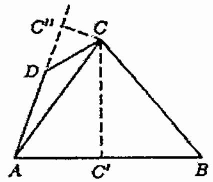
$OM: y = \frac{4}{3}x$; $MN_1: y = -x+7$; $MN_2: y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$.

184. Како је површина дијагоналног пресека $204\,\mathrm{cm}^2$, а висина пирамиде $17\,\mathrm{cm}$, то је дијагонала основе једнака $2 \cdot 204 : 17 = 24\,\mathrm{cm}$ (слика). Тада је основна ивица пирамиде $12\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Бочна висина пирамиде је $h^2 = 289 + 72 = 361$, па је $h = 19\,\mathrm{cm}$. Површина пирамиде је $P = B + M = 288 + 4 \cdot 12\sqrt{2} \cdot 19 : 2 = (288 + 456\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$, а запремина $V = 288 \cdot 17 : 3 = 1632\,\mathrm{cm}^3$.

185. Број чији декадни запис садржи само цифре 2 и 6 у било ком поретку је облика $4k+2$, јер његов двоцифрени завршетак може бити 22, 26, 62 или 66. Дакле, $x^2 - y^2 = 4k+2$, па је $(x+y)(x-y) = 2(2k+1)$, што значи да је један од бројева $x+y$ и $x-y$



Сл. уз задатак 184



Сл. уз задатак 186

паран, а други непаран. Како је то немогуће, јер су $x+y$ и $x-y$ бројеви исте парности, то једначина нема решења.

186. Очигледно да за површину конвексног четвороугла $ABCD$ важи $P = AB \cdot CC' : 2 + AD \cdot CC'' : 2 \leqslant AB \cdot BC : 2 + AD \cdot CD : 2$ (слика). Дакле, $AB \cdot BC + CD \cdot DA \geqslant 2P$.

187. Први топ се може распоредити на 64 поља, други на преосталих $64 - 15 = 49$ ненападаних поља, а трећи на преосталих $49 - 13 = 36$ ненападаних поља. Дакле, три топа се могу разместити на $64 \cdot 49 \cdot 36 = 112\,896$ начина.

188. Како је $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, то су за једначину $x^2 - y^2 = 5^{1999}$ могући следећи случајеви:

$x+y$	5^{1999}	5^{1998}	5^{1997}	…	5^{1001}	5^{1000}
$x-y$	1	5	5^2	…	5^{998}	5^{999}

Дакле, једначина $x^2 - y^2 = 5^{1999}$ има 1000 решења у скупу природних бројева.
Како бројеви $x+y$ и $x-y$ морају бити исте парности, за једначину $x^2 - y^2 = 4^n = 2^{2n}$ су могући следећи случајеви:

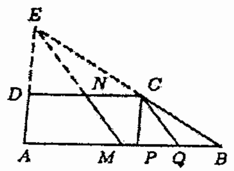
$x+y$	2^{2n-1}	2^{2n-2}	2^{2n-3}	…	2^{n+2}	2^{n+1}
$x-y$	2	2^2	2^3	…	2^{n-2}	2^{n-1}

То значи да једначина $x^2 - y^2 = 4^n$ има $n-1$ решење.
Према томе, $n - 1 = 1000$, па је $n = 1001$.

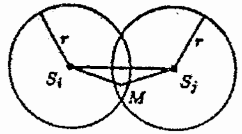
189. Претпоставимо супротно, тј. да је могуће написати деветоцифрени број од кога се брисањем цифара никада не добија најмање двоцифрени квадрат.
У том броју, цифра 1 је иза цифре 6, јер због 16, цифра 6 не сме бити иза цифре 1. Цифра 4 мора бити испред цифре 6, јер ако би била иза, онда би се брисањем преосталих цифара добио број 64. Слично и цифра 9 мора бити испред цифре 4, јер ако би било супротно, онда би се брисањем преосталих цифара добио број 49. Дакле, поредак цифара је несумњиво …9…4…6…1…
Ако се избрише цифра 4 и све остале цифре, остаје број $961 = 31^2$, што је контрадикција са почетном претпоставком.

190. Нека је Јелена одабрала бројеве чији је збир A, онда су Ивану остали бројеви чији је збир B. Како је $A + B = 1+3+5+7-8-12+13-14-16+21 = 0$, то је $A = -B$, па је $|A| = |B|$. Дакле, ма како Јелена бирала бројеве никада не може победити, јер је апсолутна вредност збира њених бројева једнака апсолутној вредности збира Ивановиx бројева.

191. Нека је P тачка дужи AB таква да је $CP \parallel AD$ и нека је Q тачка дужи AB таква да је $CQ \parallel MN$ (слика). Како је $AP = CD$, то је $BP = AB - CD$. Како је $MN = CQ$ и $MN = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}BP$, то је $CQ = \frac{1}{2}BP$. Троуглови ABE и BCP су слични и како је M средиште AB, то је и Q средиште BP (лако доказујемо да права MN садржи тачку E). Дакле, $PQ = QB = QC$, што значи да је троугао BCP правоугли, па је и троугао AEB правоугли, а $\measuredangle AEB = 90°$.



Сл. уз задатак 191



Сл. уз задатак 192

192. Нека су $S_1, S_2, \ldots, S_n$ центри датих кругова полупречника r (слика). Како тачка M припада свим круговима, то је $S_1M < r$, $S_2M < r, \ldots, S_nM < r$. Како је тачка S_1 изван свих осталих кругова, то је $S_1S_2 > r$, $S_1S_3 > r, \ldots, S_1S_n > r$. Слично је $S_iS_j > r$. Дакле, у троуглу S_iS_jM је $S_iS_j > r$, $S_iM < r$ и $S_jM < r$. Наспрам највеће странице је највећи угао, па је $\measuredangle S_iMS_j > 60°$. Ако би било 6 тачака, тада би за збир дисјунктних углова важило $\measuredangle S_1MS_2 + \measuredangle S_2MS_3 + \measuredangle S_3MS_4 + \measuredangle S_4MS_5 + \measuredangle S_5MS_6 + \measuredangle S_6MS_1 > 6 \cdot 60° = 360°$, што је немогуће. Према томе, тачака је највише 5.

193. Одузимањем друге од прве дате једнакости и треће од друге, редом се добија $a^3 - b^3 + (a-b)x = 0$ и $b^3 - c^3 + (b-c)x = 0$, тј. $(a-b)(a^2+ab+b^2+x) = 0$ и $(b-c)(b^2+bc+c^2+x) = 0$. Како је $a \neq b$ и $b \neq c$, то су ове једнакости могуће само ако је $a^2+ab+b^2+x=0$ и $b^2+bc+c^2+x=0$. Одузимањем последњих добијених једнакости добија се $a^2+ab-bc-c^2=0$, тј. $(a-c)(a+c)+b(a-c)=0$. Тада је $(a-c)(a+c+b)=0$, а како је $a \neq c$, то је $a+b+c=0$.

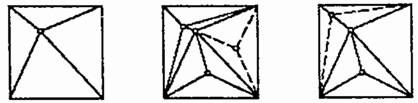
194. Како је $A_0 = 2^0 + 3^2 + 5^2 = 35$, за $n = 0$, то највећи заједнички делилац бројева $A_0, A_1, \ldots, A_n$ може бити само 35, 7, 5 или 1.
За $n = 1$ је $A_1 = 2^3+3^8+5^8 = 397194$, па бројеви 5 и 35 не могу бити заједнички делиоци, јер број 397194 није дељив са 5. Дакле, остаје да се провери дељивост бројем 7.
Како је

$$A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2} = (2^3)^n + 3^2 \cdot (3^3)^{2n} + 5^2 \cdot (5^3)^{2n}$$
$$= 8^n + 9 \cdot 27^{2n} + 25 \cdot 125^{2n}$$

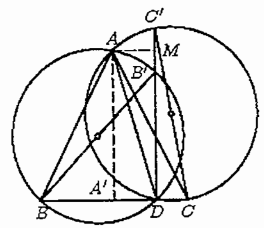
и како је $8 \equiv 1 \pmod 7$, $27 \equiv -1 \pmod 7$ и $125 \equiv -1 \pmod 7$, то је $A_n \equiv 1^n + 9 \cdot (-1)^{2n} + 25 \cdot (-1)^{2n} \pmod 7$, тј. $A_n = 1+9+25 \equiv 35 \equiv 0 \pmod 7$. Према томе, највећи заједнички делилац бројева $A_0, A_1, \ldots, A_n$ је број 7.

195. Докажимо да се квадрат може разделити на троуглове са теменима из скупа M, и одредимо број тих троуглова. Оба циља ћемо постићи додавањем једне по једне од 1999 тачака. Прва тачка разлаже квадрат на 4 троугла (лева слика). Свака нова тачка припада унутрашњости неког претходно одређеног троугла (слика у средини) или припада страници нека два суседна претходно одређена троугла (десна слика). У првом случају

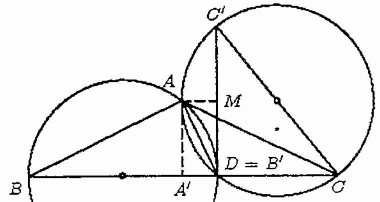
додавање нове тачке увећава број троуглова за 2 (један стари замењује се са 3 нова), а у другом случају додавањем нове тачке се поново број троуглова увећава за 2 (два стара замењују се са 4 нова). Зато ће додавањем последње, 1999-те тачке квадрат бити раздељен на $4 + 1998 \cdot 2 = 4000$ троуглова. Како је површина квадрата једнака $20 \cdot 20 = 400$, то бар један од ових троуглова има површину мању или једнаку $\frac{400}{4000} = \frac{1}{10}$.


Сл. уз задатак 195

196. Нека су O_1 и O_2 редом центри датих кругова k_1 и k_2. Како је $\measuredangle CAD < \measuredangle BAD$, то је $\measuredangle CAD < \frac{\pi}{2}$. Зато су тачке O_2 и A са исте стране дужи CD, па су и тачке C' и A са исте стране дужи CD.



Сл. (а) уз задатак 196



Сл. (б) уз задатак 196

(а) Нека је $\measuredangle BAD < \frac{\pi}{2}$ (слика (а)). Тада су тачке O_1 и A са исте стране дужи BD, па су и тачке B' и A са исте стране дужи BD.

(1) Како је BB' пречник круга k_1, то је $\measuredangle BDB' = 90°$. Слично је CC' пречник круга k_2, па је и $\measuredangle CDC' = 90°$. Одавде следи да су тачке B' и C' колинеарне, јер је $B'D \perp BC$ и $C'D \perp BC$.

(2) Нека је $\measuredangle ABB' = \varphi$. Тада је и $\measuredangle ADB' = \varphi$, као периферијски угао над истим луком AB' круга k_1. Ако је $\measuredangle ADB' = \measuredangle ADC' = \varphi$, онда је и $\measuredangle ACC' = \varphi$, као периферијски углови над истим луком AC' круга k_2.

(3) Троуглови ABB' и ACC' су подударни, јер су оба правоугла ($\measuredangle BAB' = 90° = \measuredangle CAC'$), $AB = AC$ и $\measuredangle ABB' = \measuredangle ACC' = \varphi$. Из подударности ових троуглова следи да је $AB' = AC'$, па је троугао $AB'C'$ једнакокрак.

(4) Како је $B'M = C'M$, то је $AM \perp B'C'$, па је $AM \parallel BC$. Тада је $P_{\triangle BMC} = \frac{BC \cdot DM}{2} = \frac{BC \cdot AA'}{2} = P_{\triangle ABC}$. Дакле, површина троугла BMC је константна и не зависи од положаја тачке D.

(б) Ако је $\measuredangle BAD = \frac{\pi}{2}$, као и $\measuredangle BAD > \frac{\pi}{2}$, распоред тачака на правој MD није исти као у случају (а), али тврђење задатка и тада важи (слика (б)). Решење задатка у овом случају препуштамо читаоцу.

2000. година

197. Ученик је добио збир већи за $842 - 379 = 463$.

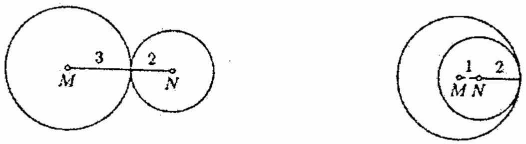
198. Нада је првог и трећег месеца заједно потрошила $2\cdot 1350 - 856 - 800 = 2700 - 1656 = 1044$ динара.

199. Решење је: $x = 10^5 - 2000 = 100000 - 2000 = 98000$.

200. Обим једног правоугаоника је $360\,\text{cm} : 3 = 120\,\text{cm}$. Пола обима је $60\,\text{cm}$, па је дужина правоугаоника $35\,\text{cm}$, а ширина $25\,\text{cm}$.

201. На датој слици има 18 троуглова.

202. Очигледно је $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ и $A \cap B = \{3\}$. Тада је $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B = \{1,2\}$ и $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B = \{1,2\}$.



Сл. уз задатак 203

203. Ако се кружнице додирују споља $MN = 3\,\text{cm} + 2\,\text{cm} = 5\,\text{cm}$, а ако се додирују изнутра онда је $MN = 3\,\text{cm} - 2\,\text{cm} = 1\,\text{cm}$ (слика).

204. Како је $1 + 1000 = 2 + 999 = 3 + 998 = \cdots = 1001$ и како таквих парова има $1000 : 2 = 500$, то је збир свих природних бројева од 1 до 1000 једнак $500 \cdot 1001$. Како је $1001 = 11 \cdot 7 \cdot 13$, то је тражени збир дељив са 7.

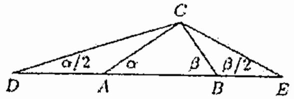
205. Трећина угла α и трећина угла β износе заједно $180^\circ : 3 = 60^\circ$. Како је пет шестина угла α, за три шестине веће од трећине тог угла то значи да три шестине угла α износе $90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, па је једна шестина 10°, а цео угао $\alpha = 60^\circ$. Дакле, угао β је 120°.

206. Ради се о сабирању $18 + 180 + 1802 = 2000$.

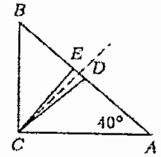
207. Како су троуглови ABC и $A'B'C'$ подударни то су подударни и сви њихови елементи, дакле $AB = A'B'$, $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$ и $BC = B'C'$. Тада су и троуглови BCM и $B'C'M'$ подударни, јер је $\measuredangle ABC = \measuredangle A'B'C'$, $BC = B'C'$ и $\measuredangle BCM = \measuredangle B'C'M'$. Из подударности је $BM = B'M'$. Тада је и $AM = AB - BM = A'B' - B'M' = A'M'$.

208. Да би број био дељив са 36 мора бити дељив са 4 и 9. Према томе двоцифрени завршетак $\overline{0b}$ може бити 00, 04 или 08, па је $b = 0$, $b = 4$ или $b = 8$. Како број мора бити дељив и са 9, то збир његових цифара мора бити дељив са 9. Дакле, $a = 9 - 2 - 0 = 7$ или $a = 9 - 2 - 4 = 3$ или $a = 18 - 2 - 8 = 8$. Тражени бројеви су: 720000, 320004, 820008.

209. Троуглови ACD и BCE су једнакокраки (слика). Због тога је $\measuredangle DCA = \dfrac{\alpha}{2}$ и $\measuredangle BCE = \dfrac{\beta}{2}$. Како је $\measuredangle DCE = \measuredangle DCA + \measuredangle ACB + \measuredangle BCE$, то је $\measuredangle DCE = \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ + \dfrac{\beta}{2} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.



Сл. уз задатак 209



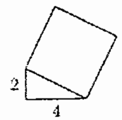
Сл. уз задатак 211

210. Како је $|x+2| \geqslant 0$, то дату неједначину задовољавају сви природни бројеви за које је $5x - 15 > 0$, а не задовољавају они за које је $5x - 15 \leqslant 0$. Дакле, $5x \leqslant 15$, тј. $x \leqslant 3$. Према томе, тражени бројеви су 1, 2 и 3.

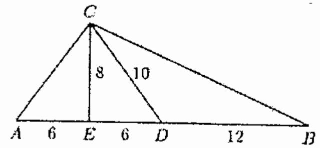
211. Нека је $\measuredangle CAB = 40^\circ$ и нека тежишна дуж сече хипотенузу у тачки D, висина у тачки E, а симетрала правог угла у тачки F (слика). Тада је троугао DCA једнакокраки ($AD = BD = CD$), па је и $\measuredangle DCA = 40^\circ$. Како је $\measuredangle BCF = \measuredangle ACF = 45^\circ$, то је $\measuredangle ECF = \measuredangle BCF - \measuredangle BCE = 45^\circ - 40^\circ = 5^\circ$. Дакле, $\measuredangle ECF = \measuredangle DCF = 5^\circ$.

212. Очигледно је $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = \sqrt{50} + \sqrt{48}$ и $3\sqrt{5} + 7 = \sqrt{45} + \sqrt{49}$. Како је $50 > 49$ и $48 > 45$, то је и $5\sqrt{2} + 4\sqrt{3} > 3\sqrt{5} + 7$.

213. Страница квадрата је $\sqrt{20}\,\text{cm} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$, па тражени квадрат треба конструисати над хипотенузом правоуглог троугла чије су катете $4\,\text{cm}$ и $2\,\text{cm}$ (слика). Могућа су и друга решења.



Сл. уз задатак 213



Сл. уз задатак 215

214. Број дечака је за 252 већи од броја девојчица, а то је 30% укупног броја ученика (јер дечака има 65%, а девојчица 35%). Зато је 10% броја ученика једнако 84, па је у тој школи било 840 ученика: 294 девојчица и 546 дечака.

215. Нека је дата страница $AB = 24\,\text{cm}$ и нека тежишна дуж сече AB у тачки D, а висина у тачки E (слика). Тада је, користећи Питагорину теорему, $DE = 6\,\text{cm}$, па је $BC = \sqrt{8^2 + 18^2} = \sqrt{388}\,\text{cm}$. Слично је $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10\,\text{cm}$. Дакле, обим троугла је $O = 24 + 10 + \sqrt{388} = (34 + 2\sqrt{97})\,\text{cm}$.

216. Славина A за 1 сат напуни $\dfrac{1}{12}$ базена, а славина B напуни $\dfrac{1}{15}$ базена. Одводна цев за један сат испразни $\dfrac{1}{10}$ базена. Дакле, за један сат напуниће се $\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{20}$ базена. Цео базен ће се напунити за 20 сати.

217. Сваке две праве одређују једну раван, па је укупан број равни $2000 \cdot 1999 : 2 = 1\,999\,000$ равни.

218. Ако је Лека добио x динара, Жарко је добио $1416 - x$. Тада је $\dfrac{3}{7}$ Лекиног дела једнако са $\dfrac{5}{8}$ Жарковог дела, тј. $\dfrac{3}{7}x = \dfrac{5}{8}(1416 - x)$. Решавањем једначине се добија да је $x = 840$. Дакле, Лека је добио 840, а Жарко 576 динара.

219. Коцка ивице a има површину $6a^2$ и запремину a^3. Како коцка ивице $1.3\,a$ има површину $6\cdot 1.69a^2$ и запремину $2.197\,a^3$, то се површина коцке повећала за 69%, а запремина за 119.7%.

220. Углови троугла су 27°, 117° и 36°.

221. Како је $n^2+2n+2000=k^2$, то је $n^2+2n+1+1999=k^2$. Дакле, $(n+1)^2+1999=k^2$, тј. $k^2-(n+1)^2=1999$. Тада је $(k+n+1)(k-n-1)=1999$. Број 1999 је прост, па је $k+n+1=1999$ и $k-n-1=1$. Решење је $n=998$.

222. За један сат бродови се приближе за $22\,\mathrm{km}+28\,\mathrm{km}=50\,\mathrm{km}$. За 40 сати они пређу $40\cdot 50\,\mathrm{km}=2000\,\mathrm{km}$.

223. После размене кликера Пера и Васа ће имати по x кликера, а Огњен $x+x=2x$ кликера, што укупно износи $x+x+2x=4x=160$ кликера. Сада Пера и Васа имају по 40, а Огњен 80 кликера. Према томе, Пера је имао $40+17=57$ кликера, Васа $40+12=52$ кликера, а Огњен $80-17-12=51$ кликер.

224. Ако је дужина странице квадрата $x\,\mathrm{mm}$, онда се обим квадрата повећао за $x+22\,\mathrm{mm}+x+22\,\mathrm{mm}=2000\,\mathrm{mm}$. Одавде је $2x+44=2000$, тј. $2x=1956$ и $x=978$. Дакле, дужина странице квадрата је 978 mm.

225. Нека је дати број $\overline{xy}$. Добијени број је $\overline{xyxy}$. Однос добијеног и датог броја дефинисан је количником $\overline{xyxy}:\overline{xy}=101$, тј. добијени број је 101 пут већи од датог.

25	11	21
15	19	23
17	27	13

226. Једно од могућих решења дато је на слици.

227. Како је $X\subset(A\cup B)$, то је $X\subset\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$. Слично је $X\cap A=A\setminus B=\{1,2,3\}$ и $X\cap B=B\setminus A=\{6,7,8\}$. Дакле, $X=\{1,2,3,6,7,8\}$.

228. Веснин, односно Иванов корак има дужину $\frac{67}{77}=\frac{67\cdot 8}{7\cdot 11\cdot 8}=\frac{536}{7\cdot 11\cdot 8}$ m тј. $\frac{78}{88}=\frac{78\cdot 7}{8\cdot 11\cdot 7}=\frac{546}{7\cdot 11\cdot 8}$ m. Значи да је Иванов корак дужи од Весниног за $\frac{10}{7\cdot 11\cdot 8}=\frac{5}{308}$ m.

229. Дати збир се може представити као $7085+3405+10210+\overline{aaaa}=20700+\overline{aaaa}$. Како је број 20700 дељив са 9, то мора бити и број $\overline{aaaa}$, тј. $4\cdot a$ мора бити дељиво са 9, па је $a=0$ или $a=9$.

230. Из услова задатка је $a+b=180°$ и $b+c=90°$, што значи да се углови a и c разликују за 90°. Како је $a+c=142°$, то је $a=116°$ и $c=26°$, па је $b=64°$.

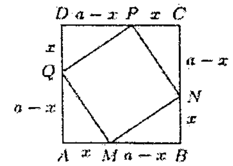
231. Свих 60 коња поделе се у 5 група (A, B, C, D, E) по 12 коња. Како има 48 поткивача, у првом кораку за 5 минута поткивају се групе A, B, C и D; у другом групе B, C, D и E; у трећем C, D, E и A; у четвртом D, E, A и B и у петом E, A, B и C. Тако ће после 25 минута сви коњи бити потковани.

232. Јасно је да је $-(-x)=x$, па је очигледно $6<x<10$, или $x\in\{7,8,9\}$. Како је $|x|<8$, то је $x=7$.

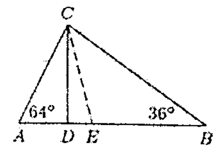
233. Ако је x сума која се дели онда је Жарко добио $\frac{x}{3}$, Лека $\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{3}=\frac{x}{6}$, а Пеђа $x-\frac{x}{3}-\frac{x}{6}=\frac{x}{2}$ динара. Како је Пеђа добио 100 динара више од Жарка, то $\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{6}$ износи 100 динара, па је цела сума 600 динара. Жарко је добио 200, Пеђа 300, а Лека 100 динара.

234. Нека је страница датог квадрата a и нека је $AM=BN=CP=DQ=x$ (слика). Тада је $MB=NC=PD=QA=a-x$. Троуглови MBN, NCP, PDQ и QAM су подударни, јер поред наведених једнаких страница имају и једнаке праве углове. Из

подударности троуглова следи да су једнаки и њихови углови. Ако је $\angle BMN=\alpha$, онда је $\angle AMQ=90°-\alpha$, па је $\angle QMN=180°-\alpha-(90°-\alpha)=90°$. На сличан начин се доказује да су и остали углови четвороугла $MNPQ$ прави.



Сл. уз задатак 234



Сл. уз задатак 235

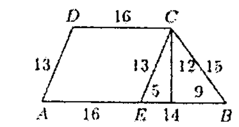
235. Углови троугла су 36°, 64° и 80° (слика). Нека је D подножје висине из C, а E тачка у којој симетрала $\angle ACB$ сече страницу AB. Тада је $\angle ACD=90°-64°=26°$. Како је $\angle ACE=40°$, то је $\angle DCE=40°-26°=14°$.

236. Површина шуме је $2\,100\,\mathrm{m}^2$, а површина парчета земље $60\,\mathrm{m}^2$, што значи да се шума може поделити на $5\cdot 7=35$ таквих парчића. Како има 34 стабла, то значи да на основу Дирихлеовог принципа постоји бар један део у коме нема ниједног стабла.

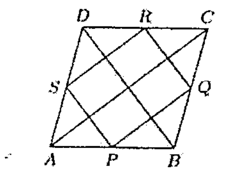
237. Како је $a=2^{45}=(2^5)^9=32^9$, $b=3^{36}=(3^4)^9=81^9$, $c=4^{27}=(4^3)^9=64^9$, $d=5^{18}=(5^2)^9=25^9$, то је $d<a<c<b$.

238. Вредност израза је $-\frac{13}{4}=-3\frac{1}{4}$.

239. Нека је дат трапез $ABCD$ (слика). Нека права p која је паралелна са AD и садржи теме C сече основицу AB у тачки E. У троуглу EBC странице су 13 cm, 14 cm и 15 cm, а висина CC' која одговара страници EC једнака је 12 cm (доказати). Према томе површина трапеза је $P=276\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 239



Сл. уз задатак 240

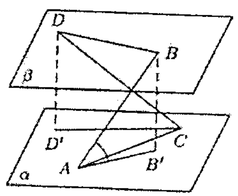
240. Доказ да је четвороугао $PQRS$ правоугаоник се изводи применом особина средње линије троугла или подударности троуглова (слика). Коришћењем Питагорине теореме добија се да је дужина друге дијагонале ромба 6 cm. Како су странице правоугаоника средње линије троуглова чије су основице дијагонале ромба, то су њихове дужине 4 cm и 3 cm, па је површина правоугаоника $12\,\mathrm{cm}^2$.

241. Ако Аца има $6x$ динара, онда Богдан има $9x$ динара. Тада Цеца има $5x$ динара, а сви заједно имају $20x$ динара. То значи да је $x=100$ динара, па Аца треба да добије 600 динара, Богдан 900 динара, а Цеца 500 динара.

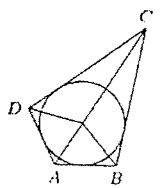
242. Нека је x број седишта у једном аутобусу. Тада је на основу задатка $18(x+5)=21x-6$. Решавањем једначине се добије да је $x=32$. Дакле, број ученика у тој школи је $18(32+5)+174=840$.

243. Ако је $x<0$, онда је $|x|+x=0$, па се једначина своди на $|x|=2000$, што значи да је решење $x=-2000$. Ако је $x\geqslant 0$, онда су све „апсолутне заграде" сувишне, па једначина постаје $5x=2000$, а $x=400$.

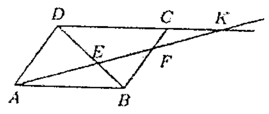
244. Нека су B' и D' пројекције тачака B и D на раван α (слика). Како је $BB'=12\,\mathrm{cm}$, а $\measuredangle BAB'=30°$, то је $AB=24\,\mathrm{cm}$. Тада је $CD=48-24=24\,\mathrm{cm}$, а како је DD' такође $12\,\mathrm{cm}$, то је и $\measuredangle DCD'=30°$.



Сл. уз задатак 244



Сл. уз задатак 245



Сл. уз задатак 246

245. Нека су α, β, γ и δ углови датог четвороугла (слика). Тада је $\measuredangle AOB+\measuredangle COD=180°-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}+180°-\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}=360°-(\alpha+\beta+\gamma+\delta):2=360°-180°=180°$.

246. Како је $AB\parallel DK$, то је $AE:EK=BE:DE$ (слика). Слично је $AD\parallel BF$, па је $BE:DE=EF:AE$. Следи да је $AE:EK=EF:AE$ или $AE^2=EF\cdot EK$.

247. Површина њиве је $750\cdot 200=150\,000\,\mathrm{m}^2=1\,500\,\mathrm{a}$. Маса траве је тада $1\,500\cdot 240=360\,000\,\mathrm{kg}=360\,\mathrm{t}$. Према томе, маса сена је $360\,t:4=90\,\mathrm{t}$.

248. Нека је први број x. Тада је други број $3x$, а трећи $x-5$. Следи да је $x+3x+x-5=6\,000$, па је $5x-5=6\,000$. Дакле, $5x=6\,005$, а $x=1\,201$. Први број је $1\,201$, други $3\,603$, а трећи је $1\,196$.

249. Ако преведемо на језик сабирања добиће се $2\,000+ABA=CDDC$. Очигледно је $C=2$, јер збир броја $2\,000$ и било ког троцифреног броја не прелази $2\,999$. Тада је и $A=2$, јер је само $0+2=2$ (цифра јединица). Јасно је да је тада $D=2+0=2$, а из истих разлога је и $B=0+2=2$.

250. Радници су на свака 3 дана уштедели по 1 дан. Како су цео посао скратили за $70-55=15$ дана, то значи да су убрзаним темпом уместо $3\cdot 15=45$ дана, радили $2\cdot 15=30$ дана. Дакле, $55-30=25$ дана радили су пре убрзавања.

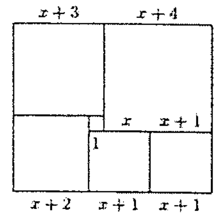
251. Како је деце било петоро, могло је остати само 1, 2, 3 или 4 бомбоне. Ако је остала 1 бомбона, онда је било $5\cdot 1+1=6$ бомбона. Ако су остале 2, онда је било $5\cdot 2+2=12$ бомбона, или $5\cdot 3+3=18$ или $5\cdot 4+4=24$ бомбоне.

252. Првог сата аутомобилиста је прешао $(360:15)\cdot 4=96\,\mathrm{km}$. Другог сата $7/8$ пређеног пута из првог сата, а то значи $(96:8)\cdot 7=84\,\mathrm{km}$. За прва два сата је прешао укупно $96+84=180\,\mathrm{km}$, што значи да је трећег сата прешао $180:2=90\,\mathrm{km}$. Последњег сата аутомобилиста је прешао $360-180-90=90\,\mathrm{km}$.

253. Три пекара за 2 сата умесе 67 хлебова, што значи да за 6 сати рада један пекар умеси 67 хлебова или $\frac{67}{6}$ хлебова на сат. Четири пекара за три сата имају 12 радних сати, па ће умесити $12\cdot\frac{67}{6}=134$ хлеба. Да би се умесило 335 хлебова, потребно је $335:\frac{67}{6}=30$ радних сати. Дакле, 5 пекара треба да раде по 6 сати.

254. Ако је $q=2$, онда је $2p+6=100$, па је $2p=94$, а $p=47$. Ако је q прост број већи од 2, онда је q непаран, па је и $3q$ непаран број, што значи да је и $2p+3q$ непаран број и да не може никада бити 100. Дакле, једино решење је $p=47$, $q=2$.

255. Нека је x број математичара који су и филозофи. Тада је $13x-x=12x$ математичара који нису филозофи и $8x-x=7x$ филозофа који нису математичари. Дакле, $12x+x+7x=20x=2\,000$, па је $x=2\,000:20=100$. Значи само математичара је $1\,200$, само филозофа 700, а математичара који су и филозофи 100.



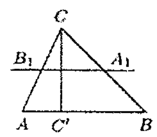
Сл. уз задатак 256

256. Ако се ланчано рачунају димензије квадрата на датој слици, онда су димензије највећег квадрата $x+4$, односно $x+x+1$, па је $x+4=x+x+1$ или $x=3\,\mathrm{cm}$. Тада су димензије правоугаоника $13\,\mathrm{cm}$ и $11\,\mathrm{cm}$, па је његов обим $48\,\mathrm{cm}$, а површина $143\,\mathrm{cm}^2$.

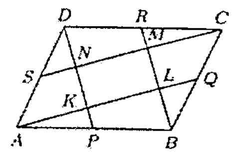
257. Нека је та једнака количина јабука $10x$. Тада је у продавницама било редом $10x+2x=12x$, $10x+3x=13x$ и $10x+5x=15x$. Према томе, $12x+13x+15x=40x=2\,000$, па је $x=50\,\mathrm{kg}$. У првој продавници је било $600\,\mathrm{kg}$, у другој $650\,\mathrm{kg}$, а у трећој $750\,\mathrm{kg}$ јабука.

258. Нека је делилац у оба случаја био број x. Тада је $1\,000=ax+8$, а $900=bx+1$. Тада је $ax=992=31\cdot 32$ и $bx=899=31\cdot 29$. Како су 32 и 29 узајамно прости бројеви, очигледно је делилац $x=31$, а тражени количници су $a=32$ и $b=29$.

259. Тачка C је симетрична датој тачки C' у односу на средњу линију A_1B_1 (слика). Права p садржи тачку C', садржи и страницу AB и паралелна је са A_1B_1. Теме A је пресек праве p и праве CB_1, а теме B је пресек правих p и CA_1.



Сл. уз задатак 259



Сл. уз задатак 260

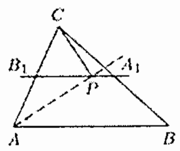
260. Четвороуглови $PBRD$ и $AQCS$ су паралелограми, па је $KN\parallel LM$ и $KL\parallel MN$ (слика). Дакле, четвороугао $KLMN$ је паралелограм. Како су KP и MR средње линије троуглова ABL и CDN, то је $AK=KL=MN=MC$. Како је LQ половина дужи MC, то је $KL=\frac{2}{5}AQ$.

261. Четврти дечак је добио половину преосталих кликера и још један кликер, што значи да половина броја кликера износи 1 кликер, а он је дакле добио $1+1=2$ кликера. Пред трећим дечаком је било $2(2+1)=6$ кликера. Пред другим дечаком је било $2(6+1)=14$ кликера, а пред првим $2(14+1)=30$ кликера. Дакле, први дечак је добио $15+1=16$ кликера, други $7+1=8$ кликера, трећи $3+1=4$ кликера, а четврти 2 кликера.

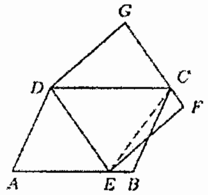
262. Ако је $x=1.49494949\ldots$, онда је $100x=149{,}494949\ldots$. Следи да је $100x-x=99x=149{,}494949\ldots-1{,}494949\ldots=148$. Дакле, $x=\frac{148}{99}$, па је x рационалан број. Како су бројеви $7+4\sqrt{3}=(2+\sqrt{3})^2$ и $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$, то је $y=\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=4$. Вредност израза $x+y$ је $\frac{148}{99}+4=5\frac{49}{99}$, тј. рационалан број.

263. Ако је $(ab+cd)^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)$, онда је $a^2b^2+2abcd+c^2d^2=a^2b^2+a^2d^2+c^2b^2+c^2d^2$, па је $2adbc=a^2d^2+c^2b^2$, односно $a^2d^2-2adbc+c^2b^2=(ad-bc)^2=0$. Јасно је да је тада и $ad-bc=0$, па је $ad=bc$.

264. Како је A_1B_1 средња линија троугла ABC, то је $B_1P \parallel AB$ (слика). Тада је $\angle BAP=\angle APB_1=\frac{\alpha}{2}$ (углови са паралелним крацима) и $\angle BAP=\angle B_1AP=\frac{\alpha}{2}$ (права AP је симетрала угла). Одавде следи да је $\angle APB_1=\angle B_1AP=\frac{\alpha}{2}$, па је троугао APB_1 једнакокрак и $AB_1=B_1P=B_1C$. Због тога је AC пречник круга описаног око троугла APC, па је $\angle APC=90°$.



Сл. уз задатак 264



Сл. уз задатак 265

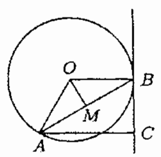
265. Очигледно је троугао CDE заједнички за оба паралелограма (слика). Како је површина паралелограма $ABCD$ двострука површина троугла CDE, а површина паралелограма $DEFG$ такође двострука површина троугла CDE, то су површине ова два паралелограма једнаке.

266. Када се изаберу било која три темена седмоугла добије се један троугао. Преостала четири темена су темена четвороугла. То значи да сваки одабрани троугао има свој одговарајући четвороугао, тј. да троуглова и четвороуглова има једнако.

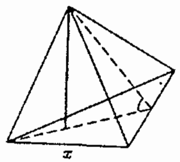
267. Нека је x број кифли, y број погачица и z број ђеврека који су купљени. Тада важи $x+y+z=100$ и $\frac{1}{2}x+2y+5z=100$. Ако се друга једначина помножи са 2 и од ње одузме прва, добија се $x+4y+10z-x-y-z=200-100$, тј. $3y+9z=100$. Једначина нема решења у скупу целих бројева, јер је лева страна дељива са 3, а десна није.

268. Решавањем једначине добија се $x=\frac{2(3-2m)}{m-4}$. Из услова задатка је $x<0$, па је $m<\frac{3}{2}$ или $m>4$.

269. Нека је M средиште тетиве AB (слика). Како су троуглови BOM и ABC слични, то је $AB:AC=BO:MB$. Тада је $AB\cdot MB=AC\cdot BO$, па је $AB\cdot 2MB=AC\cdot 2BO$. Дакле, $AB\cdot AB=AC\cdot 8$, тј. $AB^2:AC=8$.



Сл. уз задатак 269



Сл. уз задатак 270

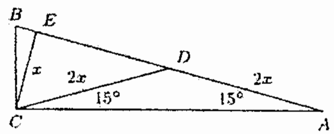
270. Из једнакости мерних бројева површине $P=\frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$ и запремине $V=\frac{x^3\sqrt{3}}{24}$, добија се $x=18$ (слика).

271. У први ред ученици могу да седну на $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2$ начина, у други на $6\cdot5\cdot4\cdot3$ начина, а преостала 3 ученика ће сести на $3\cdot2\cdot1$ начина. Дакле, укупан број распореда је $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2\cdot1=3\cdot(6!)^2$.

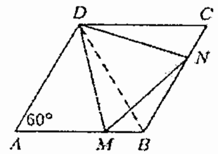
272. Из $\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{x}$ следи да је $\frac{1}{x}=\frac{2}{73}-\frac{1}{60}-\frac{1}{3\cdot73}-\frac{1}{4\cdot73}=\frac{24-4-3}{12\cdot73}-\frac{1}{60}=\frac{17}{12\cdot73}-\frac{1}{12\cdot5}$ или $\frac{1}{x}=\frac{17\cdot5}{5\cdot12\cdot73}-\frac{73}{12\cdot5\cdot73}=\frac{12}{12\cdot5\cdot73}=\frac{1}{365}$. Дакле, $x=365$.

273. Нека од 100% учесника такмичења x% навија за „Црвену Звезду“. Тада за „Партизан“ навија $(100-x)$% такмичара, па је $x+0,1\cdot(100-x)=46$. Из добијене једнакости је $x+10-0,1x=46$ или $0,9x=36$, па је $x=40\%$.

274. Углови правоуглог троугла су $\angle CAB=15°$ и $\angle CBA=75°$ (слика). Нека је хипотенуза $AB=4x$ и нека су D и E редом подножја тежишне дужи и висине из темена правог угла. Тада је $AD=BD=CD=2x$ и $\angle CDE=30°$. Како је троугао CDE правоугли, то је наспрам угла од 30° катета једнака половини хипотенузе, па је $CE=\frac{CD}{2}=\frac{2x}{2}=x$. Дакле, $AB=4CE$.



Сл. уз задатак 274



Сл. уз задатак 275

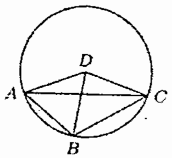
275. Како је $MB+BN=AB=a$, то је $MB=a-BN$. Следи да је $CN=BC-BN=a-BN=MB$ (слика). Троуглови ABD и BCD су једнакостранични, па је $AB=BC=CD=DA=BD=a$. Сада је јасно да су троуглови MBD и NCD подударни ($MB=NC$, $\angle MBD=\angle NCD=\varphi+60°$ и $BD=CD$). Из подударности следи да је $MD=ND$ и $\angle MDB=\angle NDC=\varphi$. Како је $\angle MDN=\angle MDB+\angle BDN=\varphi+60°-\varphi=60°$, то је троугао MND једнакостраничан.

276. Из услова (в) јасно је да Милан може бити 1, 2, 5 или 6. Милан није 1, јер би тада Жана била 2, што је у супротности са условом (а). Милан није ни 2, јер би тада Горан био 1, што је у супротности са условом (г). Милан није 6, јер би тада Зоран био 2, а Горан 1, што је опет у супротности са условом (г). Дакле, Милан је 5. Онда је Зоран 1, а Горан 2. Тада је Ана 3. (услов (г)), а Жана 4. (услов (б)) и Дана 6.

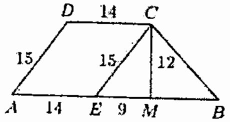
277. Бројеви $\underbrace{111\ldots111}_{2000}$ и $\underbrace{222\ldots222}_{1000}$ могу се написати као $999\ldots999:9$, односно $2\cdot999\ldots999:9$, па дати израз постаје $\frac{10^{2000}-1}{9}-2\frac{10^{1000}-1}{9}=\frac{10^{2000}-1-2\cdot10^{1000}+2}{9}=\left(\frac{10^{1000}-1}{3}\right)^2$. Дакле, дати израз је квадрат броја $333\ldots333$ (1000 тројки).

278. Именилац дате једначине мора бити различит од нуле. Како је за $x\leqslant0$, $x+|x|=0$, то значи да је $x>0$. Сада је јасно да су сва решења дате једначине $x_1=1$ и $x_2=2$.

279. Како је $AD = BD$, конструише се кружница са центром у тачки D, полупречника $AD = BD$ (слика). Како је $\measuredangle ACB = 20°$, а централни угао $\measuredangle ADB = 40°$, то и тачка C припада конструисаној кружници. Како је $\measuredangle BDC = 80°$, то је као периферијски угао над тетивом BC, $\measuredangle CAB = 40°$.



Сл. уз задатак 279



Сл. уз задатак 280

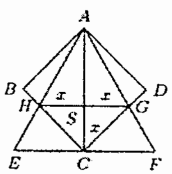
280. Ако се конструише паралелограм $ADCE$, онда је јасно да је троугао BCE правоугли, пошто су углови на основици комплементни. Тада је $EM^2 = 15^2 - 12^2 = 81 = 9^2$, па је $EM = 9\,\mathrm{cm}$. Сада је $BC^2 = (x+9)^2 - 15^2 = x^2 + 12^2$. Решавањем једначине добија се $x = 16\,\mathrm{cm}$, а тада је крак $BC = 20\,\mathrm{cm}$. Обим трапеза је $88\,\mathrm{cm}$, а површина $318\,\mathrm{cm}^2$.

281. Прво пређу отац и мајка и потроше 2 минута. Затим се за 1 минут отац врати и преда фењер сину који са баком пређе мост за 10 минута. Мајка се са фењером врати (2 минута) и заједно са оцем (2 минута) коначно цела породица пређе мост. Утрошено је $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ минута.

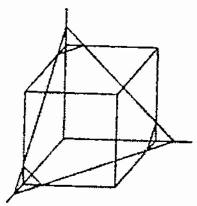
282. Како је лева страна једнакости увек мања или једнака 2, а десна већа или једнака 2, једнакост важи само када су и лева и десна страна једнакости једнаке 2. Дакле $x = -1$ је једино решење једначине.

283. Из $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} = \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ множењем са c^2 (јер је c природан број) добија се да је $a^2 + bc = ac + b^2$, тј. $a^2 - b^2 = c(a-b)$. Одавде је $(a-b)(a+b-c) = 0$. Дакле, једнакост важи увек када је $a = b$ или када је $a + b = c$.

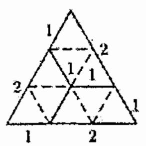
284. Из једнакости површина квадрата и троугла добија се да је $EF = AC = 3a\sqrt{2}$ (слика). Нека је $HS = CS = GS = x$. Из сличности троуглова AEF и AGH је $3a : 2x = 3a : (3a - x)$, па је $x = a$. Странице делтоида $AHCG$ су $CH = 2a$ и $AH = a$, обим је $2a(2 + \sqrt{10})$, а површина $6a^2$.



Сл. уз задатак 284



Сл. уз задатак 285



Сл. уз задатак 286

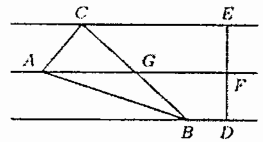
285. Добијени пресек је шестоугао чије су три странице дужине $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а друге три дужине $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ - шестоугао који представља једнакостранични троугао странице $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ од кога су исечена три вршна једнакостранична троугла странице $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ (слика). Обим пресечног шестоугла је $9\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а површина је $\frac{13\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

286. Може, јер се једнакостранични троугао странице $30\,\mathrm{cm}$ може поделити на 100 једнакостраничних троуглова странице $3\,\mathrm{cm}$, а једнакостранични троугао странице $3\,\mathrm{cm}$, на три трапеза чије су три странице $1\,\mathrm{cm}$, а једна $2\,\mathrm{cm}$ (слика).

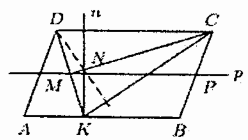
287. Из $x^2 + \frac{6}{y} = 10$ следи да је $\frac{6}{y} = 10 - x^2$. Како је x цео број, такав је и x^2, па је и $10 - x^2$ цео број. Одавде следи да је и $\frac{6}{y}$ цео број, па је y делилац броја 6, односно $y \in \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$. Тада је $x^2 = 10 - \frac{6}{y} \in \{4, 16, 7, 13, 8, 12, 9, 11\}$, па у обзир долазе само бројеви 4, 16 и 9. Сва решења су дакле: $(x, y) \in \{(2,1), (-2,1), (4,-1), (-4,-1), (3,6), (-3,6)\}$.

288. Како је $0 < \frac{7m - 17n}{17 \cdot 7} < \frac{1}{100}$, тј. $0 < \frac{7m - 17n}{119} < \frac{1}{100}$, то је $7m - 17n = 1$, па је $m = 5$ и $n = 2$.

289. Анализа. Претпоставимо да је задатак решен (слика).
По услову задатка је $DF = FE$. Четвороугао $BDEC$ је трапез, па је FG његова средња линија, одакле следи да је $BG = GC$.
Конструкција. Конструишимо праву која садржи тачку A и средиште дужи BC (тачку G). Тачкама B и C конструишимо праве паралелне конструисаној правој.
Доказ. Следи из анализе.
Дискусија. Размотримо случајеве:
(1) A, B и C су неколинеарне тачке. Задатак има три решења.
(2) A, B и C су колинеарне тачке и
(а) $AB = BC$. Задатак је неодређен (има бесконачно много решења).
(б) $AB \neq BC$. Задатак нема решења.



Сл. уз задатак 289



Сл. уз задатак 290

290. Уочимо да је $\measuredangle CDK = \measuredangle AKD$ (углови са паралелним крацима), одакле следи, користећи услове задатка, да је $\measuredangle CDK = \measuredangle DKC$ (слика). Дакле, троугао CDK је једнакокраки са основицом DK. Права p је средња линија трапеза $BCDK$, па је тачка M средиште дужи DK. Самим тим је $CM \perp DK$ (особина једнакокраког троугла). Даље је $KN \perp CD$, јер је $AB \parallel CD$. Одавде следи да је тачка N ортоцентар троугла CDK, па је DN трећа висина, која одговара страници CK, што потврђује да је $DN \perp CK$.

291. Инспектор најпре иде до краја улице OC; ако је преступник у тој улици, он ће га ухватити, а ако није, он се враћа у O и зна да је преступник у једној од улица OA или OB. Сада он може ићи у улице OA или OB, али мора водити рачуна да преступник не умакне у OC. Он иде у улицу OA до тачке $2r$ (максималном брзином и стално се тако даље креће) и зна да ако је преступник у OA онда се налази између тачака $3r$ и $4r$ (иначе би га видео). Потом се враћа у O. За време одсуствовања инспектора из O, преступник није могао стићи у улицу OC даље од r јер се инспектор враћа у O пре него он стигне у r.

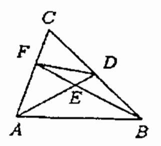
Вративши се у O, инспектор продужава, не задржавајући се, у улицу OB, и при том се може удаљити од O за $3r$. Ако је преступник у OB он ће га видети (ухватити), а ако није у OB, онда је у OA, па инспектор иде до краја OA.

292. 1) Ако је $p = 2$, онда је $4 - 2q^2 = 1$ што је немогуће, јер је лева страна ове једнакости парна, а десна непарна.

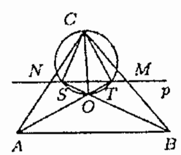
2) Ако је $p \geqslant 3$, онда постоји природан број k такав да је $p = 4k \pm 1$, па је $(4k \pm 1)^2 - 2q^2 = 1$, тј. $16k^2 \pm 8k + 1 - 2q^2 = 1$. Тада је $8k(2k \pm 1) = 2q^2$ тј. $4k(2k \pm 1) = q^2$, што значи да је q паран прост број, тј. $q = 2$. Одавде следи да је $p^2 - 8 = 1$, тј $p^2 = 9$, па је $(p, q) = (3, 2)$ једино решење.

293. Из услова задатка следи да је $(1 + ab)^2 < (a + b)^2$, тј. $1 + 2ab + a^2b^2 < a^2 + 2ab + b^2$, тј. $1 - a^2 - b^2(1 - a^2) < 0$, тј. $(1 - a^2)(1 - b^2) < 0$. Одавде следи да је $(1 - a^2) < 0$ и $(1 - b^2) > 0$ или $(1 - a^2) > 0$ и $(1 - b^2) < 0$, тј. $a^2 > 1$ и $b^2 < 1$ или $a^2 < 1$ и $b^2 > 1$. Дакле, $|a| > 1$ и $|b| < 1$ или $|a| < 1$ и $|b| > 1$.

294. Нека је $P_{\triangle ABE} = mP_1$ (слика). Тада је $P_{\triangle BDE} = nP_1$. Ако је $P_{\triangle AEF} = mP_2$, онда је $P_{\triangle DEF} = nP_2$. Тада је $P_{\triangle BDF} = P_{\triangle BDE} + P_{\triangle DEF} = nP_1 + nP_2 = n(P_1 + P_2)$. Како је $P_{\triangle CDF} = P_{\triangle BDF} = n(P_1 + P_2)$, то је $P_{\triangle BCF} = n(P_1 + P_2) + n(P_1 + P_2) = 2n(P_1 + P_2)$. Слично је, $P_{\triangle ABF} = mP_1 + mP_2 = m(P_1 + P_2)$, па је $P_{\triangle ABF} : P_{\triangle BCF} = m : 2n$.



Сл. уз задатак 294



Сл. уз задатак 295

295. Из услова задатка следи да права p полови странице BC и AC троугла ABC, при чему су M и N средишта ових страница (слика). Троугао ANT је једнакокрак, јер је $\angle ATN = \angle BAT$ (углови са паралелним крацима) и $\angle NAT = \angle BAT$. Одавде следи да је $NT = AN = CN$, па је N је центар круга описаног око троугла ACT. Дакле, $\angle ATC = 90°$, као угао над пречником. Слично се доказује да је $\angle MSO = \angle MBS$ и $\angle BSC = 90°$, где је S пресек праве p и праве BO.

Због правих углова са теменима S и T, следи да кружница чији је пречник CO садржи тачке S и T. Тада је $\angle OCT = \angle OST$ (углови над истим луком), тј. $\angle OCT = \frac{1}{2}\angle ABC$, одакле следи тражени закључак.

296. Нека тачке M и N редом имају координате (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2). Тада се могу разликовати три случаја:

а) Дуж AB има празан пресек са унутрашњошћу правоугаоника, чија су наспрамна темена M и N. У овом случају најкраћи пут има дужину $|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1|$, која се може постићи сваком комбинацијом хоризонталних и вертикалних потеза, усмерених од M ка N.

б) Претходно утврђена дужина је најмања могућа и у случају када су дужи AB и MN „супротно нагнуте“ , кад једна од њих заклапа са позитивним смером X-осе угао из интервала $(0°, 90°)$, а друга угао из интервала $(90°, 180°)$. У том случају „коса пречица“ AB не може да се искористи за скраћење пута између M и N.

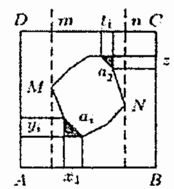
в) Уколико дуж AB има непразан пресек са унутрашњошћу правоугаоника, а дужи AB и MN су нагнуте на исту страну, онда се пречица AB може искористити за скраћење пута између M и N.

Нека је CDE правоугли троугао чије су катете CE и DE паралелне координатним осама, а чија је хипотенуза CD пресек дужи AB са правоугаоником. Најкраћу дужину имају само они путеви од T_1 до T_2 који, поред хоризонталних и вертикалних делова садрже дуж CD. Дужина тог пута је $|X_2 - X_1| + |Y_2 - Y_1| - CE - DE + CD$.

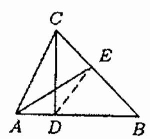
297. Нека су p, q и r три проста броја која тражимо. Дат је услов: $pqr = 7(p + q + r)$. Десна страна једнакости је дељива са 7, па како су p, q, r прости бројеви, то један од њих мора бити број 7. Нека је $r = 7$. Дати услов постаје $pq = p + q + 7$, одакле је $pq - p - q + 1 = 8$, односно $(p - 1)(q - 1) = 8$. Ово је могуће ако је $p - 1 = 1$, $q - 1 = 8$, или $p - 1 = 2$, $q - 1 = 4$, или $p - 1 = 4$, $q - 1 = 2$, или $p - 1 = 8$, $q - 1 = 1$. Одговарајућа решења су $p = 3$, $q = 5$, или $p = 5$, $q = 3$. Остале случајеве не узимамо у обзир јер 9 није прост број. Дакле, тражени бројеви су: 3, 5 и 7.

298. Како је $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 98! \cdot 99! \cdot 100! = (1) \cdot (1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3) \cdots (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100) = 1^{100} \cdot 2^{99} \cdot 3^{98} \cdot 4^{97} \cdots 98^3 \cdot 99^2 \cdot 100 = (2^{98} \cdot 3^{98} \cdot 4^{96} \cdots 98^2 \cdot 99^2) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 98 \cdot 100 = (2^{49} \cdot 3^{49} \cdot 4^{48} \cdots 98 \cdot 99)^2 \cdot 2^{50} \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 49 \cdot 50) = (2^{74} \cdot 3^{49} \cdot 4^{48} \cdots 98 \cdot 99)^2 \cdot 50!$, то треба изоставити $50!$.

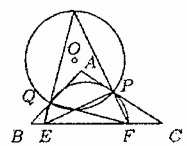
299. Нека су M и N темена многоугла, тако да трака одређена правим m и n, које су паралелне страницама AD и BC покрива цео многоугао (слика). Нека је a_i једна страница „доње“ изломљене линије датог многоугла између тачака M и N и x_i и y_i нормалне пројекције дужи a_i на странице AB и AD. Нека је, даље, a_j једна страница „горње“ изломљене линије MN и z_j и t_j нормалне пројекције дужи a_j на странице BC и CD. Из осенчених правоуглих троуглова је $a_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ и $a_j^2 = z_j^2 + t_j^2$. Узимајући у обзир све странице многоугла добија се једнакост $\Sigma a_i^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + \Sigma z_i^2 + \Sigma t_i^2$. Будући да су све дужи x_i, y_i, z_i, t_i мање од 1, то је: $x_i^2 < x_i$, $y_i^2 < y_i$, $z_i^2 < z_i$, $t_i^2 < t_i$, па је: $\Sigma a_i^2 < \Sigma x_i + \Sigma y_i + \Sigma z_i + \Sigma t_i = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. ($\Sigma x_i < AB = 1$, итд.).



Сл. уз задатак 299



Сл. уз задатак 300



Сл. уз задатак 304

300. Како је, по услову задатка, $\angle ACD = \angle ABC$ и $\angle CAD = \angle CAB$, то је троугао ACD сличан троуглу ABC, па је $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. Како је (по услову задатака) $AC = BD$, то одавде следи да је $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD}$ (слика). Даље, како је AE симетрала $\angle BAC$, то је $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}$. Користећи претходну једнакост, одавде следи да је $\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{AD}$. На крају, применом Талесове теореме, добија се да је $ED \parallel AC$, што је и требало доказати.

301. Означимо са n број камиона. Очигледно је да је $n \geqslant 4$, јер ако је $n \leqslant 3$, тада би се могло превести највише $3 \cdot 3 = 9t$. Случај $n = 4$ је немогућ. Наиме, нека је $n = 4$ и нека постоји, на пример, 13 сандука једнаке масе, тј. $m_1 = m_2 = \cdots = m_{13} = \frac{10}{13}t$. Тада се роба не може превести, јер ће по Дирихлеовом принципу у једном камиону бити 4 сандука $(13 = 3 \cdot 4 + 1)$, а тај камион би онда имао масу $4 \cdot \frac{10}{13} = \frac{40}{13} > 3t$. Ако је $n = 5$, онда се на сваки камион може натоварити маса која је већа од $2t$ а мања од $3t$, па је 5 камиона довољно.

302. Дата једнакост је еквивалентна следећим једнакостима:
$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+(x+y)^3+30xy-3x^2y-3xy^2=2\,000$, $2[(x+y)^3-1\,000]-3xy(x+y-10)=0$, $2(x+y-10)[(x+y)^2+10(x+y)+100]-3xy(x+y-10)=0$, $(x+y-10)(2x^2+2y^2+20x+20y+xy+200)=0$, $(x+y-10)[(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2]=0$.
Како је $(x+10)^2+(y+10)^2+(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2>0$, (не могу сви сабирци истовремено бити једнаки 0), то је $x+y-10=0$.

303. Нека је $n^2+3^n=m^2$, $m\in Z$. Тада је $m^2-n^2=3^n$, тј. $(m+n)(m-n)=3^n$, па можемо разликовати следеће случајеве:
(1) $m+n=3^n$, $m-n=1$, одакле је $3^n=2n+1$. За $n=1$ је то тачно, а индукцијом се показује да је $3^n>2n+1$ за $n\geqslant 2$.
(2) $m+n=3^{n-1}$, $m-n=3$, одакле је $3^{n-1}=2n+3$. Провера за $n\in\{1,2,3\}$ даје решење $n=3$, а индукцијом се показује да је $3^{n-1}>2n+3$ за $n\geqslant 4$.
(3) $m+n=3^{n-k}$, $m-n=3^k$ и $2\leqslant k<n-k$, тј. $n>2k$, тј. $n-2k\geqslant 1$. Одавде је $2n=3^{n-k}-3^k$. Покажимо да је ово немогуће. Важи $3^{n-k}-3^k>3^{n-k}-3^{n/2}=3^{n/2}\left(3^{(n/2)-k}-1\right)$. Како је $n\geqslant 4$, то је $3^{(n/2)-k}-1>1$ и $3^{n/2}\left(3^{(n/2)-k}-1\right)>3^{n/2}$, а индукцијом се показује да је $3^{n/2}>2n$ за $n\geqslant 4$, па нема више природних бројева n који задовољавају дату једнакост.
Сва решења задатка су $(m,n)\in\{(2,1),(6,3)\}$.

304. Нека је $EQ\cap FP=\{D\}$ и $EP\cap FQ=\{K\}$ и нека је O_1 центар датог полукруга (слика). Уведимо ознаке: $\measuredangle PEF=x$, $\measuredangle QFE=y$. Како је $\measuredangle EQF=\measuredangle EPF=90°$, као углови над пречником EF, то је четвороугао $DQKP$ тетиван. Нека је O центар круга описаног око четвороугла $DQKP$. Тада је $DO=OK$, $O\in DK$, $\measuredangle QOP=2\measuredangle QDP$ (централни и периферијски), тј. $\measuredangle QOP=2(\measuredangle QDK+\measuredangle KDP)$.
Како је тачка K ортоцентар троугла EFD, то је $\measuredangle QDK=\measuredangle EFQ=y$, $\measuredangle KDP=\measuredangle PEF=x$ (углови са нормалним крацима), па је $\measuredangle QOP=2(x+y)$. Даље, четвороугао AQO_1P је такође тетиван, јер је $O_1P\perp AC$ и $O_1Q\perp AB$ (AC и AB су тангенте). Одавде следи да је $\measuredangle QAP=180°-\measuredangle QO_1P=180°-(180°-\measuredangle EO_1Q-\measuredangle FO_1P)=\measuredangle EO_1Q+\measuredangle FO_1P=2(\measuredangle EFQ+\measuredangle FEP)=2(x+y)$. Како је $QA=AP$ (тангентне дужи из исте тачке A) и $\measuredangle QAP=\measuredangle QOP=2(x+y)$, то се тачке O и A поклапају, па како $A\in DK$ и $DK\perp EF$, то је $AK\perp EF$, што је и требало доказати.

305. Означимо са m број дечака, са v број девојчица и са x број победа девојчица против дечака. Тада је: $m=2v$, број победа дечака против девојчица је $2v^2-x$ и
$$\frac{\frac{v\cdot(v-1)}{2}+x}{\frac{2v\cdot(2v-1)}{2}+2v^2-x}=\frac{7}{5}.$$ Одавде следи $\left(\frac{v^2-v}{2}+x\right)\cdot 5=7\cdot\left(\frac{4v^2-2v}{2}\right)+14v^2-7x$,
тј. $\frac{5}{2}v^2-\frac{5}{2}v+5x=\frac{28v^2}{2}-7v+14v^2-7x$. Сређивањем последњег израза добија се $8x=17v^2-3v$, тј. $8x=16v^2+v^2-3v$. Из $2v^2-x\geqslant 0$, тј. $x\leqslant 2v^2$ следи $v\geqslant 1$, а из и $v^2-3v\leqslant 0$, тј. $v(v-3)\leqslant 0$ следи $v\leqslant 3$, па је $1\leqslant v\leqslant 3$, одакле се провером закључује да је $v=3$ и $m=9$.

2001. година

306. Обим баште је $2\cdot(46\,\mathrm{m}+54\,\mathrm{m})=200\,\mathrm{m}$. Потребно је $200\,\mathrm{m}$ жице и $200:2=100$ стубова.

307. Површина школског дворишта је већа за $1575\,\mathrm{m}^2$, јер је $3975\,\mathrm{m}^2-24\,\mathrm{a}=3975\,\mathrm{m}^2-2400\,\mathrm{m}^2=1575\,\mathrm{m}^2$.

308. (а) Други сабирак треба смањити за $222-150=72$. (б) Други сабирак треба смањити за $222+50=272$.

309. $1001-998=3$.

310. Најмањи је 1 111 268, а највећи 8 621 111.

311. Тачна су тврђења: $1\in P$, $\{3,2\}\in P$, $\{\{2,3\}\}\subset P$, $3\in P$.

312. Дужи има $4+3+2+1=10$. С обзиром да две тачке одређују дуж преостале три тачке одређују троугао, па троуглова има такође 10.

313. Већи је угао β за $\beta-\alpha=2001'-20°1'=2001'-1201'=800'=13°21'$.

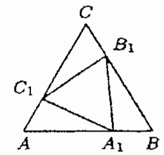
314. С обзиром да се 3 садржи у 2001, а 4 у 2000, то је $2000\cdot 2001$ дељиво са 12. Како 13 није дељиво са 12 то број $\overline{16x}$ мора бити дељив са 12. Дакле, са 3 и са 4, па је x цифра 0 или 4 или 8. Како $1+6+0$ и $1+6+4$ нису дељиви са 3, а $1+6+8$ јесте, то је тражена цифра $x=8$.

315. С обзиром да је $60=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5$ то су тражени бројеви 3, 4 и 5.

316. $|-8\cdot 3-(-(-3))|=|-27|=27$.

317. Нека топола треба да нарасте за x метара. Тада је $9\frac{3}{4}+x=11.2+2\frac{1}{2}$, односно $x=11.2+2.5-9.75=3.95$, па топола треба да нарасте за $3.95\,\mathrm{m}$.

318. Нека је a страница једнакостраничног троугла ABC (слика). Како је $AA_1=BB_1=CC_1=x$, $BA_1=CB_1=AC_1=a-x$ и $\measuredangle C_1AA_1=\measuredangle A_1BB_1=\measuredangle B_1CC_1=60°$, то су троуглови C_1AA_1, A_1BB_1 и B_1CC_1 подударни, одакле следи да су све странице троугла $A_1B_1C_1$ једнаке.

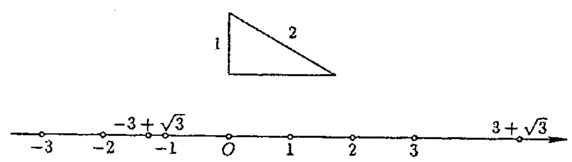


Сл. уз задатак 318

319. Бројеви 3 и 29 су узајамно прости, па $\overline{20ab}$ треба да буде дељив са 87. Како су $87\cdot 23=2001$ и $87\cdot 24=2088$ једини бројеви облика $\overline{20ab}$ дељиви са 87, како је 2088 дељив са 6, а 2001 није, то је $a=0$, $b=1$.

320. Нека је број планираних ученика x. Тада је број пријављених ученика $\frac{11}{9}x$,а на зимовање је отишло $\frac{8}{11}\cdot\frac{11}{9}x=\frac{8}{9}x$ ученика. Решење једначине $x-8=\frac{8}{9}x$ је $x=72$. Дакле, број планираних ученика је 72, а на зимовање је отишло 64 ученика.

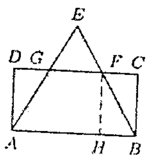
321. Конструише се дуж једнака $\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1^2}$ као катета правоуглог троугла чија је хипотенуза 2, а друга катета 1 (слика). Затим се на бројевној правој од тачака 3 и -3 нанесе у позитивном смеру дуж једнака $\sqrt{3}$.



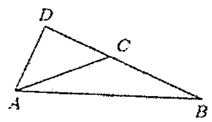
Сл. уз задатак 321

322. Како је $21^{12} = 3^{12} \cdot 7^{12}$, а $54^4 = 2^4 \cdot 27^4 = 2^4 \cdot 3^{12}$ и како је $7^{12} > 2^4$, то је и $21^{12} > 54^4$.

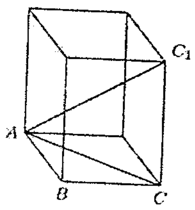
323. Нека је $ABCD$ правоугаоник, ABE једнакостранични троугао, F и G пресеци дужи BE и AE са CD и нека је H нормална пројекција тачке F на AB (слика). Тада је $FB = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ као страница једнакостраничног троугла висине $3\,\mathrm{cm}$, а дуж $FG = (6-2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$. Обим трапеза $ABFG$ је $O = (12+2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$, а површина је $P = (18-3\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 323



Сл. уз задатак 325



Сл. уз задатак 329

324. Како је $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}+3 = |1-\sqrt{2}|+3 = \sqrt{2}-1+3 = \sqrt{2}+2$, то је $a=1$ и $b=2$.

325. Нека су AB и AD редом основица и висина једнакокраког троугла ABC (слика). Троугао ACD је једнакокрако-правоугли. Користећи Питагорину теорему добија се: $AD = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а површина троугла је $9\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$.

326. Нека у другом џаку има x килограма шећера. Тада у првом има $\frac{4}{5}x$, а у трећем $\frac{42.5}{100}\cdot\frac{4}{5}x$ килограма. Решење једначине $x+\frac{4}{5}+\frac{42.5}{100}\cdot\frac{4}{5}x = 64.2$ је $x=30$, па у првом џаку има 24 kg шећера.

327. Распоред дечака и девојчица може бити: МЖМЖМЖ или ЖМЖМЖМ. У сваком од ова два случаја дечаци и девојчице могу сести на по $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ начина, па је број тражених начина $2\cdot 6\cdot 6 = 72$.

328. Троуглови CDB и ADC имају једнаке углове (углови са нормалним крацима) и зато су слични. Зато је $CD : BD = AD : CD$, одакле је $CD^2 = AD\cdot BD$.

329. Дијагонала AC основе $ABCD$ квадра је $AC = 25\,\mathrm{cm}$ (слика). Ивица CC_1 је висина једнакостраничног троугла странице $2\,AC$ и зато је $CC_1 = 2\,AC\frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $CC_1 = 25\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Дакле, $V = 4\,200\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$ и $P = (336+1\,550\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

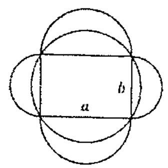
330. Нека су a и b странице правоугаоника (слика). Полукругови над њима имају полупречнике једнаке $\frac{a}{2}$ и $\frac{b}{2}$, а полупречник описаног круга око правоугаоника је

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$. Збир површина полумесеца је једнак збиру површина полукругова и површине правоугаоника умањеним за површину круга описаног око правоугаоника $P = \left(\frac{a}{2}\right)^2\pi + \left(\frac{b}{2}\right)^2\pi + ab - \frac{1}{4}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\pi = ab$.

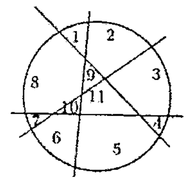
331. Умањеник треба смањити за $4567-1234 = 3333$.

332. Нека је у трећем павиљону било x излетника. Тада је у првом било $x+12$, у другом $x-14$, а у четвртом x излетника. То је укупно $4x-2$ излетника, па је $4x-2 = 430$ или $4x = 432$. Дакле, $x = 108$. Према томе, у првом павиљону је било 120 излетника, у другом 94, а у трећем и четвртом 108 излетника.

333. То је 11 делова (видети слику).



Сл. уз задатак 330



Сл. уз задатак 333

18	11	16
13	15	17
14	19	12

Сл. уз задатак 335

334. $5\cdot(4+26) : 2 + 1926 = 2001$.

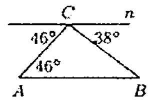
335. Решење је дато на слици.

336. Како је $M = \{$М, А, Т, Е, И, К$\}$, $T = \{$Т, А, К, М, И, Ч, Е, Њ$\}$, то је $M\cap T = \{$М, А, Т, Е, И, К$\} = M$. Скуп M има $5+4+3+2+1 = 15$ двочланих подскупова.

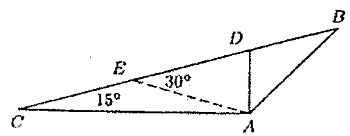
337. Како је $\frac{2}{29} = \frac{2\cdot 69}{29\cdot 69} = \frac{138}{2001} < \frac{5x}{2001} < \frac{3}{23} = \frac{3\cdot 87}{23\cdot 87} = \frac{261}{2001}$, то је $138 < 5x < 261$, па је $5x \in \{140, 145, 150, \ldots, 255, 260\}$. Тада је $x \in \{28, 29, 30, \ldots, 51, 52\}$. Дакле, $52-27 = 25$ природних бројева испуњава услове.

338. Бројеви $2p$ и 100 су дељиви са 2, па и број $3q$ мора бити дељив са 2. Дакле, $q = 2$, па је $2p = 94$ и $p = 47$. С обзиром да је 2 једини паран прост број, то је $p = 47$, $q = 2$ једино решење.

339. Како је $\measuredangle BAC = 46°$, то је и $\measuredangle ACn = 46°$, јер су то углови са паралелним крацима (слика). Како је $\measuredangle BCn = 38°$, то је $\measuredangle ACB = 180° - (46°+38°)$, па је $\measuredangle ACB = 96°$.



Сл. уз задатак 339



Сл. уз задатак 344

340. Трећина чоколада кошта 80 динара, па све коштају 240 динара. Дакле, једна чоколада кошта $240 : 8 = 30$ динара. Марија је уложила $3\cdot 30 = 90$ динара, а Петар $5\cdot 30 = 150$ динара, па је Марија узела $90-80 = 10$ динара, а Петар $150-80 = 70$ динара.

341. Претпоставимо да свакoм од дечака припаде различит број кликера. Ако пођемо од могућности: $0+1+\cdots+16+17 = 18\cdot 17:2 = 9\cdot 17 = 153$, видимо да ова варијанта захтева више од 150 кликера, што значи да би свака друга варијанта, где би најмањи број кликера био већи од нуле, тим пре била немогућа.

342. На познат начин конструишемо угао од $60°$, који са датим има заједничко теме и крак, а други крак му је са исте стране где и други крак угла од $19°$. Узастопном деобом угла од $60°$ добијамо угао од $15°$. Разлику до $19°$ узастопно поделимо на пола и тако добијамо дужину лука који одговара углу од $2°$ односно $1°$. На крају, овај лук наносимо на лук угла од $19°$, истог полупречника. Напомена: Могуће је и друго решење: ако се угао од $19°$ нанесе 19 пута добија се угао од $361°$ који је за један степен већи од пуног угла. Потом се онда тим углом од $1°$ може извршити подела угла од $19°$.

343. Како вредност израза треба да је већа од 0 и мања од 1, то израз $3x-6$ треба да је већи од 0 и мањи од 9. Лако се израчунава да је $x \in \{3,4\}$.

344. Нека је ABC троугао са угловима од $30°$ и $15°$ редом код темена B и C (слика). Како је троугао ACD правоугли, то је центар описане кружнице E на средини хипотенузе CD, дакле $CE = ED = AE$. Како је $\triangle CAE$ једнакокрак, јер је $CE = AE$, то је $\measuredangle CAE = 15°$, а $\measuredangle AED = 30°$, као спољашњи угао тог троугла. У $\triangle AEB$ је $AE = AB$, одакле следи да је $CE = ED = EA = AB$, па је $CD = 2AB$.

345. Ако се крене од краја, након сусрета са Јеленом, Ђорђе је остао без чоколаде. Јелени је дао половину свих које је имао у џепу и још пола од једне: $x - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) = 0$. Следи да је $x = 1$. Из овога се јасно види да је након сусрета са Баном имао једну чоколаду. Ако број чоколада који је имао пре сусрета са Баном обележимо са y онда је $y - (\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}) = 1$. Дакле, $y = 3$, па је након сусрета са Аном, Ђорђу преостало 3 чоколаде.

Ако је укупан број чоколада које је купио Ђорђе био n, сада је јасно $n - (\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}) = 3$. Следи да је $n = 7$.

346. Увршћавањем броја m у дати израз добија се да је вредност датог израза једнака $33/2$.

347. Нека је $a = 3\,\text{cm}$ страница квадрата K, а a_1 страница квадрата K_1. Како је $P = \frac{3}{4}P_1$, то је $a^2 = \frac{3}{4}a_1^2$. Одавде је $9\,\text{cm}^2 = \frac{3}{4}a_1^2$, па је $a_1 = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$. Конструкцију броја $\sqrt{3}$ (видети задатак 321) лако изводимо након чега је конструкција квадрата једноставна.

348. Нека је $a = -\frac{666}{667} = -\Big(\frac{667-1}{667}\Big) = -1 + \frac{1}{667}$, $b = -\frac{1333}{1334} = -\Big(\frac{1334-1}{1334}\Big) = -1 + \frac{1}{1334}$ и $c = -\frac{1998}{2001} = -\Big(\frac{2001-3}{2001}\Big) = -1 + \frac{3}{2001} = -1 + \frac{1}{667}$. Следи да је $a = c > b$.

349. Први број је 40, а нека је други број x. Тада је трећи број $40-x$; четврти број $x-40+x = 2x-40$; пети број $80-3x$; шести број $5x-120$; седми број $200-8x$; осми број $13x-320$ и девети број $520-21x$. Дакле, $520-21x = 100$ или $21x = 420$, па је $x = 20$. Дакле, чланови низа су $40, 20, 20, 0, 20, -20, 40, -60, 100$.

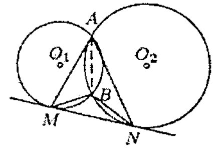
350. Како је због односа углова у ромбу и из особине да су суседни углови суплементни $\alpha + 3\alpha = 180°$, то је $4\alpha = 180°$, па је угао $\alpha = 45°$. Ако са h обележимо висину ромба, тада је страница ромба $a = h\sqrt{2}$. Како је $P = \sqrt{8}\,\text{cm}^2$ и $P = ah$, то следи да је $\sqrt{8}\,\text{cm}^2 = h\sqrt{2}\cdot h$, па је $h = \sqrt{2}\,\text{cm}$. Тада је $a = 2\,\text{cm}$, па је обим ромба $O = 8\,\text{cm}$.

351. Да би се решила дата једначина морају се претходно размотрити карактеристични интервали: $x < 0$; $0 \leqslant x < 1$ и $1 \leqslant x$. У првом интервалу једначина је $x - (x-1) = 2 + x$, па је $x = -1$ и решење припада интервалу. У интервалу $[0,1)$ једначина постаје

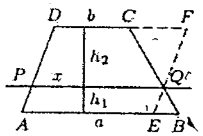
$x-(x-1) = 2-x$ и решење $x = 1$ очигледно не припада посматраном интервалу. Коначно, у интервалу $[1,\infty)$ једначина је $x + (x-1) = 2 - x$ и решење $x = 1$ припада интервалу. Дакле, решења дате једначине су $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Коначно, производ квадрата разлике решења и збира квадрата решења је: $(-1-1)^2(1+1) = 8$.

352. Дата неједначина $\dfrac{\frac{2}{3} - 3x}{-x + \frac{1}{2}} > 1$ еквивалентна је са неједначином $\dfrac{-12x+1}{3(-2x+1)} > 0$. Следи да је $(-12x+1 > 0$ и $-2x+1 > 0)$ или $(-12x+1 < 0$ и $-2x+1 < 0)$. Тражене вредности променљиве x су: $x < \frac{1}{12}$ или $x > \frac{1}{2}$.

353. Како је периферијски угао једнак одговарајућем углу између тангенте и тетиве истог круга, то је $\measuredangle MAB = \measuredangle NMB$ и $\measuredangle NAB = \measuredangle MNB$ (слика). Тада је $\measuredangle MAN + \measuredangle MBN = \measuredangle MAB + \measuredangle NAB + \measuredangle MBN = \measuredangle NMB + \measuredangle MNB + \measuredangle MBN = 180°$, јер су то углови троугла MBN.



Сл. уз задатак 353



Сл. уз задатак 354

354. Нека је $ABCD$ дати трапез и нека је тражена дуж $PQ = x$ (слика). Нека је h_1 висина трапеза $ABQP$, а h_2 висина трапеза $PQCD$. Нека права која садржи Q и која је паралелна са AD сече праве AB и CD редом у тачкама E и F. По услову задатка је $P_{ABQP} = P_{PQCD}$. Добија се да је $\frac{a+x}{2}h_1 = \frac{b+x}{2}h_2$. Одавде је $\frac{a+x}{b+x} = \frac{h_2}{h_1}$. Како је троугао EBQ сличан са троуглом FCQ, то је $\frac{a-x}{x-b} = \frac{h_1}{h_2}$ или $\frac{h_2}{h_1} = \frac{x-b}{a-x}$. Даље је $\frac{a+x}{b+x} = \frac{x-b}{a-x}$, па је $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

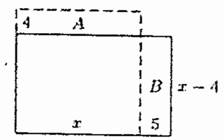
Сл. уз задатак 355

355. Нека је пресек коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ са датом равни једнакокраки трапез BC_1NM, где су N и M редом средишта ивица A_1D_1 и A_1A (слика). Основице трапеза су $BC_1 = a\sqrt{2}$ и $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, а краци су $BM = C_1N$. Како је $BM^2 = AB^2 + AM^2$, то је $BM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{5a^2}{4}$. За висину h трапеза BC_1NM важи $h^2 = BM^2 - BP^2$, где је $BP = \dfrac{BC_1 - MN}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ (слика). Како је $h^2 = \dfrac{5a^2}{4} - \dfrac{2a^2}{16}$, то је $h = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$. Површина траженог пресека је $P_{BC_1NM} = \dfrac{BC_1 + MN}{2}h$. Одавде је

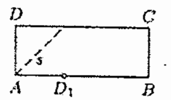
$$P_{BC_1NM} = \frac{a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}}{2} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{9a^2}{8}.$$

356. За нумерацију једноцифрених парних страница употребе се 4 цифре. За 45 парних двоцифрених страница употреби се $45 \cdot 2 = 90$ цифара. За 100, 102, 104, 106, 108 и 110 страницу употреби се $6 \cdot 3 = 18$ цифара. Дакле, укупно је потребно $4 + 90 + 18 = 112$ цифара.

357. Нека је страница добијеног квадрата x (слика). Тада су странице правоугаоника $x + 5$ и $x - 4$. Користећи услове задатка, следи да су површине правоугаоника A и B једнаке, па је $5(x - 4) = 4x$. Дакле, $5x - 20 = 4x$, па је $x = 20$, тј. страница квадрата је 20 cm, а странице правоугаоника су 25 cm и 16 cm. Обим правоугаоника је 82 cm и за 2 cm је већи од обима квадрата.



Сл. уз задатак 357



Сл. уз задатак 363

358. Најмањи је онај број који има најмање цифара, па је тражени број седмоцифрен (ако би био шестоцифрен, збир његових цифара био би највише $6 \cdot 9 = 54$). Дакле, тражени број је 7999998.

359. Ако у једној тони морске воде има 35 kg соли, онда у 1 kg морске воде има 35 000 g : 1 000 = 35 g. Тада у 1 000 g : 5 = 200 g морске воде има 35 g : 5 = 7 g соли. Ако 1 000 kg обичне воде садржи 40 g соли, онда 1 000 kg : 40 = 25 kg воде садржи 1 g соли. Дакле, за 7 g соли потребно је $7 \cdot 25$ kg = 175 kg обичне воде.

360. Како је $2\,001 = 3 \cdot 667 = 3 \cdot 23 \cdot 29$ то су могућа следећа решења: $61 \cdot 1 \cdot 69 = 23 \cdot 3 \cdot 29 = 2\,001$.

361. Тражени број је дељив са 15, дакле мора бити дељив и са 3 и са 5. Најмањи је онај природан број који има најмање цифара, при чему је последња цифра тог броја 0 или 5 (због дељивости са 5). Ако је последња цифра 0, онда је најмањи могући такав број 690. Ако је последња цифра 5, онда је најмањи такав број 195. Дакле, тражени број је 195.

362. Ако се преосталом делу од 1,5 m „врати" 0,5 m добија се 2 m што је половина мањег дела. Дакле, мањи део је 4 m. Ако вратимо још 0,5 m, онда је половина канапа 4,5 m, па је цео канап дужине 9 m.

363. Тачка D_1 припада дужи AB и $AD = AD_1 = 4$ cm (слика). Како је $AB = AD_1 + D_1B = 4\text{ cm} + 7\text{ cm} = 11$ cm, тражени обим правоугаоника је $2 \cdot (11\text{ cm} + 4\text{ cm}) = 30$ cm.

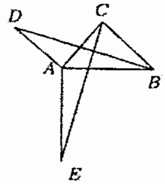
364. Како је $14 = 2 \cdot 7$, то постоје само две могућности: офарбане су две стране коцке и то оне две које имају заједничку ивицу или су офарбане три стране коцке које немају заједничко теме. У првом случају свих 14 коцкица су наређане једна на другу, а у другом

случају је два пута по 7 коцкица наређано једна на другу. Дакле, у првом случају је $a = 14$ cm, а у другом је $a = 7$ cm. Ако је $a = 14$ cm, онда је број неофарбаних коцкица $14 \cdot 14 \cdot 14 - 14 \cdot 14 - 14 \cdot 13 = 2\,366$ коцкица. Ако је $a = 7$ cm, онда је број неофарбаних коцкица $7 \cdot 7 \cdot 7 - 2 \cdot 7 \cdot 7 - 5 \cdot 7 = 210$.

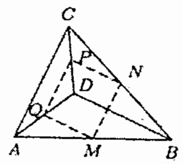
365. Нека је број девојчица x. Прва од њих познаје 7, друга $7 + 1 = 8$, трећа $7 + 2 = 9$, последња $7 + (x - 1)$ дечака. Дакле, укупан број девојчица и дечака је $x + 7 + (x - 1) = 20$. Значи да је $2x + 6 = 20$, па је $x = 7$. Дакле, девојчица је 7, а дечака 13.

366. Следи да је $||x| - 1| = 2\,000$. Према томе, или је $|x| - 1 = 2\,000$, или је $|x| - 1 = -2\,000$. Дакле, или је $|x| = 2\,001$ или је $|x| = -1\,999$ (ово је немогуће). Тражена решења су 2 001 или −2 001.

367. Троуглови ABD и ACE су подударни ($AD = AC$, $\measuredangle DAB = 90° + \alpha = \measuredangle EAC$ и $AB = AE$) (слика). Из подударности следи да је $BD = CE$.



Сл. уз задатак 367



Сл. уз задатак 369

368. Како је број $\overline{63b1}$ непаран, то он не може бити дељив ни са 2 ни са 4. Према томе, производ $\overline{54a} \cdot \overline{63b1}$ је дељив са $12 = 3 \cdot 4$ ако је број $\overline{54a}$ дељив са 12 или ако је дељив са 4, а број $\overline{63b1}$ дељив са 3. Број $\overline{54a}$ је дељив са 12, ако је $a = 0$. Број $\overline{54a}$ је дељив са 4 ако је $a \in \{0, 4, 8\}$, а број $\overline{63b1}$ је дељив са 3, ако је $b \in \{2, 5, 8\}$. Према томе, задатак има 16 решења: $(a, b) \in \{(0,0), (0,1), (0,2), \ldots, (0,9), (4,2), (4,5), (4,8), (8,2), (8,5), (8,8)\}$.

369. Како је $AM = MB$ и $BN = NC$, то је MN средња линија троугла ABC (слика). Слично је и PQ средња линија троугла ADC. Следи да је MN једнако и паралелно са PQ. Такође је NP средња линија троугла BCD, а QM средња линија троугла ABD, па је NP једнако и паралелно са MQ. Из добијене једнакости и паралелности јасно је да је четвороугао $MNPQ$ паралелограм.

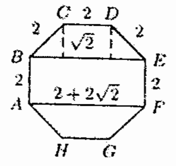
370. Нека је човек рођен $\overline{19xy}$ године. Он сада има $2\,001 - \overline{19xy}$ година, па је $2\,001 - \overline{19xy} = 1 + 9 + x + y$. Дакле, $2\,001 - 1\,000 - 900 - 10x - y = 10 + x + y$. Следи да је $91 = 11x + 2y$, па је x непаран број. Како је $2y \leqslant 18$, то је $73 \leqslant 11x \leqslant 91$. Следи да је $x \in \{7, 8\}$, дакле $x = 7$, па је и $y = 7$. Човек је рођен 1977 године.

371. Како је $9 - 4\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^2$ то је $A = \sqrt{(\sqrt{5} - 3)^2} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = |\sqrt{5} - 3| + \sqrt{(\sqrt{5} - 2)^2} = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = 1$, па је алгебарска вредност датог израза рационалан број.

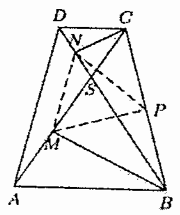
372. Збир цифара 10 имају следеће четвороцифрене комбинације са различитим цифрама: $0 + 1 + 2 + 7 = 0 + 1 + 3 + 6 = 0 + 1 + 4 + 5 = 0 + 2 + 3 + 5 = 1 + 2 + 3 + 4$. Прва, друга, трећа и четврта комбинација имају по $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ четвороцифрених бројева, јер нула не може бити прва цифра, а последња комбинација садржи $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ броја. Укупан број таквих четвороцифрених бројева је $18 + 18 + 18 + 18 + 24 = 96$.

373. Ако први многоугао има m, а други n страница, онда је очигледно $\frac{(m-2)180°}{m} : \frac{(n-2)180°}{n} = 3:2$ или $3m(n-2) = 2n(m-2)$, па је $3mn - 6m = 2nm - 4n$. Тада је $mn - 6m + 4n = 0$. Следи да је $mn - 6m + 4n - 24 = -24$, па је $(m+4)(6-n) = 24$. Дакле, $m + 4 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Условима задатка очигледно одговарају само вредности $m = 4$, $m = 8$, $m = 20$ и одговарајуће вредности $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$.

374. Тражена површина је једнака збиру површина правоугаоника $ABEF$ и трапеза $BCDE$ (слика). Дакле, површина је $P = 6(1+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 374



Сл. уз задатак 375

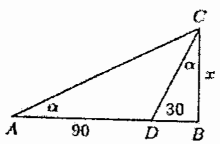
375. Како је MN средња линија троугла ASD то је MN половина крака AD, па према томе и крака BC (слика). Троугао BCN је правоугли, па је тежишна дуж PN једнака половини хипотенузе BC. Слично је и троугао BMC правоугли, па је тежишна дуж MP једнака половини хипотенузе BC. Дакле, $MN = NP = MP = \frac{1}{2}BC$.

376. Нека је x број тачних задатака, y број нетачних задатака и z број задатака које ученик није решавао. Тада је $x + y + z = 20$ и $8x - 5y = 13$. Решавањем друге једначине добија се да је $x = 6$, или $x = 11$ или $x = 16$. Одговарајуће вредности су 7, 15 и 23. Очигледно је да последње две могућности нису могуће, јер је $x + y > 20$. Дакле, једино решење је $x = 6$, $y = 7$ и $z = 7$.

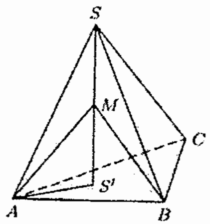
377. (а) Да би праве биле паралелне мора $2m - 0{,}5 = 7m + 2$, одакле је $m = 0{,}5$.

(б) Из услова $2m - 0{,}5 < 0$ и $7m + 2 > 0$ добија се да је $-\frac{2}{7} < m < \frac{1}{4}$.

378. Троуглови ABC и BCD су слични (оба су правоугла са оштрим углом α) (слика). Из сличности је $AB : BC = BC : BD$ или $120 : x = x : 30$ или $x^2 = 3\,600$, па је $x = 60\,\mathrm{m}$.



Сл. уз задатак 378



Сл. уз задатак 379

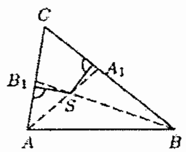
379. Ако је ивица пирамиде x, онда је $AS' = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ и $SS' = x\sqrt{\frac{2}{3}}$ (слика). Тада је $SM = MS'$ половина те дужи па је, користећи Питагорину теорему, $MA^2 = MB^2 = \frac{x^2}{2}$. Тада је $AM^2 + BM^2 = \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = x^2 = AB^2$, што на основу обрнуте Питагорине теореме значи да је троугао ABM правоугли.

380. Ученика шестог разреда бирамо на три начина. Остала три члана екипе бирамо по принципу: 1 седмак и 2 осмака; 2 седмака и 1 осмак или сва 3 седмака. То је редом $(4 \cdot 5 \cdot 4) : 2 = 40$, $(4 \cdot 3 : 2) \cdot 5 = 30$ или 4 начина. Према томе, екипу је могуће изабрати на укупно $3 \cdot (40 + 30 + 4) = 3 \cdot 74 = 222$ начина.

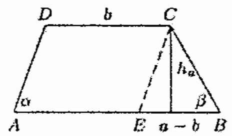
381. У маси пшенице од $4\,250\,\mathrm{kg}$, воде је 20%, дакле $850\,\mathrm{kg}$. После сушења пшенице, маса пшенице је смањена за $250\,\mathrm{kg}$, дакле остало је још само $600\,\mathrm{kg}$ воде. Влажност пшенице после сушења је, дакле, $600 : 4\,000$, тј. 15%.

382. Нека је $70 \cdot a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - n = X$. Природан број n при дељењу са 3 даје остатак a, па је $n = 3p + a$, што значи да је $X = 70 \cdot a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - n = 69 \cdot a + a + 21 \cdot b + 15 \cdot c - 3p - a = 69a + 21b + 15c + 3p$ дељив са 3. На сличан начин се, користећи чињеницу да је $n = 5q + b$, односно $n = 7r + c$, доказује да је X дељиво са 5 и 7. Према томе, X је дељив са $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

383. Нека је у троуглу ABC угао $\alpha > \beta$, тј. $\alpha > 60°$ и $\beta < 60°$ (слика). Тада је $\angle AA_1B = \frac{\alpha}{2} + 60° > 90°$ и $\angle BB_1A = \frac{\beta}{2} + 60° < 90°$. Нека су M и K, редом, подножја нормала из S на BC, односно AC. Како је S центар уписане кружнице у троугао ABC, то је $SM = SK$. Троуглови SMA_1 и CKB_1 имају једнаке углове, јер је $\angle SMA_1 = \angle AKB_1 = 90°$ и $\angle SA_1M = \angle AA_1C = \frac{\alpha}{2} + \beta = \frac{\beta}{2} + 60° = \angle BB_1A = \angle SB_1K$. Тада је и $\angle MS_1A = \angle KSB_1$. Коначно, троуглови SMA_1 и SKB_1 су подударни, па је и $SA_1 = SB_1$.



Сл. уз задатак 383



Сл. уз задатак 384

384. Нека је E тачка на основици AB, таква да је $AE = CD$ (слика). Како је $CE \parallel AD$, то је могуће конструисати троугао BCE, јер су познати елементи: $\angle CEB = \alpha$, $\angle CBE = \beta$ и висина $CC' = h_a$. У добијеном троуглу BCE дуж BE једнака је $a - b$ и како је дата дуж $a + b$, то је могуће конструисати дужи a и b, чиме даља конструкција постаје једноставна.

385. Пера ће из корпе на којој пише Рајко извући само једну воћку. Та корпа је или Ђорђева (у њој су тада 2 крушке и 3 јабуке) или Перина (у њој су тада 3 брескве). Разликују се три случаја:

1) Ако је Пера извукао крушку, јасно је да је та корпа Ђорђева. Тада корпа на којој пише Пера, припада Рајку, а корпа на којој пише Ђорђе припада Пери.

2) Ако је Пера извукао јабуку, опет је јасно је да је та корпа Ђорђева. Тада корпа на којој пише Пера, припада Рајку, а корпа на којој пише Ђорђе припада Пери.

3) Ако је Пера извукао бреску, та корпа је његова, па је корпа на којој пише Пера у ствари Ђорђева, а корпа на којој пише Ђорђе припада Рајку.

386. Нека је најмањи заједнички садржалац бројева a и b једнак s, а највећи заједнички делилац једнак d и, на пример, $a > b$. Тада је $s = kd$, па је $s = kd = d + 20$. Одавде је $(k-1)d = 20$, па су могући следећи случајеви:

1) $d = 1$, $k-1 = 20$, $k = 21$. Тада је $s = 21$, па је $a = 21$, $b = 1$ или $a = 7$, $b = 3$.

2) $d = 2$, $k-1 = 10$, $k = 11$. Тада је $s = 22$, па је $a = 22$, $b = 2$.

3) $d = 4$, $k-1 = 5$, $k = 6$. Тада је $s = 24$, па је $a = 24$, $b = 4$.

4) $d = 5$, $k-1 = 4$, $k = 5$. Тада је $s = 25$, па је $a = 25$, $b = 5$.

5) $d = 10$, $k-1 = 2$, $k = 3$. Тада је $s = 30$, па је $a = 30$, $b = 10$.

6) $d = 20$, $k-1 = 1$, $k = 2$. Тада је $s = 40$, па је $a = 40$, $b = 20$.

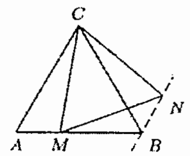
Укупно има 14 решења.

387. Ако се $\dfrac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2^1+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2^1+1}$ прошири са $2-1$ добија се израз

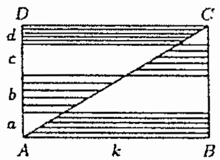
$$\frac{(2-1)(2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2^1+1)}{(2-1)(2^8+2^7+\cdots+2^2+2^1+1)} : 3^3, \text{ тј.}$$

$$\frac{2^{18}-1}{2^9-1} : 3^3 = \frac{(2^9-1)(2^9+1)}{2^9-1} : 3^3 = (2^9+1) : 27 = 513 : 27 = 19.$$

388. Како је $\angle MBC = \angle MNC = 60^\circ$, то постоји кружница која садржи тачке M, B, N и C (слика). Како је $\angle CMN = 60^\circ$, то је и $\angle CBN = 60^\circ$ (као периферијски углови над истом тетивом CN). Како је $\angle ACB = \angle NBC = 60^\circ$, то су праве AC и BN паралелне.



Сл. уз задатак 388



Сл. уз задатак 389

389. Нека је S ознака за површине шрафираних, а T за површине белих фигура. Нека L је ознака за фигуре лево од дијагонале AC, а D ознака за фигуре десно од дијагонале AC и нека је k дужина датог правоугаоника. Тада је очигледно $S_L + T_L = S_D + T_D$, јер обе стране једнакости представљају половину површине целог правоугаоника. Слично је $T_L + S_D = ak + ck = (a+c)k = (b+d)k = bk + dk = S_L + T_D$. Сабирањем добијених релација следи $S_L + T_L + T_L + S_D = S_D + T_D + S_L + T_D$. Одавде је јасно да је $T_L = T_D$, па је и $S_L = S_D$.

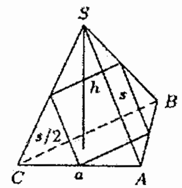
390. Бројеви које је Лека написао су из скупа $\{10, 11, \ldots, 99\}$. Четрдесет парова $(10, 90)$; $(11, 89)$; $(49, 51)$ у збиру дају 100, бројеви 50, 91, 92, 93, …, 98, 99 (укупно 10) немају својих одговарајућих парова. Очигледно је да ма како Лека бирао 55 бројева увек постоји 45 ($45 > 40$) који припадају првом скупу, тј. увек постоје два чији је збир 100. Дакле, Жарко је био у праву.

391. Нека је количник који је израчунао сваки ученик дефинисан изразом $\dfrac{x_k}{x_k + 2k - 1}$ где је x_k број бомбона које је добио k-ти ученик, а k редни број његовог места у врсти.

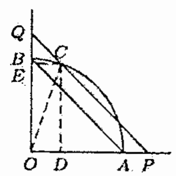
Како је по условима задатка $\dfrac{x_k}{x_k+2k-1}$ константно, то је $\dfrac{x_k}{x_k+2k-1} = M$. Дакле, $x_k = \dfrac{M}{1-M}(2k-1)$, па је $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = 800$, али је и $x_1 + x_2 + \cdots + x_{20} = \dfrac{M}{1-M}(1 + 3 + \cdots + 39) = \dfrac{M}{1-M}400 = 800$. Значи да је $\dfrac{M}{1-M} = 2$, па је $x_{12} = 2(24-1) = 46$ бомбона.

392. Нека је на турниру учествовало m мајстора и v велемајстора. Између њих је одиграно mv партија. Укупан број одиграних партија на турниру је $\dfrac{(m+v)(m+v-1)}{2}$. Из услова задатка је $2mv = (m+v)(m+v-1) : 2$, па је $4mv = (m+v)^2 - (m+v)$. Одавде је број учесника турнира $m + v = (m+v)^2 - 4mv = m^2 + 2mv + v^2 - 4mv = m^2 - 2mv + v^2 = (m-v)^2$.

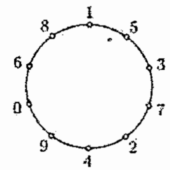
393. Нека је s дужина бочне ивице дате пирамиде (слика). Пресек је правоугаоник чије су странице $\dfrac{a}{2}$ и $\dfrac{s}{2}$. Обим пресека је дакле $a + s$, а површина $\dfrac{as}{4}$. Како је $s = \sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{3}}$, то је обим пресека $O = a + \sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{3}}$, а површина $P = \dfrac{a}{4}\sqrt{H^2 + \dfrac{a^2}{3}}$.



Сл. уз задатак 393



Сл. уз задатак 394



Сл. уз задатак 395

394. Нека су D и E подножја нормала из тачке C редом на OA и OB и нека је $OA = OB = OC = r$ (слика). Тада је $\angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$, па је због паралелности дужи AB и PQ и $\angle OPQ = \angle OQP = 45^\circ$. Зато је $PC^2 = 2CD^2$ и $CQ^2 = 2CE^2$. Тада је $PC^2 + QC^2 = 2CD^2 + 2CE^2 = 2(CD^2 + CE^2) = 2OC^2 = 2r^2 = AB^2$.

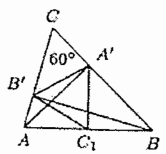
395. Нека је могуће направити распоред тако да збир свака три узастопна броја није већи од k. Нека су у том случају дате цифре распоређене на следећи начин: $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Тада је очигледно $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) \leqslant 3k$, а одавде је $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + (a_7 + a_8 + a_9) + a_{10} \leqslant 3k + a_{10}$. Како је лева страна претходне неједнакости једнака 45 то је $45 \leqslant 3k + a_{10}$. Добијени услов мора да важи за сваку цифру па и за $a_{10} = 0$, па је $k \geqslant 15$. Према томе, услов (а) није могућ, а услов (б) је могућ и један такав пример дат је на слици.

396. Очигледно је $a = 3b$, па је a број који је дељив са 3. Како је број a дељив са 3, то је и збир његових цифара дељив са 3. Дакле и збир цифара броја b (који је једнак са збиром цифара броја a) је дељив са 3. Дакле и број b је дељив са 3, па је $b = 3k$, што значи да је $a = 3 \cdot 3k = 9k$. Одавде следи да је збир цифара броја a дељив са 9, што значи и да је збир цифара броја b дељив са 9, односно и број b је дељив са 9. Како је $b = 9l$, то је $a = 3 \cdot 9l = 27l$, што је и требало доказати.

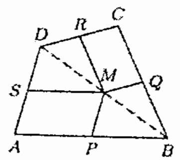
397. Од поноћи па до подне велика казаљка пређе 12 пуних кругова. У сваком кругу, сем у првом, ће се поклопити мала и велика казаљка, што значи да ће бити 11 поклапања.

Та поклапања ће се реализовати на сваких $\frac{12}{11}$ сати. Дакле у $1\frac{1}{11}\,h$, $2\frac{2}{11}\,h$, $3\frac{3}{11}\,h$, $4\frac{4}{11}\,h$, $5\frac{5}{11}\,h$, $6\frac{6}{11}\,h$, $7\frac{7}{11}\,h$, $8\frac{8}{11}\,h$, $9\frac{9}{11}\,h$, $10\frac{10}{11}\,h$ и $11\frac{11}{11}\,h = 12\,h$.

398. Троугао $AA'B$ је правоугли, па је C_1A' као хипотенузина тежишна дуж једнака $\frac{1}{2}AB$ (слика). Слично је и $C_1B' = \frac{1}{2}AB$.
Како су троуглови AC_1B' и BC_1A' једнакокраки, то је $\measuredangle AC_1B' = 180° - 2\alpha$, а $\measuredangle BC_1A' = 180° - 2\beta$. Тада је $\measuredangle A'C_1B' = 180° - (180° - 2\alpha + 180° - 2\beta) = 2\alpha + 2\beta - 180°$. Како је $\alpha + \beta = 120°$, то је $\measuredangle A'C_1B' = 240° - 180° = 60°$, па је $\triangle A'C_1B'$ једнакостранични.



Сл. уз задатак 398



Сл. уз задатак 399

399. Како је $APMS$ паралелограм, то је $SM \parallel AB$ и $PM \parallel AD$ (слика). Како су P и S средишта страница AB и AD, то су дужи SM и PM средње линије, па је тачка M средиште дијагонале BD. Тада су MQ и MR средње линије троугла BCD, па је $MQ \parallel CD$ и $MR \parallel BC$, што значи да је $CQMR$ такође паралелограм.

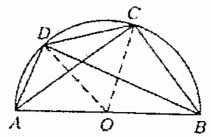
400. Свако се могао руковати највише 6 пута (са три брачна пара). Како је дато седам различитих одговора, следи да су одговори: 0,1,2,3,4,5,6. Пођимо од особе, рецимо Милеве, која је имала 6 руковања. Она се руковала са свима, осим са својим брачним другом. Одавде следи да су сви остали, осим Милевиног мужа, имали бар по једно руковање. Дакле, Милевин муж је имао 0 руковања. Остале су особе са 1,2,3,4 и 5 руковања. Особа, која је имала 5 руковања, руковала се са Милевом и са свима од преостале четири особе. Следи да се њен брачни друг руковао само са Милевом, тј. руковао се само једном. Слично се може закључити да су се трећи брачни пар руковали 4 пута и 2 пута, што значи да се Љубица руковала 3 пута.

401. Број $340 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 17$. Сва три чиниоца $a+b$, $b+c$ и $c+a$ су већи или једнаки 2, јер су a, b и c природни бројеви.
Сва три чиниоца нису истовремено парни, јер би тада њихов производ био дељив са 8, а број 340 то није.
Ако би два чиниоца, на пример $a+b$ и $b+c$, били парни, онда би и њихов збир $a+2b+c$ био паран, што значи да би и трећи чинилац $a+c$ био паран, а то је немогуће.
Дакле, једина могућност је да је један чинилац паран, а остали непарни, на пример $a+b = 4$, $b+c = 5$ и $c+a = 17$, што није могуће, јер је $a+b+b+c = a+2b+c = 9 < a+c = 17$.
Према томе, такви природни бројеви a, b и c не постоје.

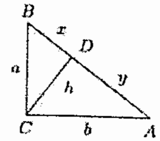
402. Нека је $m \geqslant n$, тада је $m^2 < m^2 + n \leqslant m^2 + m < (m+1)^2$. Дакле, број $m^2 + n$ је између квадрата два узастопна природна броја, па не може бити квадрат природног броја.
Ако је $n \geqslant m$, онда је $n^2 < n^2 + m \leqslant n^2 + n < (n+1)^2$, па број $n^2 + m$ није квадрат природног броја.

403. Како су углови $\measuredangle ADB$ и $\measuredangle ACB$ прави, то је четвороугао $ABCD$ тетивни, а центар круга описаног око четвороугла је тачка O која је средиште странице AB (слика). Како је

$CD = \frac{1}{2}AB$, то је CD једнако полупречнику круга $k(O, AO = OB = CD)$, па је $\triangle OCD$ једнакостраничан. Како је периферијски угао CAD над тетивом CD једнак половини централног угла, то је $\measuredangle CAD = \frac{1}{2}\measuredangle COD = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.
Тада је оштар угао између дијагонала једнак 60°, а туп угао 120°.



Сл. уз задатак 403



Сл. уз задатак 404

404. Нека тачка D дели хипотенузу AB на дужи $BD = x$ и $AD = y$ (слика). Познато је да је у сваком правоуглом троуглу $r = \frac{a+b-c}{2}$. Ако ову чињеницу применимо на $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ добија се $r + r_1 + r_2 = \frac{a+b-c}{2} + \frac{h+y-b}{2} + \frac{h+x-a}{2} = \frac{a+b-x-y+h+y-b+h+x-a}{2} = h = CD$.

405. Грађанин који се јавио, није из града A јер би тада порука гласила: „Код нас је пожар“, а одговор „У граду A“.
Ако је грађанин који се јавио из града C његови одговори би били: „Код нас је пожар“ и „У граду A или граду B“.
Према томе јавио се грађанин града B. Како пожар није у B јер му први исказ није тачан и како пожар није у C јер му и други исказ није тачан, ватрогасац ће екипу послати у град A.

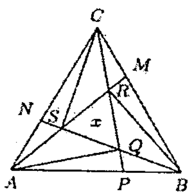
406. Нека су дати бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$ и нека је њихов збир S. Ако је $b_1 = a_2 + a_3 + \cdots + a_{2001}$, $b_2 = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2001}$, $\ldots$, $b_{2001} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2000}$, тада је $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2001} = 2000(a_1 + a_2 + \cdots + a_{2001}) = 2000\,S$. Како су скупови $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2001}\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_{2001}\}$ једнаки, то је и $b_1 + b_2 + \cdots + b_{2001} = S$. Дакле, $S = 2000\,S$, одакле је јасно да је $S = 0$. Како је $b_1 = S - a_1 = -a_1$, $b_2 = S - a_2 = -a_2$, $\ldots$, $b_{2001} = S - a_{2001} = -a_{2001}$ очигледно је да сваки члан низа има свој супротни члан (исти по апсолутној вредности, а различит по знаку). С обзиром да је број чланова низа 2001 дакле непаран један члан низа је сам себи супротан, дакле једнак 0. Тада је $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{2001} = 0$.

407. Будући да су a, b, c различити бројеви, можемо узети да је $a < b < c$. Користећи услове задатка, следи да је $ab + bc + ca = abc - (1 + 2 + \cdots + n - a - b - c)$, тј. $abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 = 2 + \cdots n$, одакле је: $(a-1)(b-1)(c-1) = 2 + \cdots + n$.

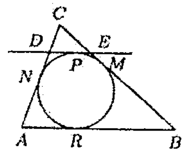
(а) За $n = 12$ је $2 + 3 + \cdots + 12 = 77$. Тада је: $(a-1)(b-1)(c-1) = 7 \cdot 11$, па је $a - 1 = 1$, $b - 1 = 7$ и $c - 1 = 11$, тј. $a = 2$, $b = 8$, $c = 12$.

(б) За $n = 17$ је $2 + 3 + \cdots + 17 = 152 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$, па је: $(a-1)(b-1)(c-1) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 19$. Одавде следи да је $c - 1 \geqslant 19$, тј. $c \geqslant 20$, што није могуће, јер мора бити $c \leqslant 17$. Дакле, случај $n = 17$ нема решења.

408. Нека је $P_{\triangle PBQ} = P_1$ (слика). Тада је $P_{\triangle APQ} = 2\,P_1$. Нека је $P_{\triangle AQS} = P_2$ и $P_{\triangle QRS} = x$. Тада је $P_{\triangle CMR} = P_{\triangle ANS} = P_1$ и $P_{\triangle BMR} = P_{\triangle CNS} = 2\,P_1$, а $P_{\triangle BQR} = P_{\triangle CRS} = P_2$.



Сл. уз задатак 408



Сл. уз задатак 409

Како је $P_{\triangle APR} = 2P_{\triangle BPR}$, то је $2P_1 + P_2 + x = 2(P_1 + P_2)$, па је $x = P_2$. Слично је $P_{\triangle APC} = 2P_{\triangle BPC}$, тј. $5P_1 + 2P_2 + x = 2(4P_1 + P_2)$, што значи да је $x = 3P_1$.
Како је $7\,\mathrm{cm}^2 = 9P_1 + 3P_2 + x = 3x + 3x + x$, то је $x = 1\,\mathrm{cm}^2 = P_{\triangle QRS}$.

409. Како је $DP = DN$ и $EP = EM$ (тангентне дужи), то је $\mathcal{O}_{\triangle CDE} = CD + DP + PE + CE = CD + DN + EM + CE = CN + CM$ (слика). Тада је $\mathcal{O}_{\triangle ABC} = CN + AN + AB + BM + CM = \mathcal{O}_{\triangle CDE} + AN + AB + BM = \mathcal{O}_{\triangle CDE} + AR + AB + BR = 2AB + \mathcal{O}_{\triangle CDE}$.
Ако означимо $AB = c$, онда је $\mathcal{O}_{\triangle CDE} = 2s - 2c$. Троуглови ABC и CDE су слични па је $\dfrac{x}{c} = \dfrac{\mathcal{O}_{\triangle CDE}}{\mathcal{O}_{ABC}}$, односно, $\dfrac{x}{c} = \dfrac{2s-2c}{2s}$, одакле је $x = \dfrac{1}{s}(cs - c^2) = \dfrac{1}{s}\left[\dfrac{s^2}{4} - \left(c - \dfrac{s}{2}\right)^2\right]$.
Максимална вредност x је $\dfrac{s}{4}$, за $c = \dfrac{s}{2}$.

410. Нека је a број који не учествује у нумерацији и s збир бројева којима су нумерисана темена једне стране коцке. Свако теме је заједничко за три стране па је $6s = 3(1 + 2 + \cdots + 9) - 3a$, одакле је $2s = 45 - a$. Одавде следи да је број a непаран, па како број s није дељив са a, то и број 45 није дељив са a. Дакле, $a = 7$.

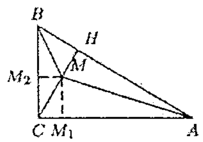
411. Претпоставимо, за почетак, да је $a \leqslant b \leqslant c$. Уочимо, затим, да је $x^3 \equiv 1 \pmod 9$ или $x^3 \equiv -1 \pmod 9$ или $x^3 \equiv 0 \pmod 9$, за свако $x \in \{0, 1, 2, \ldots, 8\}$. Такође је $2001 \equiv 3 \pmod 9$. Користећи услов задатка, следи да је $a^3 + b^3 + c^3 \equiv 3 \pmod 9$, па мора бити $a^3 \equiv 1 \pmod 9$, $b^3 \equiv 1 \pmod 9$ и $c^3 \equiv 1 \pmod 9$. С обзиром да је $13^3 > 2001$, то је $a \leqslant b \leqslant c \leqslant 12$, па бројеви a, b и c припадају скупу $\{1, 4, 7, 10\}$. После краће дискусије, добија се да је једина могућност $a = 1$, $b = 10$, $c = 10$.
Одавде следи да су решења дате једначине: $a = 1$, $b = 10$, $c = 10$; $a = 10$, $b = 1$, $c = 10$ и $a = 10$, $b = 10$, $c = 1$.

412. (а) Претпоставимо да постоји тачка $M \in CL$ таква да је $\angle MAC = \angle MBC$. Како је $\angle ACL = \angle LCB$, то је $\angle AMC = \angle BMC$, па је $\triangle AMC$ сличан $\triangle BMC$. Како ови троуглови имају и заједничку страницу MC, то је $\triangle AMC \cong \triangle BMC$, па је $AC = BC$, што је супротно претпоставци задатка $AC \neq BC$, па је тврђење под (а) тачно.

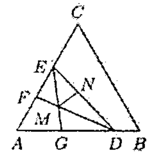
(б) Претпоставимо да постоји тачка $M \in CH$ таква да је $\angle MAC = \angle MBC$ (слика). Нека су M_1 и M_2 редом подножја нормала из M на AC и BC. Како су троуглови AMM_1 и MBM_2 правоугли и $\angle M_1AM = \angle MBM_2$, то важи $\triangle AMM_1 \sim \triangle MBM_2$, па је $\dfrac{MM_1}{MM_2} = \dfrac{AM}{BM}$ (1). Такође, како су троуглови CMM_2 и ABC правоугли и $\angle MCM_2 = \angle CAB$ (као углови са нормалним крацима), то важи $\triangle CMM_2 \sim \triangle ABC$, па је $\dfrac{MM_2}{M_2C} = \dfrac{BC}{AC}$ (2).

Како је $M_2C = MM_1$, то користећи једнакости (1) и (2) следи $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AC}{BC}$, односно $\dfrac{AM}{AC} = \dfrac{BM}{BC}$. Како је и $\angle CAM = \angle MBC$, то је $\triangle AMC \sim \triangle BMC$.

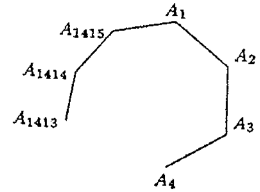
Одавде следи $\angle BCM = \angle ACM$, па је $AC = BC$, а то је супротно претпоставци $AC \neq BC$. Значи, $\angle MAC \neq \angle MBC$.



Сл. уз задатак 412



Сл. уз задатак 413



Сл. уз задатак 414

413. Нека се DF и EG секу у тачки M (слика). Користећи услове задатка следи да је $\angle DME = \angle GMF = 120°$, па је четвороугао $AGMF$ тетиван. Одавде следи да је $\angle GFM = \angle GAM$ и $\angle FGM = \angle FAM$, као периферијски углови над истом тетивом. Како су DF и EG симетрале углова, то је и AM симетрала угла, тј. $\angle FAM = \angle GAM$, па је $\angle GFM = \angle FGM$ и $\triangle FGM$ је једнакокрак, па је $FM = MG$.
Даље, нека је тачка $N \in ED$ таква да је $\angle NME = 60°$. Тада је и $\angle DMN = 60°$. Како је и $\angle GMF = 120°$, то је $\angle FME = \angle DMG = 60°$. Како троуглови FME и MNE имају заједничку страницу EM и једнака два налегла угла, то су они и подударни. Слично је и $\triangle DMG \cong \triangle DNM$. Одавде следи да је $P_{\triangle MDE} = P_{\triangle NME} + P_{\triangle DNM} = P_{\triangle FME} + P_{\triangle DGM}$, $P_{\triangle DEF} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MEF}$ и $P_{\triangle DEG} = P_{\triangle MDE} + P_{\triangle MGD}$. Сабирањем ових једнакости добијамо $P_{\triangle DEF} + P_{\triangle DEG} = 3P_{\triangle MDE}$.
На крају, како један од углова $\angle DEA$ и $\angle EDA$ троугла ADE мора бити не мањи од $60°$, нека је то $\angle DEA$. Тада је и $AD \geqslant DE$ (наспрам већег угла троугла ADE налази се већа страница). Како је $AD \leqslant AB$, то је и $DE \leqslant AB$ (1). Даље, како је тачка M центар круга уписаног у троугао ADE полупречника r', то је $P_{\triangle MDE} = \dfrac{1}{2}DE \cdot r'$.
Нека је r полупречник круга уписаног у троугао ABC. Тада је $r' \leqslant r$ (2). Користећи релације (1) и (2), следи $3P_{\triangle MDE} = \dfrac{3}{2}DE \cdot r' \leqslant \dfrac{3}{2}AB \cdot r = s \cdot r = P_{\triangle ABC}$, при чему је s полуобим датог једнакостраничног троугла ABC.
Користећи релације (1) и (2), јасно је да једнакост важи уколико је $DE = AB = BC$ и $r = r'$, тј. у случају $D \equiv B$ и $E \equiv C$.

414. Можемо посматрати троуглове на следећи начин: $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $\ldots$, $A_{1414}A_{1415}A_1$, $A_{1415}A_1A_2$ (слика). Претпоставимо да је површина сваког од ових троуглова не мања од 1. За било који троугао са страницама a и b важи $2P = a \cdot h_a \leqslant a \cdot b$ ($h_a \leqslant b$). Примењујући ову особину на сваки уочени троугао имамо: $A_1A_2 \cdot A_2A_3 \geqslant 2$ (зато што је $P \geqslant 1$), $A_2A_3 \cdot A_3A_4 \geqslant 2$, $\ldots$, $A_{1415}A_1 \cdot A_1A_2 \geqslant 2$. Ако применимо неједнакост $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ добијамо $A_1A_2 + A_2A_3 \geqslant 2\sqrt{A_1A_2 \cdot A_2A_3} \geqslant 2\sqrt{2}$, $A_2A_3 + A_3A_4 \geqslant 2\sqrt{2}$, $\ldots$, $A_{1415}A_1 + A_1A_2 \geqslant 2\sqrt{2}$. Сабирајући претходне неједнакости добијамо: $2(A_1A_2 + A_2A_3 + \cdots + A_{1415}A_1) \geqslant 1415 \cdot 2\sqrt{2}$, одакле је $\mathcal{O} \geqslant 1415 \cdot \sqrt{2} = 1415 \cdot 1{,}4142\ldots$, па је $\mathcal{O} \geqslant 2001{,}93$, тј. $\mathcal{O} > 2001$, што је супротно претпоставци у задатку.

2002. година

415. Из прве кутије Бранко је у албум ставио $256 : 4 = 64$ маркице, а из друге $252 : 3 = 84$ маркице. Укупно је у албум ставио $84 + 64 = 148$ маркица. У првој кутији му је остало $256 - 64 = 192$ маркице, а у другој $252 - 84 = 168$ маркица.

416. Број 658 је мањи од 1024 за $1024 - 658 = 366$. Дакле, тражени број је $25432 - 366 = 25066$.

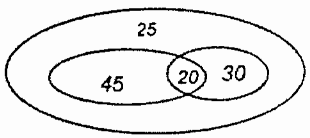
417. Обим једног правоугаоника је $540 : 3 = 180\,\mathrm{cm}$. (а) Половина обима једног правоугаоника је $180 : 2 = 90\,\mathrm{cm}$. (б) Дужина је $90 - 40 = 50\,\mathrm{cm}$.

418. За једноцифрене природне бројеве (има их 9) потребно је 9 цифара, за двоцифрене (има их 90) потребно је 180 цифара, а за троцифрене (има их 900) потребно је 2700 цифара. За исписана 1003 четвороцифрена броја потребно је 4012 цифара. Укупно је записала $9 + 180 + 2700 + 4012 = 6901$ цифру.

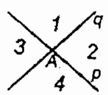
419. Новац треба поделити на седам једнаких делова, од којих Петар добија шест, а Павле један део. $2002 : 7 = 286$, па Петар добија $286 \cdot 6 = 1716$, а Павле 286 динара.

420. Цифра јединица мора бити 5, а збир цифара дељив са 3, па су решења 525, 555, 585.

421. Тачно један задатак решило је $45 + 30 = 75$ ученика (слика).



Сл. уз задатак 421



Сл. уз задатак 423

422. Пут је дугачак $1\,000\,000\,000\,\mathrm{mm} = 1000\,\mathrm{km}$, па би га возило прешло за $1000 : 50 = 20\,\mathrm{h}$.

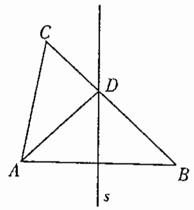
423. Одређено је 4 полуравни (слика). То су полуравни одређене „деловима“ 1,2; 2,4; 3,4 и 1,3.

424. Како је $3\alpha - \beta + 63°45'36'' = 3\alpha + 2\beta$, то је $3\beta = 63°45'36''$, одакле је $\beta = 21°15'12''$. Како је даље $3\alpha - \beta = 74°37'16'' + \alpha - \beta$, то је $2\alpha = 74°37'16''$, одакле је $\alpha = 37°18'38''$.

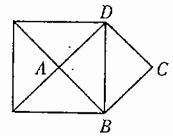
425. Висина тополе треба да буде $12{,}75 + 3{,}9 = 16{,}65\,\mathrm{m}$, што значи да топола треба да порасте за $16{,}65 - 8{,}7 = 7{,}95\,\mathrm{m}$.

426. $|8 \cdot (-4) - (-(-(-4)))| = |-32 + 4| = |-28| = 28$.

427. Како је $\angle CAB > \angle ABC$, то ће тачка D бити између B и C (слика). Пошто је s симетрала странице AB, то је $AD = BD$, тј. троугао ABD је једнакокрак, па је $\angle DAB = \angle ABD = 43°33'20''$, $\angle CAD = 73°28'40'' - 43°33'20'' = 29°55'20''$.



Сл. уз задатак 427



Сл. уз задатак 432

428. Најпре треба конструисати праву t' симетричну правој t у односу на праву s. Тада је $R = r \cap t'$. Тачку T добијамо симетрично тачки R у односу на s.

429. Приметимо најпре да n не може бити два, јер је збир два узастопна цела броја непаран, а 2002 је паран број. Такође не може бити ни три, јер је збир три узастопна цела броја дељив са три, а 2002 то није. Проверимо да ли n може бити 4. Нека су $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ четири узастопна цела броја таква да им је збир једнак 2002. Тада је $4x + 2 = 2002$, тј. $x = 500$. Дакле, тражено најмање n је четири.

430. $\dfrac{1}{x} = \sqrt{0{,}04} = 0{,}2 = \dfrac{1}{5}$, одакле је $x = 5$, па је

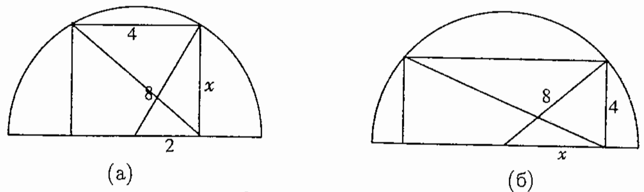
$$\sqrt{\left(\frac{1}{x} - x\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{5} - 5\right)^2} = \left|\frac{1}{5} - 5\right| = 5 - \frac{1}{5} = 4\frac{1}{5}.$$

431. $\dfrac{2^{3x} \cdot 3^{2x}}{6^x} : 12^x = \dfrac{2^{3x} \cdot 3^{2x}}{2^x \cdot 3^x} \cdot \dfrac{1}{12^x} = \dfrac{2^{3x} \cdot 3^{2x}}{2^x \cdot 3^x \cdot 2^{2x} \cdot 3^x} = 1.$

432. Конструише се квадрат K_1 странице $3\,\mathrm{cm}$. Страница квадрата K је $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}$, а то је половина дијагонале квадрата K_1. Према томе, тражени квадрат K је $ABCD$ (слика).

433. Како је $a^2 = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = 4$, то је $a = 2\,\mathrm{cm}$, а како је $c^2 = a^2 + b^2 = 13$, то је $c = \sqrt{13}\,\mathrm{cm}$. Површина је $P = \dfrac{1}{2}ab = 3\,\mathrm{cm}^2$, а обим $O = a + b + c = (5 + \sqrt{13})\,\mathrm{cm}$.

434. (а) $x^2 = 8^2 - 2^2 = 60$, па је $x = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}\,\mathrm{cm}$ (слика (а)). Обим је $O = 2(4 + 2\sqrt{15}) = (8 + 4\sqrt{15})\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 434

(б) $x^2 = 8^2 - 4^2 = 48$, па је $x = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ (слика (б)). Обим је $O = 2(4 + 8\sqrt{3}) = (8 + 16\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

435. Разлика ће имати најмању вредност када умањилац има највећу могућу вредност. Како је у овом случају умањилац разломак са константним бројиоцем, он ће имати највећу вредност када му именилац има најмању могућу вредност, а то ће бити када је $0{,}3 + x = 0$, тј. када је $x = -0{,}3$.

436. Како је периферијски угао над основицом AB $30°$, то је централни угао $60°$, па је дужина кружног лука који одговара основици шестина обима описаног круга, чији је полупречник једнак дужини основице. Како су краци једнаки, то су и лукови који одговарају крацима једнаки, па је дужина лука који одговара краку једнака $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{12}$ обима описаног круга. Тај обим је $2\cdot 4\cdot\pi = 8\pi\,\mathrm{cm}$, па је тражена дужина лука једнака $\frac{5}{12}\cdot 8\pi = \frac{10}{3}\pi\,\mathrm{cm}$.

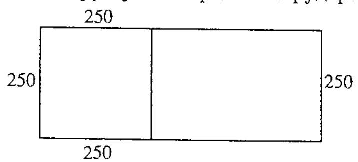
437. Нека је a дужина, b ширина и c висина квадра. Димензије новог квадра биће $1{,}25a$, $\frac{4}{3}b$ и $0{,}9c$, па ће његова запремина бити $V_1=\frac{5}{4}a\cdot\frac{4}{3}b\cdot\frac{9}{10}c=\frac{3}{2}abc$. Значи, запремина ће се повећати $\frac{3}{2}$ пута.

438. Нека је O центар кружнице. Површина четвороугла $ABCD$ једнака је збиру површина правоуглих троуглова ABO, AOD и BCD. Прва два су једнакокрако-правоугли са крацима једнаким $4\,\mathrm{cm}$, па је површина сваког од њих $\frac{4\cdot 4}{2}=8\,\mathrm{cm}^2$. У троуглу BCD хипотенуза је $8\,\mathrm{cm}$, а један крак $4\,\mathrm{cm}$, па је други крак $\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, а његова површина је једнака $\frac{4\cdot 4\sqrt{3}}{2}=8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Површина четвороугла $ABCD$ једнака је $2\cdot 8+8\sqrt{3}=(16+8\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

439. Из $x^2-y^2=2002$ следи $(x-y)(x+y)=2002$. Како су $x+y$ и $x-y$ исте парности, то је њихов производ или непаран или дељив са 4. Оба случаја су немогућа. Према томе, разлика квадрата два природна броја не може бити 2002.

440. Други аутомобил се креће $88\,\mathrm{km/h}$. После сусрета они се удаљавају један од другог, а за три часа ће бити удаљени $3\cdot 76+3\cdot 88=492\,\mathrm{km}$.

441. У другој смени ради 168 рудара, а у трећој $(126+168):2=147$ рудара.



Сл. уз задатак 442

442. Ако је обим квадрата $1000\,\mathrm{cm}$, његова страница је $1000:4=250\,\mathrm{cm}$. Са слике се види да је обим мањег правоугаоника мањи од обима већег за полуобим квадрата, тј. обим мањег правоугаоника је $2002-500=1502\,\mathrm{cm}$.

443. Број 2002 можемо записати на следећи начин:

$$1\cdot 9+2\cdot 90+3\cdot 604=2002,$$

па значи да нам је за записивање свих једноцифрених, свих двоцифрених и прва 604 троцифрена броја потребна 2001 цифра, а онда је 2002. цифра 7.

444. Ако са M обележимо мањи број, тада је већи број $8M+15$. Према томе, $825=M+(8\cdot M+15)$, па је онда мањи број $M=90$, а већи 735.

445. Како је $A\cap B\cap C=\{1,2\}$, то је, пре свега, $1\in C$ и $2\in C$. С друге стране, како из $B\setminus C=\{4,5\}$ следи $4\notin C$ и $5\notin C$, то из $C\setminus A\neq\varnothing$ следи да $3\in C$. према томе $C=\{1,2,3\}$

446. Како је $n\cdot p=2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ и p је прост број, то су могућа следећа четири решења: $p_1=2$, $n_1=1001$; $p_2=7$, $n_2=286$; $p_3=11$, $n_3=182$ и $p_4=13$, $n_4=154$.

447. Како је збир запремина датог квадра и коцке (ивице $10\,\mathrm{cm}$) $1910\,\mathrm{cm}^3$, то је укупна запремина остале три коцке $92\,\mathrm{cm}^3$. Једна од тих коцки мора имати ивицу $4\,\mathrm{cm}$ (јер је $3\cdot 3^3=81<92$), а онда остале две коцке имају укупну запремину $92-64=28\,\mathrm{cm}^3$. На исти начин закључујемо да су ивице те две коцке $3\,\mathrm{cm}$ и $1\,\mathrm{cm}$.

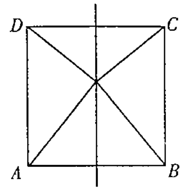
448. Уочених шест тачака одређују укупно $(6\cdot 5):2=15$ правих, а како три од њих пролазе кроз темена троугла, тражени број правих је 12.

449. Како је $180=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ и како су два од бројева n, $n+1$, $2n+1$ непарна, то је јасно да је једнина могућност $n=4$.

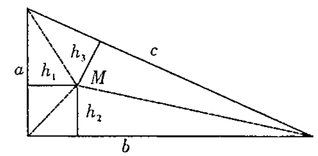
450. $\frac{20}{-5x+10}>1$ ако и само ако $0<-5x+10<20$. Одавде је $-2<x<2$, тј. $x\in\{-1,0,1\}$.

451. (а) Ако је један од спољашњих углова $121°$, могућа су два случаја:
(i) да је унутрашњи угао од $59°$ угао при врху, па су тада углови на основици по $60°30'$;
(ii) да је унутрашњи угао од $59°$ угао на основици, па је тада угао при врху $62°$.
(б) Ако је један од спољашњих углова $65°$, то мора бити спољашњи угао угла при врху (троугао не може имати два оштра спољашња угла), па је тада одговарајући унутрашњи угао $115°$, а углови на основици од по $32°30'$.

452. Ако су дужи CM и DM подударне, то значи да је $\triangle MCD$ једнакокрак, па је $\angle MDC=\angle MCD$. Сада је $\angle MDA=90°-\angle MDC=90°-\angle MCD=\angle MCB$, $AD=BC$ и $DM=MC$, па су троуглови AMD и MBC подударни. Одавде закључујемо да је $\angle DAM=\angle MBC$.



Сл. уз задатак 452



Сл. уз задатак 458

453. Да би у трећем одскоку лоптица достигла $32\,\mathrm{cm}$, она мора да пада са висине x која задовољава услов $\frac{2}{5}x=32\,\mathrm{cm}$. Одавде је $x=80\,\mathrm{cm}$. Слично, за други одскок од $80\,\mathrm{cm}$ потребно је да падне са $200\,\mathrm{cm}$, а за први одскок од $200\,\mathrm{cm}$ лоптица је морала да падне са висине од $500\,\mathrm{cm}$. Пут који је лоптица прешла док није четврти пут додирнула земљу је $s=500+2\cdot 200+2\cdot 80+2\cdot 32=1124\,\mathrm{cm}$.

454. Како је $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, то за једноцифрени број морамо узети 1, а онда су сва могућа решења:

$$2002=1\cdot 14\cdot 143=1\cdot 11\cdot 182=1\cdot 13\cdot 154.$$

455. Како је $13:101=0{,}1287\,1287\ldots$, а број 2002 је паран и није дељив са четири, цифра на 2002. децималном месту је 2.

456. $\left(\sqrt{625}+3\cdot\sqrt{(12)^2}\right):\left(\frac{2}{5}\cdot\sqrt{0{,}25}+0{,}58\cdot\sqrt{100}\right)=(25+36):\left(\frac{2}{5}\cdot 0{,}5+5{,}8\right)=61\cdot\frac{1}{6}=\frac{61}{6}$.

457. Ако је један угао правоуглог троугла $60°$, а хипотенуза c, тада су његове катете $\frac{c}{2}$ и $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Сада је површина тог троугла с једне стране $\frac{1}{2}\cdot c\cdot 2\sqrt{3}$, а с друге стране $\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Одавде закључујемо да је $c=8\,\mathrm{cm}$. Сада се лако израчунава $P=8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ и $O=(12+4\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

458. Површина овог троугла је $P = 6\,\mathrm{cm}^2$. Ако са h_1, h_2, h_3 (слика) означимо растојања неке тачке M од страница тог троугла и ако је $h_1 < 1$, $h_2 < 1$ и $h_3 < 1$, тада је $P = \frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}bh_2 + \frac{1}{2}ch_3 < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = 6$, што је немогуће, па закључујемо да у унутрашњости троугла не постоји тачка M за траженим особинама.

459. Не постоје. Како су p, q и r прости и међусобно различити, то су они или сва три непарна или је један од њих једнак 2, а остала два непарна. У оба случаја је $pq + qr + rp$ непаран број.

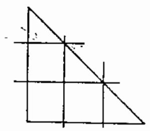
460. Дата неједначина се своди на два система неједначина:

(i) $3a - 2 < 0$ и $a + 1 > 0$, односно $a \in \left(-1, \frac{2}{3}\right)$;

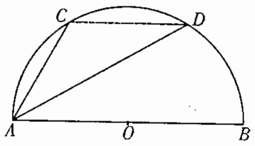
(ii) $3a - 2 > 0$ и $a + 1 < 0$, односно $a > \frac{2}{3}$ и $a < -1$ када нема решења,

па је коначно решење $-1 < a < \frac{2}{3}$, тј. то су сви рационални бројеви између -1 и $\frac{2}{3}$.

461. Сваку од катета поделимо на три једнака дела па кроз подеоне тачке на једној катети повучемо праве паралелне са другом катетом (слика). На тај начин добијамо тражену поделу.



Сл. уз задатак 461



Сл. уз задатак 463

462. Нека је ивица коцке 1. Тада је површина коцке 6, а површина добијених делова је $2002 \cdot 6$. С друге стране, ако је n број пресека, онда је површина добијених делова једнака $6 + 2n$. Решавањем једначине $6 \cdot 2002 = 2n + 6$ добијамо $n = 6003$.

463. Очигледно је да је $ABCD$ једнакокраки трапез са угловима на већој основици од $60°$ (слика). Како су површине троуглова ACD и OCD једнаке (једнаке основице и висине), то је тражена површина једнака површини фигуре ограничене дужима OC, OD и луком CD, а то је шести део површине круга, тј. $P = \frac{8}{3}\pi\,\mathrm{cm}^2$.

464. Треба исећи пет штапова на делове 4,4,5; четири штапа на делове 5,5,3 и три штапа на делове 3,3,3,4. Тако добијамо по 13 делова дужина 3,4 и 5.

465. Ако са x означимо дужину баште у метрима, а са y њену ширину, тада ће површина баште бити $P = xy\,\mathrm{m}^2$. Како је онда дужина винограда $5x$, а ширина $6y$, то ће његова површина бити $P_1 = 30xy\,\mathrm{m}^2$, тј. $P_1 = 30 \cdot P = 67\,200\,\mathrm{m}^2$. Значи, површина баште је $P = 2240\,\mathrm{m}^2$.

466. У првом кругу у једној групи одиграно је $(4 \cdot 3) : 2 = 6$ утакмица. На турниру је укупно одиграно $2 \cdot 6 + 1 = 13$ утакмица.

467. Једноцифреним бројевима нумерисане су 4 парне странице (4 листа), двоцифреним 45 парних страница (45 листова) и троцифреним још 380 парних страница (380 листова) и за то смо искористили $4 \cdot 1 + 45 \cdot 2 + 380 \cdot 3 = 1234$ цифре. Значи, та књига има $4 + 45 + 380 = 429$ листова.

468. Највећи леп број је 5544, а најмањи 4455, па је највећа разлика $5544 - 4455 = 1089$. Најмања разлика се добија када су цифре хиљада и стотина једнаке и она износи $9 = 5454 - 5445 = 4554 - 4545$.

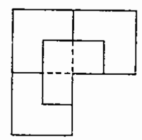
469. A мора бити 1, B мора бити 8, а тада је $C = 0$ и $D = 3$.

470. $x - \left(3\frac{1}{5} + \frac{7}{8}\right) > \left(3\frac{1}{5} - \frac{7}{8}\right)$, односно $x - \frac{163}{40} > \frac{93}{40}$. Према томе, $x > \frac{32}{5}$, тј. $x > 6\frac{2}{5}$.

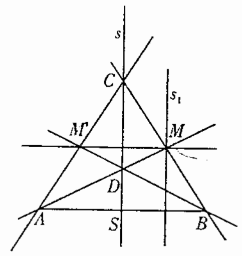
471. Ако са a обележимо тај природни број, а са q његов остатак при дељењу са 7, тада је $a = 7q + q$, $0 \leqslant q \leqslant 6$. Тада је тражени збир једнак $8\cdot1+8\cdot2+8\cdot3+8\cdot4+8\cdot5+8\cdot6 = 168$.

472. Фигуру делимо као на слици. Површина једног дела је $P = 3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, а обим је $O = 4 \cdot 4 = 16$.

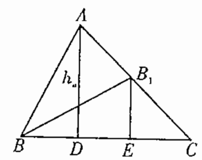
473. Ако дечака има $3x$, тада девојчица има $2x$. После доласка 6 дечака стање је: $3x + 6 = 2 \cdot 2x$. Одавде је $x = 6$, па пре доласка 6 дечака у одељењу је било 18 дечака и 12 девојчица.



Сл. уз задатак 472



Сл. уз задатак 474



Сл. уз задатак 478

474. Идеја је да се конструише тачка M' симетрична тачки M у односу на s, јер ће тада права MM' бити тражена нормала. Нека је C пресек праве BM и симетрале s. Тада ће права CA бити симетрична са CB и садржаће тачку M'. Нека је D пресек праве AM и симетрале s. Права BD ће бити симетрична са AD, па ће садржати тачку M' симетричну тачки M. Дакле, M' је у пресеку правих AC и BD, а права MM' је нормална на s.

475. Ако је C_1 средиште хипотенузе, а D подножје висине из C на хипотенузу AB, тада је $\measuredangle C_1CD = 24°$. Како је C_1 центар описане кружнице око троугла ABC, то је $\triangle CAC_1$ једнакокрак, па је $\alpha = \measuredangle CAC_1 = \measuredangle C_1CA = \frac{1}{2}\measuredangle CC_1B$. Сада у правоуглом троуглу CC_1D важи $2\alpha + 24° = 90°$, одакле добијамо $\alpha = 33°$, па је тражени угао једнак $45° - 33° = 12°$.

476. Тражени збир ће бити највећи ако за један од сабирака, рецимо a, важи $|a| = 2002$. Онда су два друга сабирка $|b| = |c| = 1$, па је највећи могући збир 2004, а добија се на пример за $a = -2002$, $b = 1$, $c = -1$.

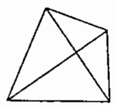
477. Како је $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$, имениоци тражена три разломка морају да буду 4, 5, 7 (у осталим случајевима нема решења). Сада је $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} = \frac{179}{140}$, односно $35x + 28y + 20z = 179$. Одавде видимо да x мора бити непаран, па се $35x$ завршава цифром 5, а онда $28y$ мора да се завршава цифром 4, па је $y = 3$. Сада се горња једначина своди на $35x + 20z = 95$, а одавде је лако видети да је $x = 1$ и $z = 3$.

478. Нека је у троуглу ABC подножје висине h_a тачка D, B_1 средиште странице AC и E подножје нормале из B_1 на BC (слика). Тада је $B_1E = 2\,\mathrm{cm}$ као средња линија троугла ADC. Троугао BEB_1 је лако конструисати, затим се продужи BE, преко E, тако да буде $BC = 6\,\text{cm}$, па се повуче права CB_1 и на њој са друге стране од B_1 у односу на C нађе тачка A тако да је $AB_1 = B_1C$. $\triangle ABC$ је тражени троугао.

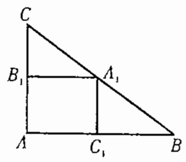
479. Како је $66 = 11 \cdot 3 \cdot 2$, а број 2002 је дељив са 11 и са 2, то је довољно три пута исписати број 2002 један за другим да би се добио број дељив са 66.

480. $(x+7)(x+12) - x(x+5) = 364$, а одавде је $x = 20$.

481. Ако посматрамо две дванаестине тог дванаестоугла, није тешко приметити да је то један делтоид са дијагоналама од $1\,\text{cm}$ (слика). Његова површина је $P_1 = \frac{1}{2}\,\text{cm}^2$, а површина дванаестоугла је $P = 3\,\text{cm}^2$.



Сл. уз задатак 481



Сл. уз задатак 482

482. Како је $6^2 + 8^2 = 10^2$, то је дати троугао правоугли. Ако поделимо дати троугао дужима A_1B_1 и A_1C_1 на три дела (на слици су A_1, B_1 и C_1 редом средишта страница BC, CA и AB), онда ће бар две од четири тачке да буду у једном од та три дела. Растојање између те две тачке које се налазе у једном делу је мање од $5\,\text{cm}$.

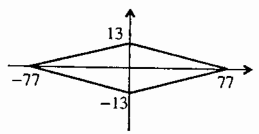
483. Како је $1 : 14 = 0{,}0(714285)$, на 2003. месту се налази цифра 2, а на 2102. месту се налази цифра 7, па ће после брисања 99 децимала тај нови број бити већи од почетног, тј. од $1/14$.

484. Дата једнакост се трансформише у $(a^{1001}-1)^2 + (b^4-1)^2 + (c^3+1)^2 = 0$, одакле се добијају решења $(a,b,c) = (1,1,-1)$ и $(a,b,c) = (1,-1,-1)$.

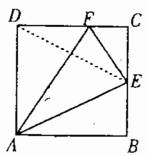
485. Шестоугао $EFGHIJ$ чије су странице EF, FG, GH, HI, IJ и JE све једнаке $\frac{d}{2}$, где је $d = a\sqrt{2}$ дијагонала стране коцке, правилан је јер су му све велике дијагонале FI, EH и GJ међусобно једнаке и једнаке d. Површина омотача је $6 \cdot \frac{3a^2}{8}$, а површина основе је $6 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}$, па је тражена површина пирамиде $\frac{3a^2}{4}(3+\sqrt{3})$.

486. Четвороцифрених бројева са различитим цифрама чија је прва цифра 3 а последња 1 има укупно $8 \cdot 7 = 56$. Како за избор прве и последње цуфре имамо 15 могућности: $(2,0)$, $(3,1)$, $(1,3)$, $(4,2)$, $(2,4)$, $(5,3)$, $(3,5)$, $(6,4)$, $(4,6)$, $(7,5)$, $(5,7)$, $(8,6)$, $(6,8)$, $(9,7)$, $(7,9)$, то ће тражених четвороцифрених бројева бити 840.

487. Дата једначина одређује дужи које чине ромб површине $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{154 \cdot 26}{2} = 2002$ (слика).



Сл. уз задатак 487



Сл. уз задатак 489

488. Ако ставимо да је $2002 = n$, тада је

$$\begin{aligned}
&1999 \cdot 2000 \cdot 2001 \cdot 2003 \cdot 2004 \cdot 2005 + 36 \\
&\quad = (n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36 \\
&\quad = (n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) + 36 = n^2(n^4 - 14n^2 + 49) \\
&\quad = [n(n^2-7)]^2.
\end{aligned}$$

489. Тачке D и E су на кругу пречника AF са центром у средишту те дужи (слика). Углови FDE и FAE су једнаки као периферијски углови над истим луком EF. С друге стране $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ (СУС), па су углови CDE и EAB једнаки. Према томе, $\angle EAB = \angle CDE = \angle FAE$.

490. Нека су a и b тражени бројеви такви да је $10 \leqslant a < 100$ и $100 \leqslant b < 1000$. Тада је $1000 \leqslant ab < 100000$. Према томе $ab = 2222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$ или $ab = 22222 = 2 \cdot 41 \cdot 271$, па су могућа четири решења: $a = 11$, $b = 202$; $a = 22$, $b = 101$; $a = 41$, $b = 542$ и $a = 82$, $b = 271$.

491. Троугао MNC је једнакокрак (дато у задатку) и правоугли, тј. $\angle MCN = 90°$ (јер су MC и NC симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена C троугла ABC) па је $\angle CMN = \angle CNM = 45°$. Сада је $\frac{1}{2}\angle ACB + \angle ABC = \angle NMC = 45°$, јер су у троуглу MBC углови MBC и BCM унутрашњи и несуседни углу NMC. Значи, $\frac{7}{2}\angle ABC + \angle ABC = 45°$, тј. $\angle ABC = 10°$, па је $\angle BCA = 70°$ и $\angle BAC = 100°$.

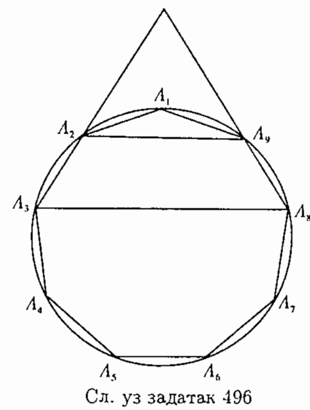
492.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{2000 \cdot 2002} \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2\cdot 4} + \frac{2}{4\cdot 6} + \cdots + \frac{2}{2000\cdot 2002}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{4-2}{2\cdot 4} + \frac{6-4}{4\cdot 6} + \cdots + \frac{2002-2000}{2000\cdot 2002}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2000} - \frac{1}{2002}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2002}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4004} < \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

493. У задатку је дато $\angle MAN = \angle BAN = \alpha$. Продужимо страницу BC преко B до тачке M' тако да је $BM' = DM$. Тада је $\triangle ABM' \cong \triangle ADM$ (СУС), па је $\angle MAD = \angle BAM' = 90° - 2\alpha$ и $AM = AM'$. Према томе, $\angle M'AN = 90° - \alpha = \angle M'NA$, па је $\triangle M'AN$ једнакокрак. Значи, $AM = AM' = M'N = M'B + BN = DM + BN$.

494. Од тих 30 узастопних природних бројева 15 је парних, 5 оних који су дељиви са 3, а нису дељиви са 2, и још 2 који су дељиви са 5, а нису дељиви ни са 2 ни са 3. Према томе, бар $15 + 5 + 2 = 22$ броја су сложена, па простих не може бити више од 8.

495. $m^n < 1000^{999} = 10^{3 \cdot 999} < 10^{2999}$, што је најмањи природан број са 3000 цифара.



Сл. уз задатак 496

496. Унутрашњи угао правилног деветоугла је $140°$, па је (слика) $\angle A_2A_1A_9 = 140°$, $\angle A_1A_2A_9 = \angle A_1A_9A_2 = 20°$ и $\angle A_3A_2A_9 = \angle A_2A_9A_8 = 120°$. Како је четвороугао $A_3A_8A_9A_2$ тетиван, то је $\angle A_2A_3A_8 = \angle A_9A_8A_3 = 60°$, а троуглови AA_3A_8 и AA_2A_9 су једнакостранични. Према томе, $A_2A_3 = AA_3 - AA_2 = A_3A_8 - A_2A_9$, што је и требало доказати (A_3A_8 је најдужа, а A_2A_9 најкраћа дијагонала).

497. Из $a^2+b^2=(a+b-c)^2$ следи $a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a-c)(a+2b-c)$. Према томе, $a^2+(a-c)^2=(a-c)(a+2b-c+a-c)=2(a-c)(a+b-c)$. Слично добијамо и да је $b^2+(b-c)^2=2(b-c)(a+b-c)$. Сада је

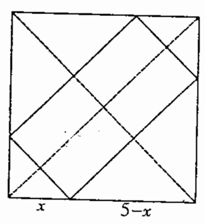
$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}.$$

498. Очигледно је $AC=\sqrt{3}$ и $DM=\frac{\sqrt{6}}{2}$. Како је за троугао ABD тачка E тежиште, то је $DE=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$, а $AE=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Према обрнутој Питагориној теореми (јер је $AD^2=AE^2+DE^2$), $\angle AED$ је прав.

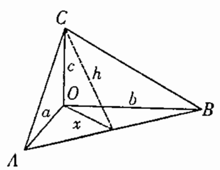
499. Нека је $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ тај низ бројева. Ако би се сви бројеви a_1+1, a_2+2, $\dots$, $a_{10}+10$ завршавали различитим цифрама, онда би цифра јединица броја $(a_1+1)+(a_2+2)+\cdots+(a_{10}+10)$ била 5 (јер је $0+1+2+\cdots+9=45$). Међутим, $(a_1+1)+(a_2+2)+\cdots+(a_{10}+10)=2\cdot(1+2+\cdots+10)=110$, па ће се бар два од бројева $a_1+1, a_2+2, \dots, a_{10}+10$ завршавати истом цифром.

500. Како је $2^x=y^2-1=(y-1)(y+1)$, то постоје две могућности:
(1) $y+1=2^a$ и $y-1=2^b$ $(a>b)$, па је $2=2^a-2^b=2^b(2^{a-b}-1)$. Одавде следи да је $2^b=2$ (јер је $2^{a-b}-1$ непаран број) и $2^{a-b}-1=1$, тј. $b=1$ и $a=2$. Значи, $y+1=2^2$, па је $y=3$ и $2^x+1=9$, односно $x=3$.
(2) $y+1=-2^a$ и $y-1=-2^b$ $(b>a)$, па је $2=2^b-2^a=2^a(2^{b-a}-1)$. Одавде следи да је $2^a=2$ (јер је $2^{b-a}-1$ непаран број) и $2^{b-a}-1=1$, тј. $b=2$ и $a=1$. Значи, $y+1=-2$, па је $y=-3$ и $2^x+1=9$, односно $x=3$.

501. Површина правоугаоника је (слика) $P=x\sqrt{2}(5-x)\sqrt{2}=2x(5-x)=2(5x-x^2)=\frac{25}{2}-2\left(\frac{5}{2}-x\right)^2$, а она ће бити максимална када је умањилац минималан, тј. када је $x=\frac{5}{2}$, а тражена највећа могућа површина је $\frac{25}{2}\,\text{cm}^2$.



Сл. уз задатак 501



Сл. уз задатак 503

502. Ако жути робот прави x, а зелени y аутомобила за један дан, онда је $20x+30y=\frac{80}{4}$ и $50x+40y=\frac{230}{6}$. Одавде је $x=\frac{1}{2}$ и $y=\frac{1}{3}$, па ће 160 жутих и 180 зелених робота за

један дан произвести $160\cdot\frac{1}{2}+180\cdot\frac{1}{3}=140$ аутомобила, односно 1120 аутомобила за 8 дана.

503. Нека је $D\in AB$ и $CD\perp AB$. Означимо OA, OB, OC, CD и OD редом са a, b, c, h и x (слика). Онда је

$$(P_{\triangle AOB})^2+(P_{\triangle AOC})^2+(P_{\triangle BOC})^2=\left(\frac{ab}{2}\right)^2+\left(\frac{ac}{2}\right)^2+\left(\frac{bc}{2}\right)^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4}.$$

С друге стране,

$$(P_{\triangle ABC})^2=\left(\frac{h\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{c^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)^2=\frac{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2}{4},$$

јер је $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}\cdot x=\frac{ab}{2}$, односно $x^2(a^2+b^2)=a^2b^2$.

504. Ако се нека два квадрата налазе у истој врсти или колони, онда су они подударни. Претпоставимо зато да се свих девет квадрата налазе у различитим врстама и различитим колонама. Означимо са S збир дужина страница тих девет квадрата. Ако је дужина странице полазног квадрата a, тада је „ширина“ преостале колоне, као и „ширина“ преостале врсте $a-S$. У њиховом „пресеку“ добијамо десети квадрат странице дужине $a-S$, што је супротно претпоставци. Према томе, бар два квадрата ће бити у истој врсти или колони.

505. Не умањујући општост, претпоставимо да је $\angle BAC$ већи ос $\angle ABC$. Нека је B_1' подножје висине из B_1 на AB и E тачка пресека дужи CD и B_1A_1. Тада је $DC_1 \parallel B_1A_1$, $\triangle AB_1'B_1 \cong \triangle B_1EC$ ($\angle B_1'AB_1 = \angle EB_1C$, $AB_1 = B_1C$ и $\angle AB_1'B_1 = \angle B_1EC = 90°$), па је $B_1'B_1 = EC$. Како је четвороугао $B_1'DEB_1$ правоугаоник, то је $B_1'B_1 = DE$, па је $DE = EC$. Онда је $\triangle DEB_1 \cong \triangle B_1EC$ ($DE = EC$, $EB_1 = EB_1$, $\angle DEB_1 = \angle B_1EC = 90°$), па је $B_1C = B_1D$. Како је $C_1A_1 = B_1C$, то је $B_1D = C_1A_1$, па је четвороугао $A_1B_1DC_1$ једнакокраки трапез (очигледно је $\angle A_1B_1D = \angle B_1A_1C$).

506. (а) Како је $\angle FAD = \angle FBC = 150°$ и $AF = AD$, $BF = BC$, троуглови FAD и FBC су једнакокраки и подударни, са угловима при основици од $15°$. Следи да је $\angle FDC = \angle FCD = 75°$ и даље $\triangle DCF \cong \triangle BCE$, одакле је $FC = CE$, па је $\triangle FCE$ једнакокрак. Из $\angle BCF = 15°$, $\angle BCE = 75°$ следи $\angle FCE = 90°$.
(б)$\angle FBE = 360° - 225° = 135°$. Даље, $\angle BFE = \angle CFE - \angle CFB = 45° - 15° = 30°$, $\angle FEB = 15°$.

507. За $n=2$, $n+2$ је сложен број. За $n=3$ или $n=5$ сви елементи датог скупа су прости бројеви (у првом случају то је скуп $\{5,13,19,29\}$, а у другом $\{7,29,31,127\}$). Докажимо да ако је n прост број већи од 5, бар један од елемената датог скупа мора бити сложен. Како је n у том случају непаран и није дељив са 5, он се завршава са 1, 3, 7 или 9. У првом случају се n^2+4 завршава са 5, у другом се $n+2$ завршава са 5, у трећем се n^3+2 завршава са 5, а у четвртом се n^2+4 завршава са 5, те је у сваком случају бар један од чланова датог скупа дељив са 5 (и није једнак 5). Дакле, тражени бројеви су 3 и 5.

508. Од свих природних бројева са траженим својствима најмањи је онај број који има најмање цифара, а међу њима онај чија је прва цифра најмања. Како је $2002 = 9\cdot 222+4$, то тражени број има најмање 223 цифре. Пошто он мора бити дељив са 4, његов двоцифрени завршетак је један од бројева 00, 04, 08, $\dots$, 88, 92, 96. Највећи збир цифара има двоцифрени завршетак 88 (тај збир је 16). Збир преосталих цифара је, дакле, $2002-16=1986$, а како је $1986=9\cdot 220+6$, то је тражени број $6\underbrace{99\dots99}_{220}88$.

509. У првом минуту вирус уништи једну бактерију и подели се на два, а преостале бактерије поделе се на по две (398 бактерија). У почетку другог минута сваки од два вируса има наспрам себе по 199 бактерија. У трећем минуту сваки од четири вируса има наспрам себе 198 бактерија. Тај процес се наставља даље, па се на крају 199-ог минута наспрам сваког вируса налази по једна бактерија, а по истеку 200-тог минута бактерије нестају.

510. Из услова задатка добијамо $\alpha = \dfrac{(m-2)\cdot 180^\circ}{m}$, $\beta = \dfrac{(n-2)\cdot 180^\circ}{n}$ и
$$\frac{m-2}{m} : \frac{n-2}{n} = 2:3.$$
Одавде је $\dfrac{3(m-2)}{m} = \dfrac{2(n-2)}{n}$, односно $3n(m-2) = 2m(n-2)$, што се може написати као $6n - mn = 4m$, односно $n(6-m) = 4m$. Дакле, $n = \dfrac{4m}{6-m}$. Закључујемо да је $3 \leqslant m < 6$, па је $m \in \{3,4,5\}$. Провером се добија да услове задатка задовољавају парови $(m,n) \in \{(3,4),(4,8),(5,20)\}$.

511. Прелијемо сву течност из прве посуде у друге две. Затим прелијмо из друге и треће по 31 течности у прву. Сада већ у првој посуди имамо исту количину од све три боје. Прелијмо сада сву течност из треће посуде у другу. Тиме смо постигли да су и у другој посуди боје изједначене. Даљи поступак је јасан.

512. (а) Јасно је да је $n \leqslant 2002$ и $S(n) \leqslant S(1999) = 28$. Према томе је $n \geqslant 2002 - 28 = 1974$. Бројеви n и $S(n)$ дају исти остатак при дељењу са 9. Како је $2002 \equiv 4 \pmod 9$, следи да је $n \equiv S(n) \equiv 2 \pmod 9$. Зато су кандидати за n само 1982, 1991 и 2000. Провером добијамо два решења: $n = 1982$ и $n = 2000$.
(б) Бројеви n, $S(n)$ и $S(S(n))$ дају исти остатак при дељењу са 3. Зато је $n + S(n) + S(S(n)) \equiv 0 \pmod 3$. Међутим, $2002 \equiv 1 \pmod 3$. Следи да не постоји природан број n за који важи наведена једнакост.

513. Централни угао A_1OA_2 је 40°, па је $\measuredangle A_1ON = 60^\circ$, а $\triangle A_1NO$ је једнакостраничан. Тада је $\measuredangle A_1SO = 90^\circ$, па тачке M и S припадају кружници k_1 чији пречник је A_1O. Тражени $\measuredangle OMS = \measuredangle OA_1S$ као периферијски над OS. Дакле, $\measuredangle OMS = 30^\circ$.

514. Нека су P и Q редом подножја нормала из B и D на дијагоналу AC и нека је распоред тачака на тој дијагонали, на пример, A--Q--P--C. Ако је $AQ = x$, $QP = y$, $PC = z$, $BP = a$ и $DQ = b$, тада је $185 = 4^2 + 13^2 = (x+y)^2 + a^2 + (z+y)^2 + b^2$ и $185 = 8^2 + 11^2 = z^2 + a^2 + x^2 + b^2$. Дакле, $(x+y)^2 + a^2 + (z+y)^2 + b^2 = z^2 + a^2 + x^2 + b^2$, одакле следи $2xy + 2zy + 2y^2 = 0$, тј. $2y(x+y+z) = 0$, што даље због $x+y+z \neq 0$ даје $y = 0$. Значи да се P поклапа са Q, па су дијагонале AC и BD међусобно нормалне. Аналогно се поступа у случају распореда A--P--Q--C.

515. Ако је
$$x^2 + 2yz = x, \quad y^2 + 2zx = y, \quad z^2 + 2xy = z,$$
онда је $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = x + y + z$, па је
$$(x+y+z)^2 - (x+y+z) = 0.$$
Дакле, $(x+y+z)(x+y+z-1) = 0$, па је $x+y+z \in \{0,1\}$. Тада је $|x+y+z| - \frac{1}{2} \in \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, а $\left||x+y+z| - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

516. Размотримо разлике $\dfrac{m}{77} - \dfrac{n}{13} = \dfrac{13m - 77n}{1001}$, $\dfrac{n}{13} - \dfrac{m}{77} = \dfrac{77n - 13m}{1001}$. Како је услов да су m и n природни бројеви, уочени разломци ће достићи најмању позитивну вредност

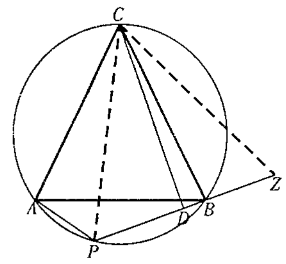
(једнаку 1) под условом да је $13m - 77n = 1$ или $77n - 13m = 1$. Решења једначине $13m - 77n = 1$ су сви парови (m,n) облика $(6 - 77t, 1 - 13t)$, уз услов $t \in \mathbf{Z}$ и $t \leqslant 0$ (да би m и n били природни). Слично, сва решења једначине $77n - 13m = 1$ су сви парови (m,n) облика $(71 + 77t, 12 + 13t)$, $t \in \mathbf{Z}$, $t \geqslant 0$.

517. Продужимо BL до пресека са DC у тачки N. Тражену површину можемо изразити помоћу једнакости $P_{LMCD} = P_{\triangle MCN} - P_{\triangle NLD}$, јер су уочени троуглови LDN и ABL подударни. Очигледно је да важи $P_{\triangle LDN} = P_{\triangle ABL}$. Како је $AB = DN = 7$ cm и висина LE троугла ABL једнака је висини LF троугла LDN, тј. то су половине висине трапеза, то је $P_{\triangle LDN} = \frac{1}{2} DN \cdot LF = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 2 = 7\,\text{cm}^2$. Како је AB паралелно са CD, то су троуглови KBM и MCN слични, при чему је $NC : KB = 12 : 4 = 3$. Ако са h_1 означимо висину троугла KBM, а са h_2 висину троугла MCN, добијамо $h_1 + h_2 = 4$, $h_1 : h_2 = 3 : 1$, одакле је $h_2 = 3$ cm. Коначно је тражена површина $P_{LMCD} = \dfrac{12 \cdot 3}{2} - \dfrac{7 \cdot 2}{2} = 11\,\text{cm}^2$.

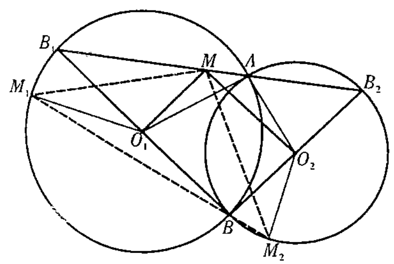
518. Нека су T_1 и T_2 тетраедри ACB_1D_1 и BDA_1C_1. На свакој страни коцке тачно једна дијагонала квадрата припада тетраедру T_1, а она друга тетраедру T_2. Значи, средишта страна коцке M, N, P, Q, R и S су темена две једнакоивичне пирамиде које имају заједничку квадратну основу, која је очигледно двапут мања од стране коцке. Према томе, заједнички део та два тетраедра су те две пирамиде. Једноставним рачунањем се добија да је запремина те две пирамиде једнака шестини запремине коцке, што значи да је запремина коцке шест пута већа од запремине заједничког дела тетраедара T_1 и T_2.

519. Разлика броја и збира његових цифара увек је дељива са 9. Зато су сви бројеви у низу, осим можда првог, дељиви са 9. Дакле, $a_{12} = 9$. Идући уназад закључујемо да њему претходе редом бројеви 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. Број 81 се може добити и из 90 и из 99. Међутим, број 90 се не може добити као разлика неког природног броја и збира његових цифара. Зато броју 81 у низу претходе, редом, бројеви 99 и $a_2 = 108$, а овоме тражени број a_1. Како a_1 није обавезно дељив са 9, имамо десет решења, и то су природни бројеви од 110 до 119.

520. Продужимо дуж PB за дуж $BZ = AP$ (слика). Троуглови BCZ и APC су подударни, па је $CP = CZ$, односно троугао CPZ је једнакокрак. Како је $CD \perp PZ$, то је тачка D средиште дужи PZ, па је $2\,PD = PZ = PB + BZ = PA + PB$.



Сл. уз задатак 520



Сл. уз задатак 521

521. Очигледно су тачке B_1, A, B_2 колинеарне (слика). Имамо да је $MO_1 = \frac{1}{2}BB_2 = AO_2$ и $MO_2 = \frac{1}{2}BB_1 = AO_1$, па су троуглови MO_1A и MO_2A подударни, одакле следи да је $\measuredangle MO_1A = \measuredangle MO_2A$. Даље закључујемо да су троуглови MO_1M_1 и MO_2M_2такође подударни, одакле је $MM_1 = MM_2$.

Из претпоставке $\alpha = \measuredangle AO_1M_1 = \measuredangle AO_2M_2 < 180^\circ$ добијамо $\measuredangle ABM_1 = \alpha/2$ и $\measuredangle ABM_2 = 180^\circ - \alpha/2$, одакле је $\measuredangle ABM_2 + \measuredangle ABM_1 = 180^\circ$, што значи да су тачке M_1, B и M_2 колинеарне. Према томе, троугао MM_1M_2 је једнакокрак и $\measuredangle MM_1B = \measuredangle MM_2B$.

522. Приметимо најпре да N не може имати више од четири проста делиоца и да је $d_2 = 2$. На основу датих претпоставки мора бити $2 + d_3 \geqslant d_5 \geqslant 7$, одакле је $d_4 \geqslant 5$. Како је $d_4 < d_5 \leqslant 2 + d_4$, то је $d_5 = 1 + d_4$ (1) или је $d_5 = 2 + d_4$ (2).
У случају (1) имаћемо $d_6 = 2 + d_4$, одакле закључујемо да $3 \mid N$, па је $d_3 = 3$. Тада и $6 \mid N$, па је $d_4 = 6$, а онда је $d_5 = 7$, $d_6 = 8$, па $4 \mid N$ и $d_4 = 4$. Контрадикција.
Остаје случај (2): $d_5 = 2 + d_4$. Размотрићемо следеће могућности:
(а) Ако $4 \mid N$, због $d_4 \geqslant 5$ следи $d_3 = 4$, па $8 \mid N$. Како је $d_6 \geqslant 8$, мора бити $8 \in \{d_4, d_5, d_6\}$. Сви ови случајеви доводе до контрадикције. За $d_4 = 8$ мора бити $d_5 = 10$, па $5 \mid N$ и $d_4 = 5$, што је немогуће. За $d_5 = 8$ имаћемо $d_4 = 6$, па $3 \mid N$, одакле следи $d_3 = 3$, што је немогуће. За $d_6 = 8$ мора бити $d_5 = 7$, односно $d_4 = 5$ и $10 \mid N$. Међутим, $d_7 = (2+5) \cdot 8 = 56 > 10$. Контрадикција.
(б) Пошто N није дељиво са 4, закључујемо да је d_3 прост број. Ако $3 \mid N$, тада је $d_3 = 3$. Тада $6 \mid N$, па због $d_4 \geqslant 6$ мора бити $d_4 = 6$. Онда је $d_5 = 8$, па $4 \mid N$. Контрадикција. Према томе, 3 не дели N и закључујемо да је $d_3 \geqslant 5$ и $d_4 \geqslant 7$.
Како 4 не дели N и $2 + d_4$, закључујемо да је d_4 непаран. Како $2 + d_4$ и d_4 нису дељиви са 3, то је $d_4 = 3k + 2$ за неки цео број k, а како је непаран, то је $d_4 = 6l + 5$ за неко $l \in \mathbf{Z}$. Како је $d_5 \leqslant 16$, то је $7 \leqslant d_4 \leqslant 14$. Једина могућност је $d_4 = 11$ и $d_5 = 13$. Како $2d_3 \mid N$ и $2d_3 \geqslant d_4$, то је $d_3 \geqslant 6$. Пошто је d_3 прост и $d_3 < 11$, мора бити $d_3 = 7$. Дакле, једино решење задатка је $N = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

523. Применом неједнакости између аритметичке и геометријске средине добијамо

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{b(a+b)} + \frac{1}{c(b+c)} + \frac{1}{a(c+a)}\right)^3 \geqslant \frac{27}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

С друге стране, применом исте неједнакости добијамо $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqslant abc$ и

$$\left(\frac{2(a+b+c)}{3}\right)^3 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\right)^3 \geqslant (a+b)(b+c)(c+a).$$

Множењем последње две неједнакости добија се

$$\frac{1}{abc(a+b)(b+c)(c+a)} \geqslant \frac{3^3 \cdot 3^3}{2^3(a+b+c)^6},$$

што заједно са (1) даје тражену неједнакост.

2003. година

524. Ако са A, B, C, D и E означимо количине млека у судовима, тада је $x = A - 12 = B - 19 = C = D = E$. Значи $x = (256 - 31) : 5$, односно $x = 45$. Дакле, $A = 57$, $B = 64$, $C = 45$, $D = 45$, $E = 45$.

525. Обим већег правоугаоника је $O = 2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 = 28\,\mathrm{cm}$. Странице мањег правоугаоника су $8 - 2 = 6\,\mathrm{cm}$ и $6 - 2 = 4\,\mathrm{cm}$, па је његов обим $O_1 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 20\,\mathrm{cm}$. Значи разлика је $O - O_1 = 8\,\mathrm{cm}$.

526. Ако са A, B и C означимо дужине првог, другог и трећег тунела редом, тада добијамо $A + B = 1440$, $A + C = 1350$ и $B + C = 1520$. Одавде закључујемо да је $2(A + B + C) = 4310$, односно $A + B + C = 2155$. Према томе $A = 635$, $B = 805$ и $C = 715$.

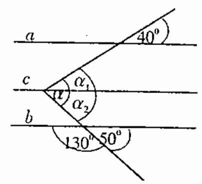
527. У трећој стотини имамо 50 непарних бројева: $201, 203, \ldots, 299$ и 50 парних: $202, 204, \ldots, 300$. Како је сваки паран број већи од одговарајућег непарног за један $(202 - 201 = 204 - 203 = \cdots = 300 - 299 = 1)$ то је збир свих парних бројева треће стотине већи за 50 од збира свих непарних бројева треће стотине.

528. Највећи „четвртаст" број је 4000, а најмањи 1003, па је највећа могућа разлика два „четвртаста" броја 2997.

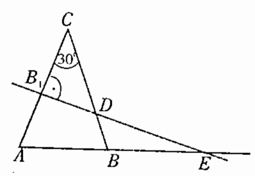
529. Постоје четири неподударна правоугаоника чије су странице $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$, $b_1 = 24\,\mathrm{cm}$; $a_2 = 2\,\mathrm{cm}$, $b_2 = 12\,\mathrm{cm}$; $a_3 = 3\,\mathrm{cm}$, $b_3 = 8\,\mathrm{cm}$ и $a_4 = 4\,\mathrm{cm}$, $b_4 = 6\,\mathrm{cm}$.

530. Очигледно је $\gamma - \beta = 90^\circ$, па је $\alpha = \dfrac{\gamma - \beta}{3} = 30^\circ$. Како је онда $\beta = 60^\circ$ и $\gamma = 150^\circ$ то је $\alpha + \beta + \gamma = 240^\circ$.

531. Како при дељењу 73 са k добијамо остатак 1, то $k \mid 72$ и слично $k \mid 90$ и $k \mid 108$. Највећи такав број k је највећи заједнички делилац бројева $72, 90$ и 108, тј. $k = 18$.



Сл. уз задатак 532



Сл. уз задатак 534

532. Ако уочимо праву c која је паралелна са правим a и b и садржи теме угла α, она дели угао α на два дела тако да је $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, слика. Како је $\alpha_1 = 40^\circ$ и $\alpha_2 = 50^\circ$ то је $\alpha = 90^\circ$.

533. Ако Петар погреши или не уради један задатак, он губи четири бода. Како он није освојио 24 бода, значи да није урадио тачно 6 задатака. Дакле, тачно је решио 14 задатака.

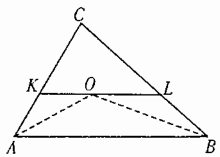
534. Очигледно је $\measuredangle B_1DC = \measuredangle BDE = 60^\circ$, $\measuredangle CAB = \measuredangle CBA = 75^\circ$, $\measuredangle CBE = 105^\circ$ и $\measuredangle BED = 15^\circ$, слика.

535. $5\frac{1}{4}-6{,}2-x<5\frac{1}{4}+6{,}2$, одакле је $x>-12{,}4$. Дакле, то је било који број већи од $-12{,}4$.

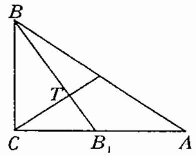
536. Како је $3|x|+6\neq 0$ за било које x, то мора бити $2|x|-6=0$. Сада је $|x|=3$, односно $x=3$ или $x=-3$.

537. Ако је $q=2$, тада је $p=3$. То је једино решење јер ако је q прост и $q\geqslant 3$, тада би p био паран број и $p\geqslant 8$, а такав прост број не постоји.

538. Како је права одређена тачкама A и O симетрала угла BAC, то је $\measuredangle BAO=\measuredangle OAK$, слика. С друге стране, због $AB\parallel KL$ је $\measuredangle BAO=\measuredangle AOK$ па је $\triangle AOK$ једнакокрак и $AK=KO$. На исти начин се може показати да је $\triangle OLB$ једнакокрак и да је $OL=BL$. Према томе, важи $KL=KO+OL=AK+LB$.



Сл. уз задатак 538



Сл. уз задатак 540

539.

$$\frac{(-0{,}2)^8\cdot(-0{,}2)^7}{((-0{,}2)^6:(-0{,}2)^4)\cdot(-0{,}2)^{10}}=\frac{-(0{,}2)^{15}}{(0{,}2)^2\cdot(0{,}2)^{10}}=-(0{,}2)^3=-0{,}008.$$

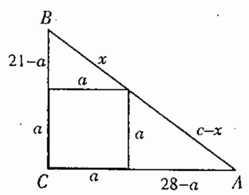
540. Нека је BB_1 тежишна линија троугла ABC, слика. Како је $BT=10\,\mathrm{cm}$, то је $BB_1=15\,\mathrm{cm}$. $\triangle CB_1B$ је правоугли и $BC^2=BB_1^2-CB_1^2=15^2-12^2$, па је $BC=9\,\mathrm{cm}$. Сада је $AB=3\sqrt{73}\,\mathrm{cm}$, $O=(33+3\sqrt{73})\,\mathrm{cm}$ и $P=108\,\mathrm{cm}^2$.

541. Ако би $\sqrt5-\sqrt3$ био рационалан број тада би било $\sqrt5-\sqrt3=\frac{p}{q}$, где су p и q неки природни бројеви. Сада је $\sqrt5=\sqrt3+\frac{p}{q}$, односно $5=3+2\cdot\frac{p}{q}\sqrt3+\frac{p^2}{q^2}$. Одавде закључујемо да је $\sqrt3=\frac{q}{2p}\left(2-\frac{p^2}{q^2}\right)$ рационалан број, што знамо да није тачно. Према томе $\sqrt5-\sqrt3$ је ирационалан број.

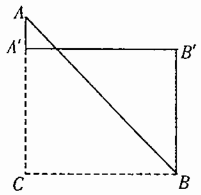
542. Видимо да је $P_{\triangle ABC}=\frac{21\cdot 28}{2}\,\mathrm{cm}^2$, слика. С друге стране,

$$P_{\triangle ABC}=a^2+\frac{a(21-a)}{2}+\frac{a(28-a)}{2}.$$

Значи, $21\cdot28=2a^2+a(21-a)+a(28-a)$, тј. $21\cdot28=49a$, одакле је $a=12\,\mathrm{cm}$. Сада је $x^2=9^2+12^2$, тј. $x=15\,\mathrm{cm}$ и $(c-x)^2=16^2+12^2$, тј. $c-x=20\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 542



Сл. уз задатак 544

543. Како је

$$2002^{2002}+2002^{2001}=2002^{2001}(2002+1)=2003\cdot2002^{2001},$$

и како је

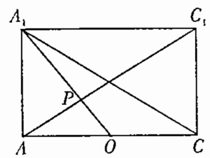
$$2003^{2002}>2003\cdot2002^{2001}\quad(\text{јер је }\ 2003^{2001}>2002^{2001}),$$

то је $2003^{2002}>2002^{2002}+2002^{2001}$.

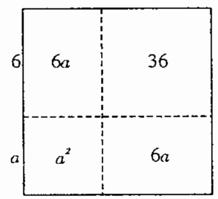
544. Ако уочимо квадрат $CBB'A'$ (видети слику), тада је $AB^2=AC^2+CB^2=4^2+3^2=25$, тј. $AB=5\,\mathrm{cm}$.

545. Како је $\frac13\cdot\frac{110}{100}+\frac14\cdot\frac{115}{100}+\frac{5}{12}\cdot\frac{95}{100}=\frac{105}{100}$, то значи да добит од 2400 динара представља 5% од набавне цене робе. Дакле, набавна цена робе је 48000 динара.

546. Посматрајмо дијагонални пресек ACC_1A_1 дате коцке, слика. Лако је доказати да је P тежиште троугла ACA_1, па је онда $A_1O=3\cdot OP=3\cdot\frac{1}{\sqrt2}$. Ако са a означимо дужину ивице коцке и уочимо правоугли троугао AOA_1, видимо да је $a^2+\left(\frac{a\sqrt2}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{\sqrt2}\right)^2$, односно $a^2=3$ и коначно $P=6a^2=18$.



Сл. уз задатак 546



Сл. уз задатак 550

547. Дати израз је једнак:

$$\begin{aligned}2^{20}-\sqrt{(1+2^{10})^2(1-2^{10})^2}&=2^{20}-(1+2^{10})(2^{10}-1)\\&=2^{20}-((2^{10})^2-1)=2^{20}-2^{20}+1=1.\end{aligned}$$

548. Одмах видимо да је $|x+3|-3=x+8$ или $|x+3|-3=-x-8$. Прва једначина се своди на $|x+3|=x+11$ из које је $x+3=x+11$ што нема решења, или $x+3=-x-11$, тј. $x=-7$. Друга једначина се своди на $|x+3|=-x-5$ из које је $x+3=-x-5$, тј. $x=-4$, што није решење, или $x+3=x+5$, што нема решења. Једино решење једначине је $x=-7$.

549. Површина ходника је 6 пута мања (због ширине) и 4 пута већа (због дужине), тј. $(60\,\mathrm{m}^2\,54\,\mathrm{dm}^2):6=10\,\mathrm{m}^2\,9\,\mathrm{dm}^2$; $(10\,\mathrm{m}^2\,9\,\mathrm{dm}^2)\cdot4=40\,\mathrm{m}^2\,36\,\mathrm{dm}^2$.

550. Очигледно је да важи $96=6a+6a+36$, тј. $a=5\,\mathrm{cm}$, слика. Обим мањег квадрата је $O=4a=20\,\mathrm{cm}$.

551. Ако са x означимо број година Милоша Вујанића, тада Владе Дивац има $x+12$ година, а како је пре 16 година Владе Дивац био три пута старији од Милоша Вујанића, то је $3(x-16)=x+12-16$, односно $3x-3\cdot16=x+12-16$, тј. $3x-2\cdot16=x+12$, одакле је $x=22$. Према томе, Владе Дивац сада има 34, а Милош Вујанић 22 године.

552. Најмањи непаран четвороцифрен број чији је збир цифара 4 је 1003, а највећи паран троцифрен број чији је производ цифара 16 је 812, па је тражена разлика $1003-812=191$.

553. Ако са x означимо број поморанџи које је добило свако од троје деце, тада када свако дете поједе по 4 поморанџе добијамо $3(x-4)=x$, тј. $2x=12$. Значи, свако дете је добило по 6 поморанџи.

554. (а) То ће бити најмањи троцифрени квадрат простог броја, тј. 121, а скуп његових делилаца је $\{1,11,121\}$.

(б) То ће бити најмањи троцифрени број који је производ два различита проста броја и то је 106, а скуп његових делилаца је $\{1,2,53,106\}$.

555. Како је $\alpha+\beta=90°$, $\alpha+\gamma=180°$ и $\gamma=6\beta$, то је $5\beta=90°$, тј. $\beta=18°$, а онда је $\alpha=72°$ и $\gamma=108°$, па је $\alpha+\beta+\gamma=198°$.

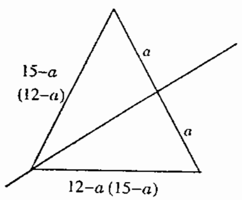
556. Означимо те две паралелне праве са a и b и нека се на правој a налазе три тачке, а на правој b пет тачака. Ако на правој a уочимо две тачке, а на правој b једну, на тај начин је одређено $3\cdot5=15$ различитих троуглова. Ако пак на правој a уочимо једну тачку, а на правој b две, на тај начин је одређено $3\cdot10=30$ троуглова. Значи, укупно је одређено 45 различитих троуглова.

557. Ако са x означимо број динара које је Аца понео, тада је $\frac{x}{2}+20+30+\frac{x}{3}=x$. Одавде је $x=300$.

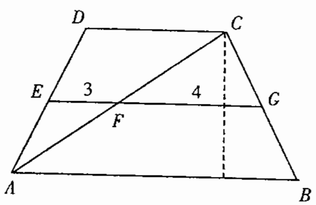
558. $X=\{$М,А,Т,Е,И,К$\}$ и $Y=\{$П,О,З,Р,И,Ш,Т,Е$\}$, па је $X\cap Y=\{$Е,Т,И$\}$ и $Y\setminus X=\{$П,О,З,Р,Ш$\}$. Како је $S\subset Y$ и $(X\cap Y)\setminus S=\emptyset$, то је $\{$Е,Т,И$\}\subset S$. С друге стране, из $(Y\setminus X)\cap S=\{$П$\}$ закључујемо да S садржи П и не садржи слова О,З,Р и Ш. Значи, $S=\{$П,Е,Т,И$\}$.

559. Дата једначина је еквивалентна са $\frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{3}{5}=-\frac{9}{4}\cdot\frac{10}{9}$, тј. са $\frac{4}{15}x+\frac{1}{5}=-\frac{5}{2}$, одакле се добија $x=-\frac{81}{8}$.

560. Обележимо половину крака са a, слика. Ако је крак дужи од основице, тада је $15-a=2a$, тј. $a=5\,\mathrm{cm}$, па је основица дужине $7\,\mathrm{cm}$, а крак $10\,\mathrm{cm}$. Ако је крак краћи од основице, тада је $12-a=2a$, тј. $a=4\,\mathrm{cm}$, па је дужина основице $11\,\mathrm{cm}$, а крака $8\,\mathrm{cm}$.



Сл. уз задатак 560



Сл. уз задатак 567

561. Ако је $x\geqslant3$, тада се дата неједначина своди на неједначину $x-3\leqslant3-x$, тј. $x\leqslant3$, па је у том случају једино решење $x=3$. Ако је $x<3$, неједначина се своди на $3-x\leqslant3-x$, која је тачна за свако посматрано x. Према томе, решења неједначине су сви цели бројеви $x\leqslant3$.

562. Лако се закључује да је угао на основици тог једнакокраког троугла 58° (углови са нормалним крацима). Онда је угао при врху 64°, па је основица највећа страница тог једнакокраког троугла. Као највећа страница она је већа од трећине обима троугла $\frac{2003}{3}$, а то значи и од 667 cm.

563. Како је $\frac{4}{3}<\frac{3}{2}$, то се та два кликера премештају са „мање" на „веће" гомилу. Ако са x означимо укупан број кликера, онда се на већој гомили налази $\frac{4}{7}x=\frac{20}{35}x$ кликера. Премештањем два кликера на већој гомили ће бити $\frac{3}{5}x=\frac{21}{35}x$ кликера. Дакле, два кликера представљају $\frac{1}{35}x$, одакле добијамо $x=70$. Значи, на гомилама је било 40 и 30 кликера.

564. Како је $111=3\cdot37$, то је

$$333^{2003}+555^{2003}=111\cdot(3\cdot333^{2002}+5\cdot555^{2002})$$

дељиво са 37.

565. Ако је a_1 страница квадрата K_1, тада је $a_1^2:a_2^2=4:3$, тј. $a_2=\frac{a_1\sqrt3}{2}$. Конструкција може да се изведе на следећи начин: над страницом a_1 квадрата K_1 конструишемо једнакостранични троугао, па над једном његовом висином конструишемо квадрат. То је тражени квадрат K_2.

566. Очигледно је $5\cdot89\cdot x^2=2002+2003$, одакле је $x^2=9$, односно $x=3$ или $x=-3$.

567. Нека је EG средња линија трапеза $ABCD$ и $F=AC\cap EG$, слика. Из $\triangle ACD$ закључујемо да је $CD=6\,\mathrm{cm}$, а из $\triangle ABC$ да је $AB=8\,\mathrm{cm}$. Према томе, висина трапеза је $h^2=5-1=4$, тј. $h=2\,\mathrm{cm}$, а површина $P=14\,\mathrm{cm}^2$.

568. (а) Како за $n\geqslant2$ важи $n^2>n(n-1)$, то је и $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$.

(б)

$$\begin{aligned}\left(\frac12\right)^2+\left(\frac13\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2003}\right)^{2003}&<\left(\frac12\right)^2+\left(\frac13\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2003}\right)^2\\&<\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2002\cdot2003}<\frac11-\frac12+\frac12-\frac13+\cdots+\frac{1}{2002}-\frac{1}{2003}\\&=1-\frac{1}{2003}<1.\end{aligned}$$

569. Дата једначина је еквивалентна са $0{,}64x^2-0{,}8x+0{,}25+0{,}36x^2-1{,}56x+1{,}69=4(0{,}25x^2-0{,}49)-0{,}9x-0{,}48$, тј. са $-1{,}46x=-4{,}38$, одакле се добија $x=3$.

570. Запремина коцке је $20^3=8000\,\mathrm{cm}^3$. Ако са d означимо дебљину плоче, тада је $8000=d\cdot80\cdot50$, односно $d=2\,\mathrm{cm}$.

571. Тражени број m има што је могуће мање цифара, а то се постиже тако што ће се он завршавати са што је могуће више деветки. Дакле, $m=5\underbrace{99\ldots99}_{222}$. Сада је очигледно

$$m<6\underbrace{00\ldots00}_{222}=6\cdot10^{222}.$$

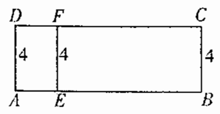
572. Ако никоје три од тих шест тачака нису колинеарне, тада оне одређују $\frac{6\cdot5}{2}=15$ правих. Ако су неке три тачке колинеарне, то због услова задатка могу бити само три краја различитих дужи, а тада су и друга три краја такође колинеарна. У том случају број различитих правих је $15-2\cdot2=11$.

573.

$$\begin{aligned}1+5+5^2+5^3+\cdots5^{2003}&\\&=(1+5+5^2)+5^3(1+5+5^2)+\cdots5^{2001}(1+5+5^2)\\&=(1+5+5^2)(1+5^3+5^6+\cdots5^{2001})=31\cdot(1+5^3+5^6+\cdots5^{2001}).\end{aligned}$$

574.

```
   4 8 3 · 2 1
   -----------
     4 8 3
   9 6 6
 -----------
 1 0 1 4 3
```



Сл. уз задатак 575

575. Очигледно је $AD = EF = 4\,\mathrm{cm}$, па је $AE = DF = 2\,\mathrm{cm}$. Онда је $EB = 8\,\mathrm{cm}$ па је површина правоугаоника $EBCF = 8 \cdot 4 = 32\,\mathrm{cm}^2$.

576. Како је Павле за трећину посла добио 300 динара и улазницу, то значи да би за цео посао добио 900 динара и три улазнице. Значи две улазнице вреде 400 динара, а једна 200 динара.

577. Ако три пута напуни суд од $3\,\ell$ и то сваки пут сипа у суд од $7\,\ell$, тада ће му у суду од $3\,\ell$ остати $2\,\ell$ воде. То ће одлити у празан суд од $20\,\ell$. После тога ће још једном напунити суд од $3\,\ell$ и то одлити у суд у коме се већ налазе $2\,\ell$ воде.

578. Како се $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ завршава цифром 6, то ће се и производ 2000 осмица завршавати цифром 6. Сада је лако израчунати да се производ 2003 осмице завршава цифром 2.

579. Прави разломци су $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{8}, \frac{3}{5}, \frac{3}{8}$ и $\frac{5}{8}$. Како је највећи од њих $\frac{2}{3}$, а најмањи $\frac{2}{8}$, то је тражена разлика $\frac{2}{3} - \frac{2}{8} = \frac{5}{12}$.

580. Очигледно је

```
1 5 * 4 4 : * 6 = 4 * *
* * 4
-----
  1 0 4
    * 2
  -----
    3 2 4
    3 2 4
    -----
        0
```

Сада је јасно да је последња цифра количника 9 (јер је могуће само 4 или 9, а 4 није јер је $*6 \cdot 4$ мање од $15*$). Сада се лако добија

```
1 5 4 4 4 : 3 6 = 4 2 9
1 4 4
-----
  1 0 4
    7 2
  -----
    3 2 4
    3 2 4
    -----
        0
```

581. Како α и β имају паралелне краке, то су могућа два случаја:

(I) $\alpha = \beta$, па је тада $2\beta - \alpha = \alpha = 2003' = 33°23'$ и

(II) $\alpha + \beta = 180°$, па је тада $2\beta - \alpha = 360° - 3\alpha = 259°51'$.

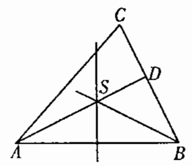
582. Површина тог папира је $27 \cdot 72\,\mathrm{cm}^2$. Како су сва сечења дозвољена, то је површина највеће коцке једнака $6 \cdot 18 \cdot 18 = 27 \cdot 72\,\mathrm{cm}^2$, а ивица те коцке је $18\,\mathrm{cm}$.

583. Дати скуп можемо поделити на 50 подскупова са једнаким збировима и то су $\{99\}, \{1, 98\}, \{2, 97\}, \ldots, \{49, 50\}$. Сада ако направимо унију било којих 25 подскупова, на пример $A = \{1, 2, 3, \ldots, 24, 75, 76, \ldots, 98, 99\}$ тада ће бити $B = \{25, 26, \ldots, 73, 74\}$.

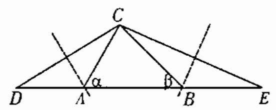
584. Како је $-\frac{33}{4} < 3x < \frac{27}{5}$, то је $-\frac{11}{4} < x < \frac{9}{5}$, па је скуп A целих бројева који задовољава ове услове дат са $A = \{-2, -1, 0, 1\}$. Слично, други услов се своди на $-\frac{9}{5} < x < \frac{11}{4}$, па је скуп B целих бројева који задовољавају овај услов дат са $B = \{-1, 0, 1, 2\}$. Према томе, $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $A \cap B = \{-1, 0, 1\}$.

585. Збир бројева $-n, -n+1, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ (има их непаран број) је нула, па се задатак своди на то да ли могу да се одреде 2 узастопна броја (који следе после n) чији је збир 2003. То су очигледно бројеви 1001 и 1002. Према томе, тражени бројеви су $-1000, -999, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 999, 1000, 1001, 1002$.

586. $\triangle ASB$ је једнакокрак, па је $\measuredangle SAB = \measuredangle ABS = \measuredangle SBC$, слика. Из $\triangle ABD$ закључујемо да је $\measuredangle SAB + \measuredangle ABS + \measuredangle SBC = 90°$, па је $\measuredangle ABC = 60°$.



Сл. уз задатак 586



Сл. уз задатак 588

587. Не може јер му је за то потребно 8 различитих збирова, а има их само 7 и то: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 3 \cdot \frac{1}{3}$, $\frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{6}$, $\frac{7}{6} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$, $\frac{4}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\frac{5}{6} = 2 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2}$ и $\frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$.

588. Ако страницу AB продужимо преко A тако да је $AD = AC$, а преко B тако да је $BE = BC$, добијамо $\triangle DEC$ чија је страница $DE = 10\,\mathrm{cm}$, $\measuredangle CDE = \frac{\alpha}{2} = 30°$ и $\measuredangle DEC = \frac{\beta}{2} = 22°30'$, слика. Тај троугао је лако конструисати, а тражени троугао добијамо када конструишемо симетралу странице DC, па у пресеку са DE добијамо A. Слично налазимо и теме B.

589. Како је број дијагонала правилног n-тоугла $\frac{n(n-3)}{2}$, то је $n(n-3) = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 = 21 \cdot 24$. Према томе, $n = 24$.

590. Хипотенуза овог троугла је $10\,\mathrm{cm}$, а полупречник уписаног круга $r = \frac{8+6-10}{2} = 2\,\mathrm{cm}$. Површина квадрата уписаног у овај круг је $P = 8\,\mathrm{cm}^2$.

591. Како је $\frac{a - b\sqrt{2003}}{b - c\sqrt{2003}} = r$, $r \in \mathbf{Q}$ то је $a - b\sqrt{2003} = r(b - c\sqrt{2003})$. Сада је $a - rb = (b - rc)\sqrt{2003}$. Како је $\sqrt{2003}$ ирационалан, ово је могуће једино за $a - rb = b - rc = 0$, односно $r = \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$. Одавде је $b^2 = ac$.

592. Петоцифрених бројева има $9\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10$. Производ њихових цифара је или паран или непаран број. Производ ће бити непаран ако су му све цифре непарне. Таквих бројева има $5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5$, па петоцифрених бројева чији је производ цифара паран има $9\cdot 10^4-5^5$.

593. Број 2^k је најмање четвороцифрен ако је $k\geqslant 10$. Ако би тај број имао последње четири цифре једнаке, онда га можемо записати у облику $2^k=10000\cdot A+\overline{aaaa}$. Међутим $16\mid 10000$, а број $\overline{aaaa}=a\cdot 1111$ није дељив са $16=2^4$, па онда 2^k $(k\geqslant 10)$ не би било дељиво са 16. Дакле, 2^k $(k\geqslant 10)$ не може имати једнаке последње четири цифре.

594. Ако је већи дијагонални пресек квадрат, тада је $H=2a$, где је a страница основе, а H висина. Како је дужина мање дијагонале једнака двострукој висини једнакостраничног троугла странице a, то је $a=\dfrac{10\sqrt3}{3}$ cm. Сада је $V=6\cdot\dfrac{a^2\sqrt3}{4}\cdot 2a=1000\,\mathrm{cm}^3$.

595. Пре свега је

$$2003^{2003}-2003=2003\cdot(2003^{2002}-1)=2003(2003^{1001}-1)(2003^{1001}+1).$$

Како 2003^{1001} није дељиво са 3, то ће један од његових суседа бити дељив са 3, па је и $2003^{2003}-2003$ дељиво са 3.

596. I начин. Како је $CA\parallel GE$ то је $P_{\triangle CGE}=P_{\triangle AGE}=50\,\mathrm{cm}^2$ (троуглови са једнаким висинама и основицама).
II начин. Ако је $AB=x$, тада је

$$P_{ABCE}=\frac{(x+10)\cdot x}{2},\quad P_{\triangle ABG}=\frac{(x+10)\cdot x}{2},\quad \text{и}\quad P_{\triangle CGE}=50\,\mathrm{cm}^2.$$

Сада је $P_{\triangle AGE}=P_{ABCE}+P_{\triangle CGE}-P_{\triangle ABG}=50\,\mathrm{cm}^2$.

597. Јединица може да буде уписана или у трећи квадратић (тада имамо 6 могућности: 32154, 43152, 42153, 54132, 53142 и 52143) или у пети квадратић (тада имамо 3 могућности: 54231, 53241 и 43251). Дакле, имамо укупно 9 могућности.

598. Девет двоцифрених бројева који се могу јавити у том низу су 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92 и они се сви завршавају различитим цифрама, тако да су, на пример, последњих 14 цифара тог низа

$$\dots 6\underbrace{92346}\underbrace{92346}851\,.$$

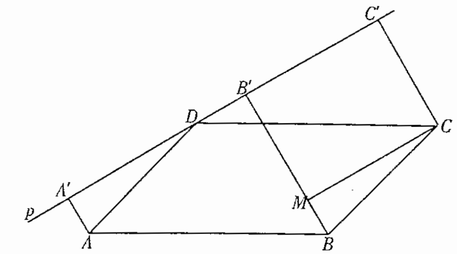
Видимо да су последње три цифре 851 и да се блокови од по 5 цифара понављају, па како низ има укупно 2003 цифре, то ће прва цифра бити 9.

599. Како је $1+2+\dots+n=1001\,\overline{abc}$, односно $\dfrac12 n(n+1)=1001\,\overline{abc}$, то је $n(n+1)=1001\cdot(2\cdot\overline{abc})$, па је једна могућност да је $2\overline{abc}=1002$, тј. $\overline{abc}=501$ и $n=1001$.

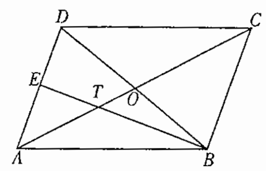
600. Уочимо $M\in BB'$ тако да је $CM\perp BB'$, слика. Тада је четвороугао $CC'B'M$ правоугаоник и $CC'=B'M$. С друге стране, троуглови BMC и $AA'D$ су подударни ($\measuredangle A'=\measuredangle M=90^\circ, BC=AD$ и $\measuredangle ADA'=\measuredangle BCM$ као углови са паралелним крацима) па је $BM=AA'$. Сада је $AA'+CC'=BM+MB'=BB'$.

601. (а) Најмањи број је онај који има најмање цифара, па ће тражени број имати 223 цифре (јер је $2003:9=222(5)$). Како је потребно да број буде дељив са 4, то ће најповољније бити да му двоцифрени завршетак буде 88, јер је међу свим повољним двоцифреним завршецима тада највећи збир $(8+8=16)$. Значи, тражени број је $7\underbrace{99\dots99}_{220}88$.

(б) Број би требало да има што је могуће више цифара (различитих од нуле), јер је сваки n-тоцифрени број већи од сваког k-тоцифреног броја за $k<n$. Како број мора бити дељив са 4, то је тражено решење $\underbrace{11\dots11}_{2001}2$.



Сл. уз задатак 600



Сл. уз задатак 602

602. Троугао ABD је једнакокрак, па висина BE полови страницу AD. Како се дијагонале паралелограма међусобно полове, то је пресек T дужи BE и OA тежиште троугла ABD. Даље, хипотенуза AT већа је од катете AE, па је

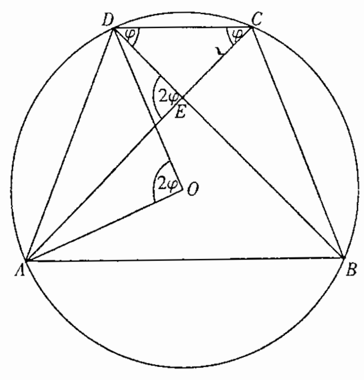
$$\frac12 AD=AE<AT=\frac23\left(\frac12 AC\right),$$

односно $3\,AD<2\,AC$.

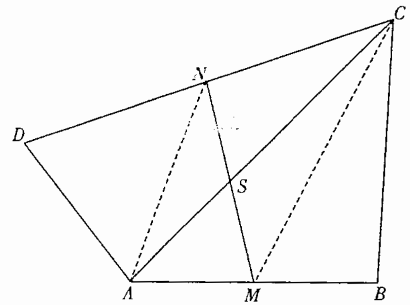
603. Како је A први, то A мора имати више од 97 поена, тј. A има 98, 99 или 100 поена. Ако A има 98 поена, тада B и C заједно имају 187 поена, а D има 95 поена и он је четврти. B (или C) тада мора имати 97 поена, а тада C (или B) има 90 поена, што по претпоставци није могуће.
Ако A има 99 поена, тада B и C имају заједно 186 поена, а D 96 поена колико има и E, што је такође немогуће.
И коначно, ако A има 100 поена, B и C имају заједно 185, па тада D има 97 поена и друго место, а B и C могу имати 92 и 93 поена (или обратно) па су могућа два поретка: A,D,E,B,C и A,D,E,C,B.

604. Како је $n=2^{2003}\cdot(2^5-2^3+1)=2^{2001}\cdot 100$, то је због $(2^4)^{500}=\dots6$, тј. $2^{2001}=\dots2$, очигледно да је 200 троцифрени завршетак броја n.

605. Очигледно је $\triangle EDC$ једнакокрак, па за $\measuredangle ECD=\measuredangle EDC=\varphi$ је $\measuredangle AED=2\varphi$, слика. С друге стране, $\measuredangle ACD=\varphi$ је периферијски угао над тетивом AD, па је одговарајући централни угао $\measuredangle AOD=2\varphi$. Према томе, $\measuredangle AED=2\varphi=\measuredangle AOD$.



Сл. уз задатак 605



Сл. уз задатак 607

606. Нека је $k \in \mathbf{Z}$ тако да је $r+\sqrt{3}=k$. Тада је $r=k-\sqrt{3}$ и $\frac{1}{r}=\frac{1}{k-\sqrt{3}}=\frac{k+\sqrt{3}}{k^2-3}$. Како је

$$\frac{1}{r}-\sqrt{3}=\frac{k+\sqrt{3}}{k^2-3}-\frac{k^2-3}{k^2-3}\sqrt{3}=\frac{k+(4-k^2)\sqrt{3}}{k^2-3}$$

цео број, то је, пре свега, $4-k^2=0$, па је $k=2$ или $k=-2$, а то значи $r=2-\sqrt{3}$ или $r=-2-\sqrt{3}$.

607. Ако спојимо тачке A и N, односно M и C добијамо да је $P_1=P_{\triangle ASN}=P_{\triangle AMS}$ ($NS=SM$ и једнаке висине) и слично $P_2=P_{\triangle NSC}=P_{\triangle MSC}$. На сличан начин $P_{\triangle MBC}=P_{\triangle AMC}=P_1+P_2$ односно $P_{\triangle AND}=P_{\triangle ANC}=P_1+P_2$, па је коначно

$$P_{\triangle ABC}=2(P_1+P_2)=P_{\triangle ACD}.$$

608. (a) Нека је збир бројева у једном од троуглова једнак m. Ако са a,b,c,d,e,f,g,h,i означимо те бројеве од 1 до **9** тада ће важити

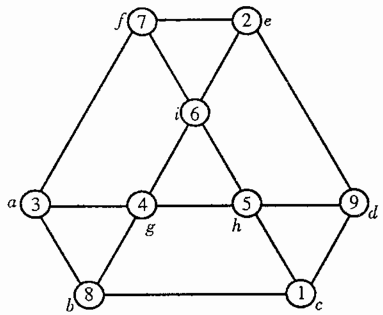
$$2(a+b+c+d+e+f)+3(g+h+i)=7m,$$

тј.

$$\underbrace{(g+h+i)}_{m}+2(a+b+c+d+e+f+g+h+i)=7m,$$

одакле је $2\cdot\frac{9\cdot 10}{2}=6m$, односно $m=15$.

(б) Једно могуће решење је



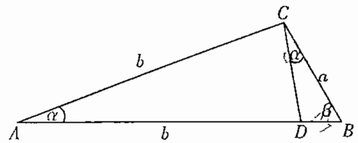
Сл. уз задатак 608

609. Како је $2003\equiv 2 \pmod 3$, то је $2003^2\equiv 1 \pmod 3$. С друге стране, $2^{2003}=4^{1001}\cdot 2$ и како је $4\equiv 1 \pmod 3$, то је $4^{1001}\equiv 1 \pmod 3$, па је коначно $2^{2003}\equiv 2 \pmod 3$. Сада је $2003^2+2^{2003}\equiv 0 \pmod 3$, тј. 2003^2+2^{2003} је дељиво са 3.

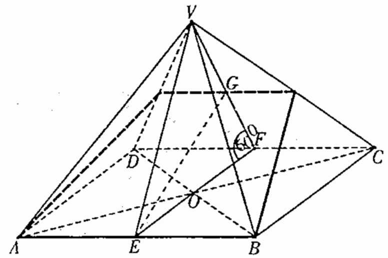
610. Како је $2\alpha+2\beta=180^\circ-\alpha$, то је

$$\gamma=180^\circ-(\alpha+\beta)=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=90^\circ+\frac{\alpha}{2},$$

слика. Нека је тачка $D\in AB$ таква да је $\angle BCD=\alpha$. Тада је $\angle ACD=90^\circ-\frac{\alpha}{2}=\angle ADC$, па је $\triangle ADC$ једнакокрак и $AD=AC=b$. Очигледно је $\triangle ABC\sim\triangle BCD$, па је $BC:BD=AB:CB$, тј. $a:(c-b)=c:a$, одакле се добија да је $a^2+bc=c^2$.



Сл. уз задатак 610



Сл. уз задатак 612

611. Како је $\frac{x^2+2003}{x+2003}=\frac{x^2-2003^2+2003^2+2003}{x+2003}$, то је

$$\frac{x^2+2003}{x+2003}=x-2003+\frac{2003\cdot 2004}{x+2003}=x-2003+\frac{2^2\cdot 3\cdot 167\cdot 2003}{x+2003}.$$

Значи, $\frac{x^2+2003}{x+2003}\in\mathbf{Z}$ за $\frac{2^2\cdot 3\cdot 167\cdot 2003}{x+2003}\in\mathbf{Z}$, тј. када је $x+2003$ делилац броја $2^2\cdot 3\cdot 167\cdot 2003$. Према томе, у скупу $\mathbf{Z}$, x може узети $2\cdot(3\cdot 2\cdot 2\cdot 2)=48$ различитих вредности.

612. Нека су E и F средишта ивица AB и CD, респективно, слика. Очигледно је да је $EF\perp CD$ и $VF\perp CD$. Даље, $\triangle EFV$ је једнакокрак и $\angle EFV=60^\circ$ (угао на основици), па је онда он једнакостраничан. Нека раван α садржи ивицу AB и нека је нормална на бочну страну CDV. У том случају раван α садржи нормалу из тачке E на бочну страну CDV, тј. садржи висину једнакостраничног троугла EFV. Према томе, раван α ће садржати и средњу линију троугла DCV, па је пресек равни α и пирамиде трапез чије су основице 10 cm и 5 cm, а висина $5\sqrt{3}$ cm. Дакле, тражена површина је $\frac{75\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

613. Означимо производ бројева у првој групи са A_1, другој са A_2 итд. Ако претпоставимо супротно, тј. да је

$$A_i\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{1000}\quad \text{за}\quad i=1,2,3,4,5,$$

тада би важило да је $A_1A_2A_3A_4A_5\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}$, што је немогуће јер је

$$A_1A_2A_3A_4A_5=\left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\cdots+100}=\left(\frac{1}{2}\right)^{5050}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{5000}.$$

614. Очигледно је да се 1^{2003}, 5^{2003} и 6^{2003} завршавају редом цифрама 1, 5 и 6. Непаран степен броја 4 односно броја 9 увек се завршава цифром 4 односно 9. На крају, бројеви 2 и 3 степеновани бројем облика $4k+3$ увек се завршавају цифром 8 односно 7. Према томе, тражени број се завршава нулом јер је $1+8+7+4+5+6+9=40$.

615. Нека су a,b и c странице троугла ABC и $t_a=AD$ тежишна линија. Из $\triangle ABD$ је $t_a>c-\frac{a}{2}$, а из $\triangle ADC$ је $t_a>b-\frac{a}{2}$. Сабирањем ових неједнакости добијамо $2t_a>b+c-a$, тј.

$$t_a>\frac{b+c-a}{2}. \tag{*}$$

Продужимо AD преко тачке D до тачке E тако да је $AD = ED$. Из $\triangle AEC$ је $2t_a < b+c$, тј.

(**) $$t_a < \frac{b+c}{2}.$$

Из (*) и (**) добијамо

(1) $$\frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2}.$$

Аналогно је

(2) $$\frac{a+c-b}{2} < t_b < \frac{a+c}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}.$$

Сабирањем релација (1) и (2) добијамо

$$\frac{a+b+c}{2} < t_a + t_b + t_c < a+b+c.$$

616. С обзиром да је $\triangle ABC$ једнакокрак, тачке O и S припадају симетрали угла ACB, $\measuredangle ACB = \gamma$. Дакле, $\measuredangle ACO = \frac{\gamma}{2}$, а како O припада симетрали дужи AC то је $\measuredangle ACO = \measuredangle CAO = \frac{\gamma}{2}$. Из троугла ACD, где је D средиште основице AB следи

$$\measuredangle OAB = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ - \gamma.$$

Нека је P додирна тачка кружнице $k(S,r)$ са продужетком крака AC. Тада је $\measuredangle OAB = \measuredangle BAS = \measuredangle SAP$ и

$$\measuredangle CAO + \measuredangle OAB + \measuredangle BAS + \measuredangle SAP = 180^\circ,$$

одакле је $\frac{\gamma}{2} + (90^\circ - \gamma)\cdot 3 = 180^\circ$, односно $\frac{5}{2}\gamma = 90^\circ$ и коначно $\gamma = 36^\circ$.
Дакле, $\alpha = \beta = 72^\circ$, $\gamma = 36^\circ$.

617. Означимо са 1 пут који пређе мала казаљка приликом њене ротације за 360°, тј. за пун круг, а пут који је прешла мала казаљка од подеока 12 h до траженог времена означимо са x. Тада пут који ће прећи мала казаљка од траженог тренутка до подеока 13 h је $\frac{1}{12} - x$, а пут који ће за то време прећи велика казаљка је 12 пута дужи, тј. $1 - 12x$. Сада је јасно да мора бити $1 - 12x = x$, односно $x = \frac{1}{13}$ пуног круга, односно $\frac{1}{13}$ од 12 h, па је резултат задатка 12 h и $\frac{12}{13}$ h, тј. 12 h 55 min $23\frac{1}{13}$ s.

618. Нека је p број парова дечак-девојчица који седе заједно. Значи, број ученика у паровима је $2p$, јер је p број дечака у пару и p број девојчица у пару. Нека су m и n бројеви дечака, односно девојчица. Тада је $p = \frac{2}{3}m$ и $p = \frac{3}{5}n$, одакле је $m = \frac{3}{2}p$ и $n = \frac{5}{3}p$. Укупан број ученика у одељењу је $m + n = \frac{19}{6}p$. Сада је $\frac{2p}{\frac{19}{6}p} = \frac{12}{19}$. Дакле, $\frac{12}{19}$ од укупног броја ученика седи у мешовитим паровима.

619. Нека је $a = \frac{m}{n}$, при чему су m и n узајамно прости природни бројеви. Претпоставимо да је $a + \frac{1}{a} \in \mathbf{Z}$, тј. $a + \frac{1}{a} = k$ $(k \in \mathrm{N})$. Тада је $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} = k$, одакле је $m^2 + n^2 = kmn$. Десна страна претходне једнакости је дељива са m, па $m \mid n$, што је у супротности са претпоставком да су m и n узајамно прости.

620. Означимо са P површину $\triangle ABC$, са P_1 површину $\triangle BCG$, са P_2 површину петоугла $CDEFG$ и са P_3 површину $\triangle AED$. Дата је катета једнакокрако-правоуглог $\triangle ABC$: $a = 1$. Тада је $P = \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}$. Из услова задатка је $P = P_1 + P_2 + P_3 = 5P_3$. Троуглови BGF и AED су једнакокрако-правоугли, па је $FG = FB$ и $ED = EA$, одакле је

(1) $$FG + FE + ED = c = \sqrt{2}.$$

Нека је $BF = a_1$ и $BG = c_1$. Тада је $P_1 = \frac{a_1^2}{2}$, а како је и $P_1 = \frac{2}{5}P$ то је $\frac{a_1^2}{2} = \frac{2}{5}\frac{a^2}{2}$, односно $a_1^2 = \frac{2}{5}$, тј. $a_1 = \frac{\sqrt{10}}{5}$ и $c_1 = BG = a_1\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. Сада је

(2) $$GC = BC - BG = 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}.$$

Слично, из $\triangle ADE$ је $P_3 = \frac{a_2^2}{2}$ и $P_3 = \frac{1}{5}P$ (при чему $a_2 = ED$), па је $a_2^2 = \frac{1}{5}$, односно $a_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, а $c_2 = AD = a_2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}$, одакле је

(3) $$CD = AC - AD = 1 - \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{5 - \sqrt{10}}{5}.$$

Коначно, сабирањем (1), (2) и (3) добијамо обим петоугла $CDEFG$:

$$O = FG + FE + ED + GC + CD = \sqrt{2} + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{5} + \frac{5 - \sqrt{10}}{5}$$
$$= \frac{10 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}}{5}.$$

621. Из једнакости $m^2 + n^2 = 2004(a+b)$ следи да је број $m^2 + n^2$ дељив са 3, што је могуће једино ако су m и n дељиви са 3 (с обзиром да квадрат целог броја при дељењу са 3 може дати само остатке 0 или 1). Међутим, тада су бројеви m^2 и n^2 дељиви са 9, па из претходне једнакости закључујемо да је број $a+b$ дељив са 3. Како је и број $a-b$ дељив са 3, што следи из једнакости $n^2 - m^2 = 2002(a-b)$, то су бројеви a и b дељиви са 3.

622. У почетку играч B брише бројеве дељиве са 3 све док их има. Кад на табли остану само бројеви који нису дељиви са 3 (што ће се десити најкасније после 333. потеза играча B), он наставља да брише бројеве произвољно. Кад на табли остану три броја, на потезу је играч B. Међу та три броја постоје бар два која дају исти остатак при дељењу са 3. Та два броја ће играч B и оставити, а избрисати онај трећи. Тиме постиже победу.

623. Са S_{XYZ} означавамо површину троугла XYZ. Треба доказати да је

$$S_{PAB} + S_{PCD} + S_{PEF} = S_{PBC} + S_{PDE} + S_{PFA}.$$

Сваки од шест троуглова има по једну страницу једнаку страници шестоугла. Означимо дужину те странице са a.
Нека су $h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6$ редом висине из темена P троуглова PAB, PBC, PCD, PDE, PEF, PFA. Тада је

$$S_{PAB} + S_{PCD} + S_{PEF} = \frac{ah_1}{2} + \frac{ah_3}{2} + \frac{ah_5}{2} = \frac{a}{2}(h_1 + h_3 + h_5),$$

$$S_{PBC} + S_{PDE} + S_{PFA} = \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_4}{2} + \frac{ah_6}{2} = \frac{a}{2}(h_2 + h_4 + h_6).$$

Посматрајмо троугао T_1 чија су темена пресеци правих: $AB \cap CD$, $CD \cap EF$, $EF \cap AB$ и троугао T_2 чија су темена у пресецима правих: $BC \cap DE$, $DE \cap FA$, $FA \cap BC$. Троуглови T_1 и T_2 су једнакостранични и подударни. Нека је њихова висина h. Како је $h_1 + h_3 + h_5 = h$ и $h_2 + h_4 + h_6 = h$, следи тврђење.

624. a, b, c су дужине страница неког троугла ако и само ако постоје реални бројеви $x, y, z > 0$ такви да је $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$. Тада је

$$x = \frac{b + c - a}{2} > 0, \quad y = \frac{c + a - b}{2} > 0, \quad z = \frac{a + b - c}{2} > 0,$$

па је дата неједнакост еквивалентна неједнакости:

$$2y \cdot 2x \cdot 2z \leqslant (y + z)(z + x)(x + y),$$

која је тачна јер је на основу неједнакости између аритметичке и геометријске средине два позитивна броја

$$\frac{y+z}{2} \geqslant \sqrt{yz}, \quad \frac{z+x}{2} \geqslant \sqrt{zx}, \quad \frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy},$$

односно

$$(y + z)(z + x)(x + y) \geqslant 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \cdot 2\sqrt{xy} = 8xyz\,.$$

Напомена. Дата неједнакост важи за произвољне ненегативне бројеве a, b и c (не морају бити мерни бројеви страница троугла), али је доказ нешто тежи.

625. Нека тачке B и M припадају једном, а тачке N и C другом краку датог угла. Како су углови MBP и MAP прави, тачке B, P, A и M припадају истој кружници, па су углови ABP и PMA једнаки као периферијски углови над тетивом AP. Слично, тачке P, C, N и A припадају истој кружници, а углови PAC и PNC су једнаки као углови над тетивом PC. Међутим, угао PMN је једнак углу PNC (први је периферијски угао над тетивом PN уписане кружнице, а други је угао између те тетиве и тангенте NC), па је $\measuredangle ABP = \measuredangle CAP$.
На исти начин се доказује да је $\measuredangle PCA = \measuredangle BAP$. Према томе, троуглови BPA и APC су слични. Из једнакости $PA : PC = PB : PA$ следи да је $PA^2 = PC \cdot PB$.

626. Како је дијагонала коцке DB_1 пресечна права равни γ и β између којих се тражи угао, то треба уочити неку раван α која је нормална на DB_1 и пресек те равни α са равнима γ и β одредиће тражени угао. Нека је раван α одређена тачкама A, C, D_1 јер је тада очевидно DB_1 нормално на α. Ако су S и T редом средишта дужи AC и CD_1, тада је очевидно да су AT и D_1S пресеци равни α са равнима γ и β. Међутим, AT и D_1S су висине једнакостраничног троугла ACD_1, па је тражени угао $60°$.

627. Из $x + 7y = (x + y) + 6y$ закључујемо да једно од тврђења (c) или (d) лажно. Дакле, тврђења (a) и (b) су истинита. Из (b) добијамо $x + y = 3y + 5$. Десна страна ове једнакости није дељива са 3 па 3 није делилац од $x + y$, тј. тврђење (c) је лажно.
Из (a) добијамо $x + 1 = ky$ $(k \in \mathbf{N})$. Уколико ову једнакост уврстимо у (b), добијамо $ky = 2y + 6$, одакле је $y = \dfrac{6}{k-2}$.
Будући да је $y \in \mathbf{N}$, $k - 2 \in \{1, 2, 3, 6\}$. Тада је $y \in \{6, 3, 2, 1\}$. Из $x = 2y + 5$ и $y \in \{6, 3, 2, 1\}$ добијамо $x \in \{17, 11, 9, 7\}$. Даље је

$$(x, y) \in \{(17, 6), (11, 3), (9, 2), (7, 1)\}\,.$$

Од наведених парова тврђење (d) задовољавају $(17, 6)$ и $(9, 2)$.

628. Дужина траке може бити највише 2003. Поделимо правоугаоник на траке 1×2003. Прву оставимо целу, другу поделимо на два дела дужина 1 и 2002, трећу на два дела

дужина 2 и 2001 итд. Тако можемо да идемо до 1002. траке коју делимо на делове дужине 1001 и 1002. Дакле, правоугаоник $1002 \cdot 2003$ можемо поделити на траке различитих дужина, при чему су заступљене све дужине од 1 до 2003. Очигледно је да се за $n < 1002$ правоугаоник може поделити на тражени начин, изостављањем неких трака.
Како је $1 + 2 + \cdots + 2003 = 1002 \cdot 2003$, максимална површина правоугаоника који се може покрити тракама неједнаке дужине не може бити већа од $1002 \cdot 2003$. Како је дужина правоугаоника једнака 2003, максимална ширина n не може бити већа од 1002, јер би неке траке биле употребљене више пута. Одговор: $n \leqslant 1002$.

629. Изаберимо било којих 5 од 11 датих бројева. Међу њима можемо изабрати три броја тако да је њихов збир дељив са три (или имамо три броја са истим остатком или три броја са различитим остацима). Настављајући овај поступак, од датих 11 бројева можемо изабрати три групе по три броја тако да је у свакој групи збир бројева дељив са три. Сада од те три групе постоје две у којима је збир бројева исте парности, па је збир тих 6 бројева дељив са 6.

630. Очигледно је да је пресек дате равни и коцке $ABCDA_1B_1C_1D_1$ петоугао симетричан у односу на праву која садржи теме D_1 и нормална је на NP. Нека су $A' \in AA_1$ и $C' \in CC_1$ тачке пресека те равни и одговарајућих ивица коцке, тј. A' и C' су два преостала темена петоугла $D_1A'NPC'$. Јасно је да је $AA' = CC'$ и $A'C' = AC = a\sqrt{2}$, а није тешко доказати да је $AA' = \dfrac{a}{3}$. Ако подножје нормале из D_1 на NP означимо са M, а пресек D_1M и $A'C'$ са Q, тада је $D_1M = \dfrac{a\sqrt{34}}{4}$ и $D_1Q = a\sqrt{\dfrac{17}{18}}$. Коначно,

$$P_{D_1A'NPC'} = P_{D_1A'C'} + P_{A'NPC'} = a\sqrt{\frac{17}{18}} \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{17}}{6} = \frac{7a^2\sqrt{17}}{24}\,.$$

631. Како површина тог дванаестоугла не зависи од распореда његових страница (она се састоји од 6 троуглова типа $R, R, \sqrt{3}$ и 6 троуглова типа $R, R, 4$, где је R полупречник описаног круга), претпоставимо да је он такав да му две суседне странице нису једнаке. Очигледно је да су тада сви троуглови $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, ..., $A_{11}A_{12}A_1$ међусобно подударни и да су сви углови тог дванаестоугла међусобно једнаки (по $150°$). Ако продужимо страницу A_2A_3 троугла $A_1A_2A_3$ преко темена A_2 и на њу спустимо нормалу из A_1, добијамо правоугли троугао са оштрим угловима од $60°$ и $30°$. Сада лако налазимо $A_1A_3 = R = \sqrt{31}$, $P_{A_1A_2A_3} = \sqrt{3}$ и

$$P_{A_1A_2\ldots A_{12}} = 6\Big(\sqrt{3} + \frac{31\sqrt{3}}{4}\Big) = \frac{105\sqrt{3}}{2}\,.$$

632. Множењем конгруенција $2 \equiv 2 \pmod{2003}$, $4 \equiv 4 \pmod{2003}$, ..., $1000 \equiv 1000 \pmod{2003}$, $1002 \equiv -1001 \pmod{2003}$, ..., $2000 \equiv -3 \pmod{2003}$, $2002 \equiv -1 \pmod{2003}$ добија се

$$A \equiv (-1)^{501} 1001! \equiv -1001! \pmod{2003}.$$

Слично, множењем конгруенција $1 \equiv 1 \pmod{2003}$, $3 \equiv 3 \pmod{2003}$, ..., $1001 \equiv 1001 \pmod{2003}$, $1003 \equiv -1000 \pmod{2003}$, ..., $1999 \equiv -4 \pmod{2003}$, $2001 \equiv -2 \pmod{2003}$ добија се

$$B \equiv (-1)^{500} 1001! \equiv 1001! \pmod{2003}.$$

Сабирањем следи $A + B \equiv 0 \pmod{2003}$, што је и требало доказати.

633.

$$A+2B+4=\underbrace{444\ldots44}_{2n}+2\cdot\underbrace{888\ldots88}_{n}+4=4\cdot\underbrace{111\ldots11}_{2n}+2\cdot8\cdot\underbrace{111\ldots11}_{n}+4$$
$$=4\cdot\frac{1}{9}\cdot\underbrace{999\ldots99}_{2n}+2\cdot8\cdot\frac{1}{9}\cdot\underbrace{999\ldots99}_{n}+4$$
$$=4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}+16\cdot\frac{10^n-1}{9}+4=\frac{4}{9}\cdot(10^{2n}-1+4\cdot10^n-4+9)$$
$$=\left(\frac{2(10^n+2)}{3}\right)^2=\underbrace{66\ldots6}_{n-1}8^2.$$

634. Приметимо најпре да $n=4$ задовољава услове (лако се проверава да су услови задовољени ако 4 тачке формирају неконвексан четвороугао).
Ако скуп од $n\geqslant 5$ тачака садржи 4 које формирају конвексан четвороугао, тада тачке можемо означити тако да у посматраној изломљеној линији буду обе дијагонале које се морају сећи. Дакле тада тражени услови нису задовољени.
Остаје још да покажемо да међу било којих 5 тачака у равни можемо изабрати 4 тако да оне формирају конвексан четвороугао. Посматрајмо конвексан омотач скупа од 5 тачака. Случај када то није троугао очигледно не задовољава услове задатка. У случају када је конвексни омотач троугао, унутар њега се налазе још две тачке. Повуцимо праву кроз те две тачке. Та права дели троугао на два дела. Са једне стране те праве морају се наћи два темена троугла, која ће са две унутрашње тачке формирати конвексан четвороугао. Дакле, $n=4$.

635. (a) Нека је S центар уписаног круга троугла ABC. Тада се дужи AD, BE и CF секу у тачки S. Нека је $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$ и $\angle ACB=\gamma$. По условима задатка тада је: $\angle ADE=\angle ABE=\frac{\beta}{2}$, $\angle ADF=\angle ACF=\frac{\gamma}{2}$, па је

$$\angle MDN=\angle ADE+\angle ADF=\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}.$$

Даље је

$$\angle CHE=180^\circ-(\angle ECH+\angle CEH)=180^\circ-(\angle EBA+\angle CAD)$$
$$=180^\circ-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)=90^\circ+\frac{\gamma}{2}.$$

Сада је $\angle CHG=180^\circ-\angle CHE=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$. Из $\triangle CHG$ је

$$\angle HGC=180^\circ-(\angle CHG+\angle HCG)=90^\circ-\frac{\gamma}{2},$$

па је троугао CHG једнакокрак. Како код једнакокраког троугла симетрала угла при врху полови основицу, то је тачка M у пресеку дужи CF и ED и $\angle CMD=\angle SMD=90^\circ$. Аналогно и тачка N је у пресеку дужи DF и BE и $\angle DNB=\angle SND=90^\circ$. Пошто је $\angle SMD+\angle SND=90^\circ+90^\circ=180^\circ$, четвороугао $SMDN$ је тетиван, па је

$$\angle SMN=\angle SDN=\frac{\gamma}{2}=\angle SCB \quad \text{и} \quad \angle SNM=\angle SDM=\frac{\beta}{2}=\angle SBC$$

одакле следи да је $MN\parallel BC$. Сада лако рачунамо тражене углове:

$$\angle NMD=\angle IGD=\angle GCD+\angle GDC$$
$$=\angle BCD+\angle EDC=\angle BAD+\angle EBC=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$$

и

$$\angle MND=\angle GID=\angle IBD+\angle IDB$$
$$=\angle CBD+\angle FDB=\angle CAD+\angle FCB=\frac{\alpha}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ-\frac{\beta}{2}.$$

(б) Аналогно доказу да је $MN\parallel BC$ може се показати да је $PN\parallel AB$ и $PM\parallel AC$. Онда је $\angle MPN=\angle CAB=\alpha$. Како је $\triangle MND$ оштроугли, то се тачка O налази унутар $\triangle MDN$, па је $\angle MON=2\cdot\angle MDN=\beta+\gamma$ (однос централног и периферијског угла у кругу описаном око троугла MDN). У четвороуглу $MPNO$ збир наспрамних углова је

$$\angle MPN+\angle MON=\alpha+\beta+\gamma=180^\circ,$$

па је он тетиван, тј. тачке O, P, M и N припадају истој кружници.

636. Због $y\leqslant\frac{1+y^2}{2}$ важи

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}\geqslant\frac{1+x^2}{1+z^2+\frac{1+y^2}{2}}$$

и остале две аналогне неједнакости.
Уводећи смену $a=1+x^2$, $b=1+y^2$, $c=1+z^2$, довољно је показати да важи неједнакост

(1)
$$\frac{a}{2c+b}+\frac{b}{2a+c}+\frac{c}{2b+a}\geqslant 1$$

за све $a,b,c>0$.
Означимо $A=2c+b$, $B=2a+c$, $C=2b+a$. Онда је

$$a=\frac{C+4B-2A}{9},\quad b=\frac{A+4C-2B}{9},\quad c=\frac{B+4A-2C}{9},$$

па неједнакост (1) можемо написати у облику

$$\frac{C+4B-2A}{A}+\frac{A+4C-2B}{B}+\frac{B+4A-2C}{C}\geqslant 9,$$

односно

$$\frac{C}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{C}+4\left(\frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}\right)\geqslant 15.$$

Како је $A,B,C>0$, последња неједнакост је задовољена јер из неједнакости између аритметичке и геометријске средине следи

$$\frac{C}{A}+\frac{A}{B}+\frac{B}{C}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{C}{A}\cdot\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{C}}=3 \quad \text{и слично} \quad \frac{B}{A}+\frac{C}{B}+\frac{A}{C}\geqslant 3.$$

Напомена. Неједнакост (1) се може доказати и применом Коши-Шварцове неједнакости:

$$\frac{a}{2c+b}+\frac{b}{2a+c}+\frac{c}{2b+a}=\frac{a^2}{2ac+ab}+\frac{b^2}{2ab+bc}+\frac{c^2}{2bc+ac}$$
$$\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\geqslant 1.$$

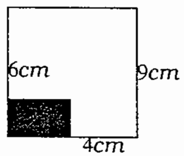
Последња неједнакост се непосредно своди на $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

2004. година

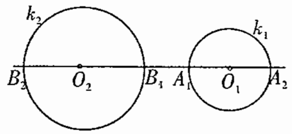
637. Највећи тражени петоцифрени број је 98765, а најмањи тражени шестоцифрени број је 102345. Њихов збир је 201110.

638. Ако са x означимо умањеник, наш задатак се своди на решавање једначине $x - 2004 = 5 \cdot 2004$. Према томе $x = 12024$.

639. Ако је површина добијеног квадрата $81\,\text{cm}^2$, онда је његова страница $9\,\text{cm}$. Одавде израчунавамо да су странице почетног правоугаоника $5\,\text{cm}$ и $3\,\text{cm}$. Обим тог правоугаоника је $O = 2 \cdot (5+3) = 16\,\text{cm}$.



Сл. уз задатак 639



Сл. уз задатак 642

640. Са 219 цифара, Марија је откуцала 9 једноцифрених бројева, 90 двоцифрених бројева и 10 троцифрених бројева. При том је откуцала $1 + 19 + 11 = 31$ пут цифру 1.

641. „Ширина“ стаклених делова је $80-15 = 65\,\text{cm}$, а „висина“ $100-15 = 85\,\text{cm}$. Према томе укупна површина стаклених делова је $65 \cdot 85 = 5525$.

642. (а) $A_1B_1 = 1\,\text{cm}$ (б) $A_2B_2 = 11\,\text{cm}$ (в. слику).

643. Двоцифрени бројеви који имају остатак 10 при дељењу са 21 су: 10, 31, 52, 73 и 94.

644. Ако је један од тих комплементних углова x, други је $x + 2004'$. Како је $2004' = 33°24'$, то је $2x + 33°24' = 90°$. Одавде је $x = 28°18'$, а тражени угао је $61°42'$.

645. Како је $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то ће цифре четвороцифрених бројева чији је производ цифара 105 бити: 1, 3, 5 и 7. Тражени бројеви су: 1357, 1375, 1537, 1573, 1735 и 1753.

646. Како је $X \cap \{a,c,d\} = \{a,d\}$, закључујемо да $a \in X$, $d \in X$ и $c \notin X$. Према томе, због $X \subset \{a,b,c,d,e\}$ скуп X може бити $X = \{a,d\}$ или $X = \{a,d,b\}$ или $X = \{a,d,e\}$ или $X = \{a,b,d,e\}$.

647. Јасно је да се ради о бројевима $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$.

648. Ако са O обележимо пресек тих симетрала, а са D пресек симетрале $\angle ABC$ и странице AC, видимо да треба одредити $\angle AOD$. Како је то спољашњи угао троугла ABO то је $\angle AOD = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$. Није тешко видети да је $\angle AOD = 59°42'$.

649. Очигледно важи $-7(-2-3x) > -\frac{49}{7}$, тј. $7(2+3x) > -7$. Даљим сређивањем добијамо $x > -1$.

650. Одмах видимо да је $-7 \leqslant x + 5 \leqslant 7$, тј. $-12 \leqslant x \leqslant 2$. Према томе целобројна решења су $-12, -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$, а њихов збир је -75.

651. Очигледно је $\alpha = 80°$, $\beta = 60°$ и $\gamma = 40°$. Сада можемо приметити да је $\triangle ADC$ једнакокрак, тј. $AD = CD$. У троуглу ABD је $AD > BD$ јер се наспрам већег угла налази већа страница. Значи, $CD > BD$, јер је $CD = AC$.

652. Лако се добија да је висина једног троугла $h_1 = 15\,\text{cm}$, а другог $h_2 = 48\,\text{cm}$. Површина делтоида је $P = \frac{d_1 d_2}{2}$, тј. $P = \frac{40 \cdot 63}{2} = 1260\,\text{cm}^2$.

653. Није, јер бесконачни децимални запис овог броја није периодичан.

654. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 3$ ако је $6 + \sqrt{6+\sqrt{6}} < 9$, тј. $\sqrt{6+\sqrt{6}} < 3$. Међутим, $\sqrt{6+\sqrt{6}} < 3$ ако је $6 + \sqrt{6} < 9$, тј. $\sqrt{6} < 3$, што је очигледно тачно.

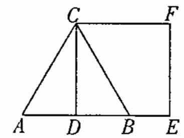
655. $a = \frac{3\sqrt{501}}{\sqrt{2004}} + \frac{\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}} - \frac{3\sqrt{2004}}{\sqrt{2004}} = \frac{3\sqrt{501}}{2\sqrt{501}} + 1 - 3 = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$.

656. Како је $P_K = \sqrt{3} \cdot P_T$, тј. $P = \sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (a – страница троугла), то је страница x траженог квадрата дата са $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Значи, страница траженог квадрата је једнака висини датог једнакостраничног троугла.

Према томе конструкција ће ићи на следећи начин.

(1) Конструишемо једну висину датог једнакостраничног троугла.

(2) Конструишемо квадрат чија је страница добијена висина датог једнакостраничног троугла.



Сл. уз задатак 656

657. Неједначина $\dfrac{2p - \frac{3}{4}}{1 - \frac{p}{2}} < 1$ се своди на $\frac{10p-7}{2-p} < 0$, односно

$$10p - 7 < 0,\ \ 2 - p > 0 \quad \text{или} \quad 10p - 7 > 0,\ \ 2 - p < 0.$$

Према томе, тражене вредности за p су $p < \frac{7}{10}$ и $p > 2$.

658. Како је пресек квадрат, то је $H = 2a = 8\,\text{cm}$. Према томе, $V = H \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 192\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.

659. Ако један број означимо са x, други број ће бити $135 - x$, па је тада

$$\frac{35}{100}x = \frac{28}{100}(135 - x).$$

Сада је $5x = 4(135 - x)$ односно $x = 60$. Тражени бројеви су 60 и 75.

660. $\sqrt{6+2\sqrt{5}} - \sqrt{6-2\sqrt{5}} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{5})^2} = 1 + \sqrt{5} - |1 - \sqrt{5}| = 1 + \sqrt{5} - \sqrt{5} + 1 = 2$.

661. Разликујемо два случаја:

1° катете су дужине $2\,\text{cm}$ и $\sqrt{5}\,\text{cm}$, па је дужина хипотенузе $3\,\text{cm}$. Тада је $R = \frac{3}{2}\,\text{cm}$, а површина круга $P = \frac{9}{4}\pi\,\text{cm}^2$;

2° $\sqrt{5}$ је дужина хипотенузе, па је тада $R = \frac{\sqrt{5}}{2}\,\text{cm}$, а $P = \frac{5}{4}\pi\,\text{cm}^2$.

662. $4008 - 2004 : 6 + 6 \cdot 2004 = 4008 - 334 + 12024 = 3674 + 12024 = 15698$.

663. $O = 8 + 12 + 12 + 4 + 8 + 4 + 4 + 4 = 56$, $P = 8 \cdot 12 = 96$.

664. Укупно време свих играча на леду у том мечу је $6 \cdot 30 = 180$ минута. Ако је сваки од 15 играча провео исто време на леду, онда је сваки од играча био у игри $180 : 15 = 12$ минута.

665. Ако је поље шаховске табле (квадрат) странице a, тада је обим правоугаоника $O = 2 \cdot (64a + a)$. То значи да је $130a = 260$, односно да је $a = 2\,\text{cm}$. Сада је површина шаховске табле $P = 64 \cdot a \cdot a = 256\,\text{cm}^2$.

666. Најмањи „занимљив" број је 123456789, а највећи је 9876543210. Њихов збир је 9 999 999 999.

667. Значи, за $n \in \mathbf{N}$, важи $\frac{2}{5} < \frac{8}{n} < \frac{4}{5}$. Ово је исто што и

$$\frac{2 \cdot n}{5 \cdot n} < \frac{40}{5 \cdot n} < \frac{4 \cdot n}{5 \cdot n},$$

односно $n < 20$ и $n > 10$. Према томе, $n \in \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$.

668. Очигледно је $\alpha + 60° = 148°$, тј. $\alpha = 88°$.

669. Очигледно је да ће било који четвороцифрен природан број чије су цифре 2, 3, 5 и 8 бити дељив са 3 јер је $2+3+5+8 = 18$. Да би тај број био дељив са 12, мораће његов двоцифрени завршетак да буде дељив са 4, тј. његов двоцифрени завршетак је облика 28, 32 или 52. Дакле, ти бројеви су 3528, 5328, 8532, 5832, 8352 и 3852. Има их 6.

670. Та два упоредна угла углу α су међусобно једнака и једнака су 4α. Како је $4\alpha + \alpha = 180$, то је $\alpha = 36°$. Мера комплементног угла углу α је $90° - 36° = 54°$.

671. Највећа могућа вредност разломка $\frac{3*5*}{36}$ је

$$\frac{3959}{36} < \frac{3600+360}{36} = 110.$$

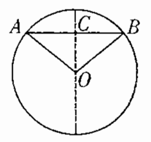
Најмања могућа вредност разломка $\frac{5*3*}{45}$ је

$$\frac{5030}{45} > \frac{4500+450}{45} = 110.$$

Према томе је $\frac{3*5*}{36} < 110 < \frac{5*3*}{45}$.

672. Ова неједначина се своди на $|x| > 3{,}25$, а њена решења су $x > 3{,}25$ и $x < -3{,}25$.

673. (i) Ако $O \in AB$, тада је $C \equiv O$ и одмах $AC = BC$.
(ii) Ако $O \notin AB$, уочимо тачку $C \in AB$ такву да је $OC \perp AB$, слика. Ако сада уочимо $\triangle ACO$ и $\triangle BCO$, лако је видети да су они подударни ($OA = OB$, $OC = OC$ и $\angle OCA = \angle OCB = 90°$). Према томе, $AC = CB$.



Сл. уз задатак 673

−10	11	−7
1	−2	−5
3	−15	6

Сл. уз задатак 676

674. Одмах се види да је К = 1, Њ = 0, А = 2, и Б = 9. Ако је О = 3 тада је Г = 5, а Ђ = 8 (или 6) и Л = 6 (или 8). Ако је О = 4 тада је Г = 6, а Ђ = 8 (или 7) и Л = 7 (или 8), или Ђ = 8 (или 5) и Л = 5 (или 8). Коначно ако је О = 5 тада је Г = 7, а Ђ = 8 (или 6) и Л = 6 (или 8).

Сва решења су: $821+9631 = 10452$, $621+9831 = 10452$, $821+9741 = 10562$, $721+9841 = 10562$, $821+9541 = 10362$, $521+9841 = 10362$, $821+9651 = 10472$ и $621+9851 = 10472$ (има их 8).

675. Одмах се може израчунати $\angle ACB = 75°$. Даље, $\angle AOS = 60°$ (као збир унутрашњих несуседних углова $\triangle AOC$). $\angle OAS$ као угао између симетрала спољашњег и унутрашњег угла $\triangle ABC$ је прав. И коначно $\angle ASO = 30°$.

676. Ако са x означимо вредност у средњем пољу прве врсте, тада одмах можемо добити да је у свакој врсти, колони и дијагонали збир тих бројева $x - 17$. Тада су у последњој врсти редом бројеви $x-8$, -15 и $x-5$. Сада је $x - 17 = x - 8 + x - 5 + (-15)$, тј. $x = 11$, односно $x - 17 = -6$. Решење је дато на слици.

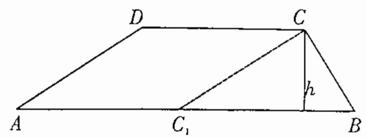
677.

$$\sqrt{(-4)^2} + (2^2)^2 \cdot \frac{5^{-8+2\cdot 7}}{\left(\sqrt{13+\sqrt{139+\sqrt{(-5)^2}}}\right)^3} = 4 + 16 \cdot \frac{5^6}{5^3} = 2004.$$

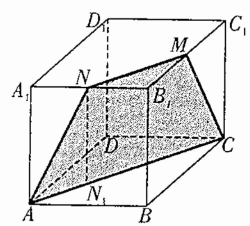
678. Осенчени део се састоји од четири правоугаоника и једног квадрата. Правоугаоници су дужине 2 cm и ширине $\sqrt{2}\,\text{cm}$. Према томе, површина осенченог дела је $P = (2^2 + 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}) = 4(1 + 2\sqrt{2})\,\text{cm}^2$.

679. Ако ставимо $x = 2{,}320042004\ldots$, тада је $10x = 23{,}20042004\ldots$, а $100000x = 232004{,}20042004\ldots$. Сада можемо да израчунамо да је $99990x = 231981$, па је коначно $x = \frac{77327}{33330}$.

680. Нека је дат трапез $ABCD$ тако да је $AB = 25\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, $CD = 15\,\text{cm}$ и $DA = 8\,\text{cm}$. Ако одредимо $C_1 \in AB$ тако да је $CC_1 \parallel AD$, тада ће $\triangle C_1BC$ имати странице дужине $C_1B = 10\,\text{cm}$, $BC = 6\,\text{cm}$, $CC_1 = 8\,\text{cm}$, па је то на основу обрнуте Питагорине теореме правоугли троугао. Сада је јасно да је $\frac{h \cdot 10}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2}$, тј. $h = 4{,}8\,\text{cm}$, односно $P = \frac{25+15}{2} \cdot 4{,}8 = 96\,\text{cm}^2$.



Сл. уз задатак 680



Сл. уз задатак 683

681. Како је $5 \cdot 3^{61} = 3 \cdot 5 \cdot (3^3)^{20} = 15 \cdot 27^{20}$ и $3 \cdot 5^{41} = 3 \cdot 5 \cdot (5^2)^{20} = 15 \cdot 25^{20}$, то је очигледно да је $5 \cdot 3^{61} = 15 \cdot 27^{20} > 15 \cdot 25^{20} = 3 \cdot 5^{41}$.

682. Дати разломак је облика $\frac{x}{x+2}$. Из услова задатка имамо да је $\frac{x-1}{x+2-1} = \frac{1}{2}$, а одавде је $x = 3$.

683. Очигледно је $ACMN$ трапез (MN средња линија троугла $A_1B_1C_1$ па је $MN \parallel A_1C_1$, тј. $MN \parallel AC$). Према томе $AC = 12\sqrt{2}\,\text{cm}$ и $MN = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$. Висина трапеза NN_1 је катета троугла AN_1N па је

$$NN_1 = \sqrt{10^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{82}.$$

Површина траженог пресека је

$$P=\frac{12\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{82}=9\cdot 2\sqrt{41}=18\sqrt{41}\,\mathrm{cm}^2.$$

684. Одмах се види да је $ab+ac+bc=\dfrac{abc}{2004}$. Дељењем са $abc>0$ добијамо

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2004}.$$

685. Очигледно је $AD=BD$ (јер је $\triangle ADE\cong\triangle BDC$), па је $\triangle ABD$ једнакокрак. Из тога следи да је $\angle EDA=\angle ADO=\angle ODB=\angle BDC=15^\circ$, па су троуглови ADE и ADO једнакокраки и подударни. Значи, $r=a$.

686. Важи

$$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Применом ове једнакости дати збир је једнак

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+(\sqrt{p+1}-\sqrt{p})=\sqrt{p+1}-1.$$

Сада имамо $\sqrt{p+1}-1=n$, $n\in\mathbf{N}$. Одавде је $p+1=(n+1)^2$, тј. $p=n^2+2n$. Ако то запишемо у облику $p=n(n+2)$ онда ће p бити прост број једино када је $n=1$, тј. $p=3$.

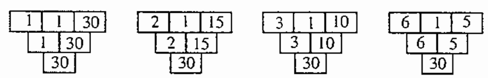
687. $O=2\cdot(12+8)+4\cdot 4=56\,\mathrm{cm}$; $P=8\cdot 12-4\cdot 4=80\,\mathrm{cm}^2$.

688. Ако је један од тих бројева трећина другог, онда је тај мањи број заправо четвртина збира. Значи један од тих бројева је 2004, а други 6012.

689. A може бити или 1 или 6, док је B свакако 9. Како је $1+11+911+911<2000$, то је очигледно $A=6$.

690. То су ABC, ACD, ABE, BEC, BEF, EFC, FCH, EGF, FGC, GCH.

691. Како је $30=1\cdot 30=2\cdot 15=3\cdot 10=6\cdot 5$ то су могућа ова четири решења:



Сл. уз задатак 691

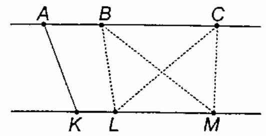
и слично с истим бројевима, а у другом распореду још одговарајућа четири решења.

692. Нека су α и β углови са паралелним крацима. Тада је $\alpha+\beta=180^\circ$, тј. $\alpha+\alpha+\frac{1}{2}\alpha=180^\circ$. Одавде је $\alpha=72^\circ$, а његов комплемент има 18°.

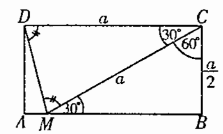
693. Тражени број је $16q+q=17q$, па се најмањи тражени број добија за $q=6$, тј. $17\cdot 6=102$. Највећи тражени број се добија за $q=15$, јер је 15 највећи остатак при дељењу са 16 – значи $17\cdot 15=255$.

694. Ако је прве године ученик порастао 3 cm, тада је четврте порастао 9 cm, а друге и треће најмање 4 cm, односно 5 cm. То је укупно 21 cm, што је немогуће јер је укупно порастао 17 cm. Ако је прве године порастао 1 cm, тада је четврте године порастао 3 cm па није могао да укупно порасте 17 cm. Значи ученик је порастао прве године 2 cm, а четврвте 6 cm. Да би укупно порастао 17 cm недостаје још 9 cm. Из услова задатка закључујемо да је друге године порастао 4 cm, а треће 5 cm.

695. Задатак се може решити пребројавањем на следећи начин: ако је AK једна страница четвороугла, за наспрамну постоје четири могућности: BL, BM, CL, CM; ако је AL једна страница четвороугла, за наспрамну постоје две могућности MB и MC; за BK такође две: CL и CM и коначно за BL једна – CM.



Сл. уз задатак 695



Сл. уз задатак 698

696. Двоцифрени бројеви који су дељиви са 16 су $16,32,48,64,80$ и 96. Ако броју 16 прецртамо цифру 6 добијамо 1, ако у броју 32 прецртамо цифру 3 добијамо 2, ако у броју 64 прецртамо цифру 6 добијамо 4 и коначно ако у броју 96 прецртамо цифру 9 добијамо 6.

697. Са стоваришта је однето прво $\frac{3}{8}\cdot 304\,\mathrm{t}=114\,\mathrm{t}$ робе, а затим још $\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}\cdot 304\,\mathrm{t}=152\,\mathrm{t}$ робе. На стоваришту је остало 38 t робе.

698. Троугао BCM је правоугли са оштрим угловима од 30° и 60°. Како је $\triangle DMC$ једнакокраки са углом при врху од 30°, то је $\angle CDM=75^\circ$.

699. Како је $2004=2\cdot 2\cdot 3\cdot 167$, то троцифрени имениоци тих тражених разломака могу бити само $4\cdot 167$ и $3\cdot 167$ (јер је $6\cdot 167=1002$). Према томе

$$\frac{17}{2004}=\frac{x}{4\cdot 167}+\frac{y}{3\cdot 167},\quad x,y\in\mathbf{N},$$

па је $17=3x+4y$. Како x мора бити непаран природан број и не може бити нити 1 нити већи или једнак 5, то је $x=3$. Сада видимо да је $y=2$.

700. Ако BB_1 продужимо преко B_1 до B_2 тако да је $BB_1=B_1B_2$, четвороугао $ABCB_2$ је паралелограм. Троугао ABB_2 је лако конструисати јер је $\angle BAB_2=120^\circ$, $AB=4\,\mathrm{cm}$ и $BB_2=10\,\mathrm{cm}$. Тачку C конструисати тако да је $ABCB_2$ паралелограм.

701. Из М : А = М · А одмах закључујемо да је $A=1$. Сада се наши услови своде на М = Т – Е = Т : И = К – 1. Како је И ≠ М, М ≠ 1, И ≠ 1 и Т : И = М то је Т сложен број и Т ∈ {6, 8}. Како је Т ≠ 6, јер би тада било И = 2, М = 3 и Е = 3 или И = 3, М = 2 и К = 3, то је Т = 8. Сада је М = 2, И = 4, К = 3 и Е = 6, јер за М = 4, И = 2 је Е = 4.

702. Ако ставимо да је $a+\dfrac{1}{a}=A$, тада је $a^2+\dfrac{1}{a^2}=A^2-2$, па је

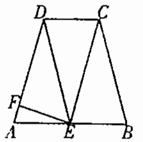
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=A^3-2A=a^3+\frac{1}{a^3}+a+\frac{1}{a}.$$

Значи, $a^3+\dfrac{1}{a^3}=A(A^2-3)$. Како је $a+\dfrac{1}{a}=A>2$, то је $A^2-3>1$, па је $a^3+\dfrac{1}{a^3}$ сложен број.

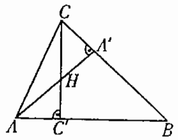
703. Троуглови AFE и BCF су подударни и једнакокраки са углом при врху од 48°. Значи $\angle EFA=\angle BFC=66^\circ$. Сада се лако израчунава $\angle EFC=168^\circ$.

704. $2^{2004}=2^4\cdot 2^{2000}>10\cdot(2^{10})^{200}=10\cdot 1024^{200}>10^{601}$. Дакле, број има бар 602 цифре, па с обзиром да имамо 10 различитих цифара бар једна мора да се јави 61 пут.

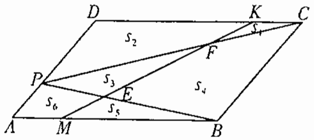
705. Ако уочимо тачку E на AB тако да је $AE = EB = DC$, тада добијамо два паралелограма $AECD$ и $EBCD$, па је $AD = EC = BC = ED = 5\,\text{cm}$. Сада се лако доказује да су троуглови AED, ECD и EBC једнакокраки и подударни (ССС). Углови тих троуглова су на основици по $75°$ и при врху $30°$, па је висина EF троугла AED једнака $\frac{5}{2}$. Површина овог трапеза је $P = 3\cdot\frac{5}{4}\cdot 5 = \frac{75}{4}\,\text{cm}^2$.



Сл. уз задатак 705



Сл. уз задатак 709



Сл. уз задатак 711

706. Троцифрених бројева са траженом особином има $5\cdot 9\cdot 9 = 405$, а четвороцифрених $9\cdot 9\cdot 9\cdot 9 = 6561$. Укупно 6966.

707. Одговарајуће апотеме су $h_1 = 3\sqrt{17}$ и $h_2 = 4\sqrt{10}$, па је површина овог тела, тј. најмања количина лима $P = 48(\sqrt{17}+\sqrt{10})\,\text{dm}^2$.

708. За сваки позитиван реалан број x важи $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. У случају да тражени бројеви a, b, c постоје важило би $\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right) < 6$, што је немогуће.

709. (а) Како су троуглови $AC'H$ и $CA'H$ слични, то ће важити $AH : CH = HC' : HA'$. Ако искористимо оно што је дато, биће $AH = HC'\sqrt{2}$. Из овога закључујемо да је $\measuredangle C'AH = \measuredangle HCA' = \measuredangle ABC = 45°$.
(б) Како је $BC' = CC' = 3HC'$ и $AC' = C'H$ то је $AB : CC' = 4C'H : 3C'H = 4:3$.

710. Ако са x означимо број ученика који уче енглески, тада је $20040 - x$ број ученика који уче немачки, па је $\frac{80}{100}(20040-x) + \frac{20}{100}x = \frac{40}{100}\cdot 20040$, одакле се добија $x = 13360$.

711. Ако са P означимо површину целог паралелограма, а површине троуглова и четвороуглова означимо као на слици, очигледно је $S_2+S_3+S_6 = S_5+S_4+S_1 = \frac{1}{2}P$ и $S_3+S_4 = \frac{1}{2}P$.
(а) $S_5+S_4+S_1 = S_3+S_4$, тј. $S_5+S_1 = S_3$, односно $P_{\Delta EPF} = P_{\Delta FKC} + P_{\Delta MBE}$.
(б) $S_2+S_3+S_6 = S_3+S_4$, тј. $S_4 = S_2+S_6$, односно $P_{BCFE} = P_{AMEP} + P_{PFKD}$.

712. Ако са x обележимо број листова у једној свесци, тада је $\frac{x}{4}+\frac{x}{9} = 26$, тј. $x = 72$. Број листова ће се смањити за $\frac{26}{144} = 0{,}1806 \approx 18\%$.

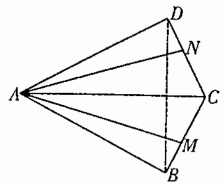
713. Како је $\triangle ABM \cong \triangle ADN$, јер је $\measuredangle ABM = \measuredangle ADN$, $\measuredangle BAM = \measuredangle DAN$ и $BM = DN$, то је онда $AB = AD$ (слика). Ово је довољно да се закључи да су правоугли троуглови ACD и ABC подударни и да су због тога углови CAD и CAB једнаки. Значи, AC је симетрала угла BAD и како је троугао BAD једнакокраки ($AB = AD$) то је $AC \perp BD$, што је и требало доказати.

714. Ако је $x = \overline{abc}$ где је $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, то је према услову задатка

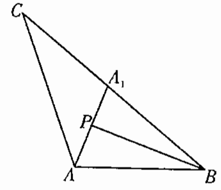
$$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 3\cdot\overline{aaa},$$

тј. $222(a+b+c) = 3\cdot 111\cdot a$. Одавде је $a = 2b + 2c$, па су могућа решења:

$$a = 6,\ b = 2,\ c = 1;\quad a = 6,\ b = 1,\ c = 2;$$
$$a = 8,\ b = 3,\ c = 1;\quad a = 8,\ b = 1,\ c = 3.$$



Сл. уз задатак 713



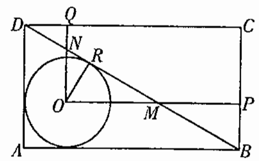
Сл. уз задатак 715

715. Како је $\measuredangle ABP = \measuredangle PBA_1$, $\measuredangle APB = \measuredangle BPA_1 = 90°$ и BP заједничка страница троуглова ABP и PBA_1, то је $\triangle ABP \cong \triangle PBA_1$, па је $AB = A_1B$, тј. $2AB = BC$. Сада закључујемо да су мерни бројеви дужина страница троугла ABC 1, 2 и 3 или 2, 3 и 4. Како је $1+2=3$, то је $AB = 2\,\text{cm}$, $BC = 4\,\text{cm}$ и $AC = 3\,\text{cm}$.

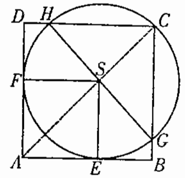
716. Не могу се добити сви једнаки бројеви, без обзира колико пута примењивали дозвољену операцију „увећавања два броја за по 1". То је немогуће, јер увећавањем два броја за по један од почетног збира $1 + 2 + \cdots + 221 + 222 = 111\cdot 223$ увек добијамо непаран број, а ако би у једном тренутку сви бројеви били једнаки њихов збир би био $222\cdot A$, тј. паран број.

717. $1\underbrace{00\ldots0}_{2004}2\underbrace{00\ldots0}_{2004}1 = 10^{4010} + 2\cdot 10^{2005} + 1 = \left(10^{2005}+1\right)^2 = \left(1\underbrace{00\ldots0}_{2004}1\right)^2$.
Тражени број је $1\underbrace{00\ldots0}_{2004}1$.

718. Нека је R тачка додира праве одређене са BD и кружне линије, а M и N тачке пресека BD са OP и OQ редом. Тада је $\triangle ORM \cong \triangle MBP$ ($PB = OR = r$, $\measuredangle ORM = \measuredangle MPB = 90°$ и $\measuredangle OMR = \measuredangle BMP$) и слично $\triangle ORN \cong \triangle NQD$. Значи, површина правоугаоника $OPCQ$ је једнака површини троугла BCD, а она је $1002\,\text{cm}^2$.



Сл. уз задатак 718



Сл. уз задатак 720

719. Број који је збир 7 узастопних природних бројева је дељив са 7 јер:

$$a + (a+1) + \cdots + (a+6) = 7a + \frac{6\cdot 7}{2} = 7(a+3).$$

Слично је и број који је једнак збиру 11, односно 13 узастопних природних бројева дељив са 11, односно 13. Дакле, тражимо број који је дељив са 7, 11 и 13, а да није непаран, јер би тада био збир два узастопна природна броја. Дакле, тражени број је $2\cdot 7\cdot 11\cdot 13 = 2002$.

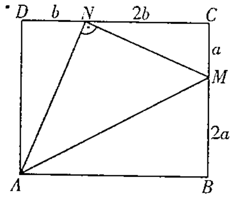
720. Нека је дат квадрат $ABCD$ и нека кружна линија додирује странице AB и AD у тачкама E и F редом. Ако је S центар кружне линије, онда је очигледно да је $AESF$ квадрат (две суседне странице су једнаке и сви углови прави), па је $AS = 10\sqrt{2}\,\text{cm}$.
С друге стране, ако кружна линија сече стране квадрата BC и CD редом у тачкама G и H, троугао HGC је правоугли и HG је пречник тако да C припада кружној линији. Како

је $\measuredangle BAC = \measuredangle EAS = 45°$, то тачке A, S и C припадају једној правој, па је дијагонала квадрата $AC = (10\sqrt{2}+10)$ cm, а површина $P = \frac{1}{2}\left(10(\sqrt{2}+1)\right)^2 = 50(3+2\sqrt{2})\ \mathrm{cm}^2$.

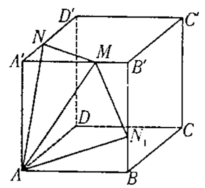
721. (а) Бранко и Ратко ће укупно уписати 2003 симбола (+ или ·), па како Бранко почиње игру, то ће он последњи уписати знак + или ·. Бранко увек побеђује, јер ће на крају уписати + ако је претходно добијени број (без последње јединице) био непаран или · ако је претходно добијени број био паран.
(б) Не. Увек побеђује први играч (при оптималној стратегији), јер он ставља последњи знак и тиме одређује парност, односно непарност целог броја.

722. Дато је да је Воја првог дана засадио једну садницу. Онда је другог дана засадио $1+1=2$, а трећег $2+2=4$ саднице. четвртог дана ја засадио $4+4=8$ садница, а петог 7 садница јер је $8+8=16$ и $1+6=7$. Шестог дана је засадио 5 садница, јер је $7+7=14$ и $1+4=5$. Седмог дана је засадио опет једну садницу (као првог дана) јер је $5+5=10$ и $1+0=1$. Сада је јасно да ће осмог дана засадити онолико садница колико је засадио другог дана итд. Према томе, за шест дана засади $1+2+4+8+7+5=27$ садница, а за 60 дана ће засадити свих 270 садница.

723. Према условима датим у задатку $\measuredangle ANM = 90°$, па су онда углови $\measuredangle AND$ и $\measuredangle MNC$ комплементни. Дакле, $\measuredangle AND = \measuredangle NMC$ па важи: $\triangle AND \sim \triangle NMC$. Значи: $CM : CN = ND : DA$, тј. $a : 2b = b : 3a$, тј. $3a^2 = 2b^2$, односно $a : b = \sqrt{2} : \sqrt{3}$. Сада је $BC : AB = 3a : 3b$, тј. $BC : AB = \sqrt{2} : \sqrt{3}$.



Сл. уз задатак 723



Сл. уз задатак 726

724. Нека је тај троцифрен број $\overline{xyz}$. Из услова задатка имамо:

$$\overline{xyz}+45=\overline{xzy}, \quad \text{тј.} \quad 100x+10y+z+45=100x+10z+y,$$

односно $y-z+5=0$; и

$$\overline{xyz}-270=\overline{yxz}, \quad \text{тј.} \quad 100x+10y+z-270=100y+10x+z,$$

односно $x-y-3=0$. Да видимо шта се дешава са разликом

$$\overline{xyz}-\overline{zyx}=100x+10y+z-100z-10y-x=99(x-z).$$

Треба нам разлика $x-z$. Како је $x-z=(x-y)-(z-y)=3-5=-2$, то закључујемо да је $\overline{xyz}-\overline{zyx}=-198$, тј. да се заменом цифара стотина и јединица тај број повећава за 198.

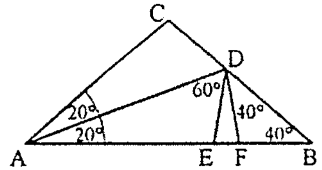
725. Нека је A тражени број и B збир цифара броја A. Како се зна да A и B имају исти остатак при дељењу са 9, тј. да је $A-B$ дељив са 9, то је због $A-B=2004B-B=2003B$ и чињенице да је 2003 прост број, B дељиво са 9. Према томе, број A је најмањи од бројева облика $(9k)\cdot 2004$ чији је збир цифара $9k$.
За $k=1$ имамо $9\cdot 2004=18036$ и $1+8+3+6=18>9$, а за $k=2$ имамо $18\cdot 2004=36072$ и $3+6+0+7+2=18$. Дакле, тражени број је $A=36072$.

726. Ако уочимо на ивици BB' тачку N_1 тако да је $BN_1 = A'N$ (слика), онда ће важити $\triangle ABN_1 \cong \triangle AA'N$ (јер је $AB = AA'$, $A'N = BN_1$, $\measuredangle AA'N = \measuredangle ABN_1 = 90°$), па је $AN_1 = AN$ и $\triangle A'NM \cong \triangle MN_1B'$ (јер је $\measuredangle NA'M = \measuredangle MB'N_1 = 90°$, $B'M = A'N$ и $B'N_1 = A'M$) па је $MN_1 = MN$.
Сада је очигледно да је $\triangle AMN \cong \triangle AMN_1$ (ССС) па важи

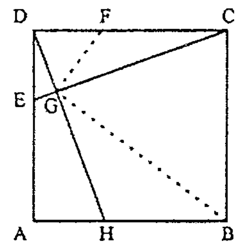
$$\measuredangle A'AM + \measuredangle A'AN + \measuredangle MAN = \measuredangle A'AM + \measuredangle BAN_1 + \measuredangle N_1AM = 90°.$$

727. Тражени број не може бити облика pq, где су p и q прости бројеви, јер би тада имао укупно 4 делиоца. Такође, не може бити ни облика p^2q, јер би тада имао 6 делилаца. Повећањем степена са којим неки прост фактор учествује у разлагању датог броја, а такође повећањем броја његових простих фактора, укупан број делилаца се даље повећава. Према томе, тражени број мора бити облика p^n. Како тада он има $n+1$ делилац, то мора бити $n=4$. Једини прост број чији је четврти степен троцифрен је број 5. Дакле, постоји само један број који задовољава услове задатка, а то је 625.

728. На страници AB уочимо тачке E и F такве да је $\measuredangle ADE = 60°$ и $\measuredangle BDF = 40°$ (слика). Тада је $\triangle ADC \cong \triangle ADE$ (заједничка страница AD и на њој једнаки налегли углови од 20° и 60°). Следи да су троуглови ADF, EFD и FBD једнакокраки са основицама (редом) DF, EF и BD. Због тога је $AF = AD$ и $CD = ED = FD = FB$, па је $AD + DC = AF + FB = AB$.



Сл. уз задатак 728



Сл. уз задатак 729

729. Из подударности троуглова DAH и CDE и услова $ED = DF$ следи да је $AH = DE = DF$ (слика), па је $HBCF$ правоугаоник. Дијагонала BF тог правоугаоника је пречник његове описане кружнице. Како је $\measuredangle HGC = 90°$, то тачка G припада тој кружници, па је и $\measuredangle BGF = 90°$.

730. Обележимо тражену дуж AM са x (слика). Тада је у троуглу APM, $AP = \frac{x}{2}$, па је $PB = 12 - \frac{x}{2}$. Из троугла PBQ је $BQ = \frac{1}{2}\left(12-\frac{x}{2}\right) = 6 - \frac{x}{4}$, па је $QC = 12 - \left(6-\frac{x}{4}\right) = 6 + \frac{x}{4}$. Из троугла QCR је $RC = 3 + \frac{x}{8}$. Из услова $M = R$ следи $AM + MC = 12$, односно $x + 3 + \frac{x}{8} = 12$, одакле се налази $x = 8$ cm.

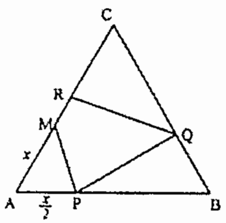
731. Нека су дати природни бројеви a, b, c, d и e, и нека је

$$a+b=x_1,\quad a+c=x_2,\quad a+d=x_3,\quad a+e=x_4,\quad b+c=x_5,$$
$$b+d=x_6,\quad b+e=x_7,\quad c+d=x_8,\quad c+e=x_9,\quad d+e=x_{10}.$$

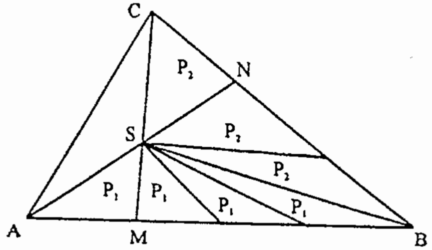
Нека је n најмањи од добијених збирова $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ и претпоставимо да су они 10 узастопних природних бројева. Сабирањем претходних једнакости се добија

$$4(a+b+c+d+e) = x_1+x_2+\cdots+x_{10} = n+(n+1)+\cdots+(n+9) = 10n+45.$$

Како је лева страна једнакости паран, а десна непаран број, то значи да добијени збирови не могу бити 10 узастопних природних бројева.



Сл. уз задатак 730



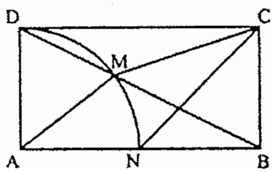
Сл. уз задатак 732

732. Нека је $P_{\triangle AMS} = P_1$ и $P_{\triangle CNS} = P_2$ (слика). Тада је $P_{\triangle ABN} = 4P_1 + 2P_3 = \frac{2}{3} \cdot 2004$, $2P_1 + P_2 = 668$. Слично је $P_{\triangle BCM} = 3P_1 + 3P_2 = \frac{3}{4} \cdot 2004$, па је $P_1 + P_2 = 501$. Сабирањем добијених једнакости следи да је $P_{MBNS} = 3P_1 + 2P_2 = 501 + 668 = 1169$.

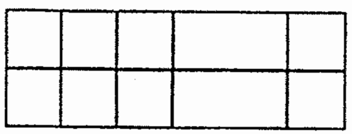
733. Како је $abc = 1$, то је

$$\begin{aligned}\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(c+\frac{1}{c}\right) &= abc + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} + \frac{1}{abc}\\ &= 2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + a^2 + b^2 + c^2\\ &= \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(b^2 + 2 + \frac{1}{b^2}\right) + \left(c^2 + 2 + \frac{1}{c^2}\right) - 4\\ &= \left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 - 4.\end{aligned}$$

734. Нека је констатовано да има k препуних и l осталих аутобуса; нека је у препуним аутобусима x, а у осталим y путника. Тада је $x > 50k$, $y \leqslant 50l$. Ако је $k = 0$ или $l = 0$, проценти поменути у формулацији задатка су међусобно једнаки (и једнаки 0, односно 100). У противном је $\frac{x}{k} > 50 \geqslant \frac{y}{l}$, одакле је $\frac{y}{x} < \frac{l}{k}$. Даље је $\frac{x+y}{x} < \frac{k+l}{k}$, односно $\frac{x}{x+y} > \frac{k}{k+l}$. Дакле, проценат путника у препуним аутобусима (број који је добио Раде) је већи од процента препуних аутобуса (броја који је добио Воја).



Сл. уз задатак 735



Сл. уз задатак 736

735. Нека је $\measuredangle DAM = x$ (слика). Тада је из једнакокраког троугла AMD, $\measuredangle AMD = 90° - \frac{x}{2}$, а из, такође једнакокраког, троугла ANM је $\measuredangle MAN = 90° - x$ и $\measuredangle AMN =$

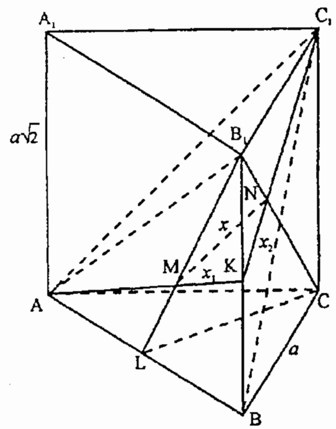
$45° + \frac{x}{2}$. Са обзиром да је $\measuredangle DMA + \measuredangle AMN + \measuredangle NMB = 180°$, следи да је $\measuredangle NMB = 180° - \left(90° - \frac{x}{2}\right) - \left(45° + \frac{x}{2}\right) = 45°$. С друге стране, $\triangle NBC$ је једнакокраки и правоугли, па је $\measuredangle NCB = 45°$. Дакле, $\measuredangle NMB = \measuredangle NCB$, па је четвороугао $NBCM$ тетивни. Зато је $\measuredangle BMC = \measuredangle BNC = 45°$.

736. Из услова задатка следи да у једној колони може бити изабран само један квадрат. Како треба изабрати 2004 квадрата, то значи да треба изабрати 2004 колоне од могућих 2005, односно једну колону треба изоставити. Ако се изостави прва колона, онда постоје две могућности за избор квадрата из друге колоне, а тиме је одређен избор свих осталих. Још две могућности постоје ако се изостави последња колона. Међутим, ако се изостави једна од 2003 преостале колоне (између прве и последње), онда се квадрати у суседним колонама могу независно бирати, у свакој на по два начина. У том случају има 4 могућности. Према томе, укупно има $2 + 2 + 2003 \cdot 4 = 8016$ могућности.

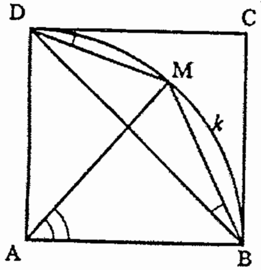
737. Нека су дате тачке $A_1, A_2, \ldots, A_{2004}$ и нека из њих полази, редом, $n_1, n_2, \ldots, n_{2004}$ дужи. Јасно је да бројеви $n_1, n_2, \ldots, n_{2004}$ могу узимати вредности из скупа $\{0, 1, 2, \ldots, 2003\}$. Разликујемо два случаја.

а) Ако не постоји тачка из које полази 0 дужи, онда бројеви $n_1, n_2, \ldots, n_{2004}$ припадају скупу $\{1, 2, \ldots, 2003\}$, па на основу Дирихлеовог принципа постоје два од њих који су међусобно једнаки.

б) Ако постоји тачка из које полази 0 дужи, онда не постоји тачка из које полази 2003 дужи. Тада бројеви $n_1, n_2, \ldots, n_{2004}$ припадају скупу $\{0, 1, \ldots, 2002\}$, па опет на основу Дирихлеовог принципа постоје два од њих који су међусобно једнаки.



Сл. уз задатак 738



Сл. уз задатак 740

738. Нека је K средиште ивице BB_1 и L средиште ивице AB. Пресек равни α и призме је $\triangle AKC_1$, а пресек равни β и призме је $\triangle LCB_1$ (слика). Уочени троуглови имају за пресек дуж MN чију дужину треба израчунати. Из троугла AA_1C_1 налазимо $AC_1^2 = AA_1^2 + A_1C_1^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$, дакле $AC_1 = a\sqrt{3}$. Тачка M је тежиште троугла ABB_1, па је $MK = \frac{1}{3}AK$. Слично, тачка N је тежиште троугла BC_1B_1, па је $KN = \frac{1}{3}KC_1$.

Тако добијамо да је $\triangle MKN \sim \triangle AKC_1$ (са коефицијентом сличности $1:3$), па је $MN = \frac{1}{3}AC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

739. Како је $(k^3)^2 + (2k^2)^3 = k^6 + 8k^6 = 9k^6 = (3k^3)^2$, то је, за сваки природан број k, тројка $(k^3, 2k^2, 3k^3)$ решење дате једначине.

740. У троуглу BDM је $\angle DBM = 25°$, $\angle BDM = 20°$, па је $\angle BMD = 135°$ (слика). Посматрајмо кружницу k са центром A и полупречником AB. BD је тетива која одговара четвртини те кружнице, па је периферијски угао над том тетивом једнак $135°$. Дакле, тачка M припада кружници k. Следи да је $AM = AB = AD$. Троугао MAD је једнакокрак, при чему је угао на основици $\angle ABM = 65°$. Према томе је и $\angle AMB = 65°$ и $\angle MAB = 180° - 2\cdot 65° = 50°$.

741. Приметимо да ако за реалне бројеве x и y важи $xy = 1$, онда је

$$\frac{1}{1+x^{2004}} + \frac{1}{1+y^{2004}} = \frac{1+y^{2004}+1+x^{2004}}{(1+x^{2004})(1+y^{2004})} = \frac{2+x^{2004}+y^{2004}}{1+x^{2004}+y^{2004}+x^{2004}y^{2004}} = \frac{2+x^{2004}+y^{2004}}{2+x^{2004}+y^{2004}} = 1.$$

Примењујући добијени резултат најпре на бројеве $x = a_1$, $y = a_{2004}$, затим на бројеве $x = a_2$, $y = a_{2003}$, …, и, на крају, на бројеве $x = a_{1002}$, $y = a_{1003}$, добијамо да је тражени збир једнак $1 + 1 + \cdots + 1 = 1002$.

742. Приметимо прво да је дати израз увек паран јер има паран број непарних сабирака. Према томе, једини прост број који може бити вредност датог израза је 2.
За било којих 8 узастопних природних бројева важи:

$$(n+8)^2 - (n+7)^2 - (n+6)^2 + (n+5)^2 - (n+4)^2 + (n+3)^2 + (n+2)^2 - (n+1)^2 = 0,$$

па распоређујући знаке $+$ и $-$ на тај начин редом у блоковима од по 8 сабирака добијамо да је

$$\underbrace{2004^2 * 2003^2 * \ldots * 5^2}_{=0} + 4^2 - 3^2 - 2^2 - 1^2 = 2.$$

743. Претпоставимо да постоји такав број D. Пошто је $D = A^2$ и $A = 10a + 5$, $a \in \mathbf{N}$, из

$$A^2 = 100a^2 + 100a + 25 = 100a(a+1) + 25$$

следи да је цифра десетица броја D једнака 2. На основу следеће табеле

$a \equiv \cdot \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a(a+1) \equiv \cdot \pmod{10}$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

закључујемо да је цифра стотина броја D: 0, 2 или 6, па према условима задатка то може бити једино цифра 6 (цифре 2 и 5 су већ употребљене, а 0 је искључена). Дакле, $D = 1000b + 625$, $b \in \mathbf{N}$, па $125 \mid D$. Пошто је $D = A^2$, то следи да $5^4 \mid D$, па цифра хиљада броја D мора бити или 0 или 5. Контрадикција.

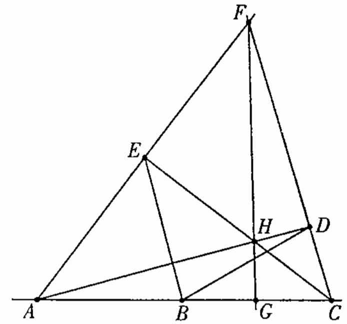
744. На произвољној правој помоћу обележених тачака лењира обележимо тачке A и B, а затим тачке B и C (видети слику). Обележимо сада тачке B и D, тако да D буде ван уочене праве. Спојимо A и D. Лако се показује да је $AD \perp CD$. Обележимо сада тачке B и E тако да E не буде ни на уоченој правој ни на правој BD. Спојимо A и E и E и C. Тада је $AE \perp EC$. Нека је H тачка у пресеку правих AD и CE, а F тачка у пресеку правих AE и CD. Тада је H ортоцентар троугла ACF, па је права FH ортогонална на полазну праву.

745. Нека је $(m+1)^3 - m^3 = n^2$, где је m неки природан број. Тада је n^2, а отуда и n, непаран број. Дакле $(m+1)^3 - m^3 = (2p+1)^2$. То се даље може представити у облику

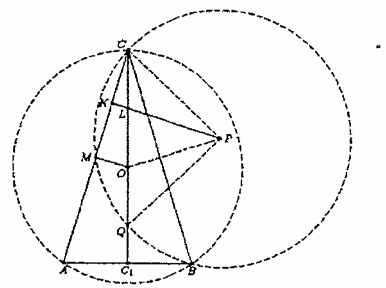
$$3m^2 + 3m + 1 = (2p+1)^2$$
$$4(3m^2 + 3m + 1) - 1 = 4(2p+1)^2 - 1$$
$$3(4m^2 + 4m + 1) = (2(2p+1) - 1)(2(2p+1) + 1)$$
$$3(2m+1)^2 = (4p+1)(4p+3).$$

Како су бројеви $4p+1$ и $4p+3$ узајамно прости, а њихов производ једнак $3(2m+1)^2$, један од њих је потпун квадрат. То не може да буде $4p+3$, јер квадрат сваког непарног броја даје остатак 1 при дељењу са 4. Отуда је $4p + 1 = (2t+1)^2$, односно

$$4p + 1 = 4t^2 + 4t + 1$$
$$2p + \frac{1}{2} = 2t^2 + 2t + \frac{1}{2}$$
$$2p + 1 = t^2 + t^2 + 2t + 1$$
$$2p + 1 = t^2 + (t+1)^2.$$



Сл. уз задатак 744


Сл. уз задатак 747

746. Неједнакост се може записати у еквивалентном облику

$$\frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leqslant \frac{\sqrt{2(x^2+y^2)}}{\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Зато је довољно доказати следеће две неједнакости:

$$x + y \leqslant \sqrt{2(x^2+y^2)} \quad \text{и} \quad x^2 - xy + y^2 \geqslant \frac{x^2+y^2}{2},$$

а оне су обе једноставне. Једнакост важи ако и само ако је $x = y$.

747. Нека је P средиште кружнице кроз B, C и M, O средиште описане кружнице око $\triangle ABC$ и нека је K средиште дужи MC, а C_1 средиште дужи AB, слика. Означимо $KP \cap l = \{L\}$. Како су KP и OM нормални на AC, то је $KP \parallel OM$. Из $MK = KC$ следи $OL = CL$. С друге стране, $OP \perp BC$, па је $\angle LOP = \angle COP = 90° - \angle BCC_1$. Такође је $\angle OLP = \angle CLK = 90° - \angle ACC_1$. Како је $\triangle ABC$ једнакокрак и $\angle BCC_1 = \angle ACC_1$, то је $\angle LOP = \angle OLP$ и $LP = OP$. Из $CP = PQ$ добијамо да је $\angle CLP = \angle QOP$ и $CL = OQ$.

Тако је $CL = LO = OQ$, па је $CO = \frac{2}{3}CQ$. Најзад, за полупречник R описаног круга троугла ABC добијамо $R = \frac{2}{3}m$.

748. Из $3x+4y=m^2$ и $4x+3y=n^2$ следи $7(x+y)=m^2+n^2$, па $7 \mid m^2+n^2$. Како су једини могући остаци квадрата природних бројева при дељењу са 7 једнаки 0, 1, 2 и 4, одатле лако следи да мора бити $7 \mid m$ и $7 \mid n$. То значи да $7^2 \mid m^2+n^2$ и $x+y \equiv 0 \pmod 7$.
С друге стране, из $3x+4y=m^2$ и $4x+3y=n^2$ следи и $x-y=n^2-m^2$, па је, на основу претходног, и $x-y \equiv 0 \pmod 7$. Сабирањем и одузимањем добијених конгруенција налазимо да $7 \mid 2x$ и $7 \mid 2y$, одакле $7 \mid x$ и $7 \mid y$.

749. Означимо са c, r и b бројеве црних, црвених и белих троуглова, респективно. Како је дати полигон подељен на $n-2$ троугла, то је

$$c+r+b=n-2.$$

С друге стране, свака страница полигона је страница тачног једног троугла који учествује у разлагању, па је

$$2c+r=n.$$

Одузимањем добијених релација налазимо да је $c-b=2$, што је и требало доказати.

2005. година

750. Тражена разлика је $4050 \cdot 6 - 5004 : 6$, па како је $4050 \cdot 6 = 24300$, а $5004 : 6 = 834$, то је вредност те разлике 23466.

751. $x \in \{0,1,2,\dots,98\}$.

752. Сва тројица су на крају имала $36 : 3 = 12$ ораха. Значи, $B-6=12$, $V+6-4=12$ и $D+4=12$, тј. на почетку Бранко је имао 18 ораха, Воја 10 ораха и Драган 8 ораха.

753. *Први начин.* Ако је мања страница (ширина) правоугаоника дужине a, онда је већа (дужина) дужине $2a$, па је страница осенченог квадрата дужине a. То значи да је она три пута мања од странице квадрата $ABCD$, која је очигледно $3a$. Обим квадрата $ABCD$ је $12a$ и три пута је већи од обима осенченог квадрата који је $4a$.
Други начин. Како је $2 \cdot (2a) + 2 \cdot a = 90\,\mathrm{mm}$, то је $a = 15\,\mathrm{mm}$, па је обим шрафираног квадрата $60\,\mathrm{mm}$. Обим квадрата $ABCD$ је $4 \cdot (15+30) = 180\,\mathrm{mm}$ и три пута је већи од обима осенченог квадрата.

754. *Први начин.* Четвороцифрених бројева има 9000, а непарних 4500. Како је сваки пети од њих дељив са 5, следи да тражених бројева има 900.
Други начин. То су они четвороцифрени бројеви којима је цифра јединица 5. Таквих бројева има $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

755. Бројеви дељиви са 9 имају збир цифара који је такође дељив са 9. Тражени скуп је: $\{144,414,441,333,234,243,324,342,423,432\}$.

756. Из $\alpha + (\alpha - 2005') = 180°$ добијамо $2\alpha = 180° + 33°25'$, односно $\alpha = 106°42'30''$.

757. Највећи могући број букета према услову задатка је НЗД$(18,45,72) = 9$. У сваком букету ће бити по две беле, пет жутих и осам црвених ружа и цена ће му бити 255 динара. *Напомена.* До цене букета може да се дође и ако се вредност свих ружа (2295) подели бројем букета (9).

758. *Први начин.* Ако су узастопни бројеви дужине страница правоугаоника, онда је осенчени квадрат површине $1\,\mathrm{cm}^2$, а површина квадрата $ABCD$ је $2025\,\mathrm{cm}^2$ и 2025 пута је већа од површине осенченог квадрата.
Други начин. $506 = 2 \cdot 11 \cdot 23$, па су странице правоугаоника 22 cm и 23 cm. Значи, површина квадрата $ABCD$ је $2025\,\mathrm{cm}^2$ и 2025 пута је већа од површине осенченог квадрата која је $1\,\mathrm{cm}^2$.

759. Не постоје, јер збир свих бројева из скупа S је $\dfrac{2006 \cdot 2005}{2} = 1003 \cdot 2005$, дакле, непаран број.

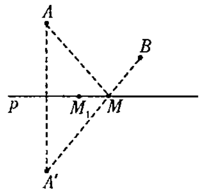
760. Лако се види да је $2\alpha_1 = 236°$, тј. $\alpha_1 = 118°$ и $\beta_1 = 102°$. Одавде је $\alpha = 62°$, $\beta = 78°$ и $\gamma = 40°$.

761. Нађимо тачку A' симетричну тачки A у односу на праву p (слика). Пресек дужи $A'B$ и праве p је тражена тачка M. Ако уочимо било коју другу тачку $M_1 \in p$, тада је $AM_1 + M_1B = A'M_1 + M_1B > A'B = A'M + MB = AM + MB$.

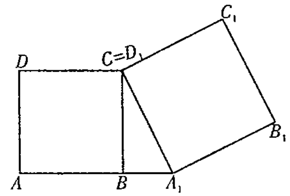
762. Очигледно је $-2005 < x-1 < 2005$, тј. $-2004 < x < 2006$, па је скуп целобројних решења:

$$\{-2003,-2002,\dots,-2,-1,0,1,2,\dots,2003,2004,2005\}.$$

Збир целобројних решења се своди на $2004+2005$ и једнак је 4009.



Сл. уз задатак 761



Сл. уз задатак 767

763. Ако уочимо праву паралелну са AB која садржи тачку C и тачку E (њен пресек са AD), тада је четвороугао $ABCE$ правоугаоник. Како је $AE = ED = BC = \frac{1}{2}AD$ и $CE \perp AD$, то су троуглови $\triangle ACE$ и $\triangle DCE$ подударни, па је $AC = CD$.

764. Лако се добија да је $b = -11$. Како је $a < b < c$ и $ac < 0$, следи да је $a < -11$ и $c > 0$. Једно решење је $a = -14$ и $c = 2$, а друго решење је $a = -28$ и $c = 1$.

765. $a^{2004} \cdot b^{2006} = 5^{2004} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{2006} = \frac{5^{2004}}{5^{2006}} = \frac{1}{25}$.

766. $a = \sqrt{6{,}25 - 2{,}25} = 2\,\text{cm}$; $c = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}\,\text{cm}$; $P = \frac{3\cdot 2}{2} = 3\,\text{cm}^2$; $O = (5 + \sqrt{13})\,\text{cm}$.

767. Нека је квадрат $ABCD$ површине a^2 (види слику). Продужимо AB преко B тако да је $BA_1 = \frac{1}{2}AB$. Тада је

$$A_1C = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a,$$

а површина квадрата $A_1B_1C_1D_1$ је $P_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{5}{4}a^2 = \frac{5}{4}P_{ABCD}$.

768. Ако је $\alpha + \gamma = 118°$, тада је $\alpha = \beta = 62°$, а $\gamma = 56°$. Одавде закључујемо да је $a > c$, па како је $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2} = P$, то је $h_a < h_c$, тј. висина која одговара основици је већа од висине која одговара краку.

769. Како је $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = \frac{65}{60}$, а $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$, и како је

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{65}{60} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{53}{60} > \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60} > \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k}$$

за $m, n, k > 3$, то тражени бројеви не постоје.

770. Ако је површина почетне коцке $6a^2$, тада је после увећања сваке ивице за 20% површина новодобијене коцке $6 \cdot \left(\frac{6}{5}a\right)^2$. Према томе је: $6a^2 : 6 \cdot \left(\frac{6}{5}a\right)^2 = 100 : x$, тј. $x = 144$, па је површина новодобијене коцке за 44% већа од почетне.

771. Како је $\frac{17}{100}A = \frac{68}{100}B$, односно $A = 4B$, то је $5B = 2005$, тј. $B = 401$ и $A = 1604$.

772. Нека су B_1 и D_1 пројекције тачака B и D на раван α. Тада су $\triangle ABB_1$ и $\triangle CDD_1$ правоугли са катетама $BB_1 = DD_1 = 12\,\text{cm}$. Како је $\measuredangle BAB_1 = 30°$, то је хипотенуза $AB = 24\,\text{cm}$. Из услова задатка видимо да је $CD = 24\,\text{cm}$, па је $\triangle ABB_1 \cong \triangle CDD_1$, а онда је и $\measuredangle DCD_1 = 30°$.

773. Како је $1 + 2 + \cdots + 62 = 1953$, а $1 + 2 + \cdots + 63 = 2016$, то је 2005 збир највише 62 различита природна броја и то на пример $2005 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 60 + 61) + 114$.

774. Поделе $7+0+0$, $5+1+1$, $3+2+2$ и $3+3+1$ су могуће на три начина (свака), а поделе $6+1+0$, $5+2+0$, $4+3+0$ и $4+2+1$ су могуће на шест начина (свака). То је укупно $3 \cdot 4 + 6 \cdot 4 = 36$ различитих начина.

775. Ако замишљени број означимо са x, онда је $12x$ први производ, а $9x$ други производ. Њихова разлика је 270, тј. $12x - 9x = 270$. Одавде је $x = 270 : 3$, тј. $x = 90$.

776. Од датих картона можемо саставити четири правоугаоника (2×18, 3×12, 4×9 и 6×6).
(а) Највећи могући обим је $O = 2(2 + 18) = 40\,\text{cm}$.
(а) Најмањи могући обим је $O = 2(6 + 6) = 24\,\text{cm}$.

777. Површина фигуре је 33 квадратића.

778. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. За 60 свезака и 41 оловку биће потребно 2005 динара, јер је $60 \cdot 30 + 41 \cdot 5 = 1800 + 205 = 2005$.

779. Како је $2005 \cdot a - 2004 \cdot b = a + 2004 \cdot a - 2004 \cdot b = a + 2004 \cdot 2005$, то је најмања вредност датог израза $2006 + 2004 \cdot 2005 = 4020026$.

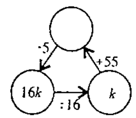
780. Ако са α означимо мањи од упоредних углова, тада је $(180° - \alpha) - \alpha = \frac{\alpha}{2}$, тј. $\alpha = 72°$. Његов комплемент има 18° и једнак је $\frac{1}{4}\alpha (= 72/4 = 18°)$.

781. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Највише предмета се може купити ако се купе само оловке, тј. ако се купи $2005 : 5 = 401$ оловка.

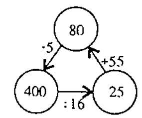
782. Дужи одређене овим тачкама су: AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE и DE и има их 10, а троуглови са теменима у овим тачкама су: ABC, ABD, ABE, BCD, BCE, DCE, DCA, DEA, DEB и EAC и има их 10. Према томе, има исто толико дужи са крајевима у датим тачкама колико и троуглова са теменима у датим тачкама.

783. *Први начин.* Број ће бити дељив са 4 ако уместо ♣ ставимо једну од цифара из скупа $\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Од добијених 5 бројева само су 3204 и 3264 дељиви са 3, па самим тим и са 12.
Други начин. Дати број ће бити дељив са 3 ако уместо ♣ ставимо једну од цифара из скупа $\{0, 3, 6, 9\}$. Од добијених 5 бројева само су 3204 и 3264 дељиви са 4, па самим тим и са 12.

784. Стављајући k доле десно (слика 1), добијамо да је $(k + 55) \cdot 5 = 16k$, тј. $k = 25$. Решење је на слици 2. Напоменимо да се k може ставити у било који круг – једначине су различите, а резултат је исти.



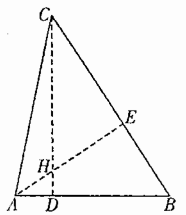
Сл. 1 уз задатак 784



Сл. 2 уз задатак 784

785. Одмах се види да је $-\frac{5}{15} < \frac{n+1}{15} < \frac{3}{15}$, односно да је $-5 < n + 1 < 3$. Тражено решење припада скупу $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$.

786. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Ако са x означимо број свезака, тада је $30 \cdot x + (101 - x) \cdot 5 = 2005$. Одавде је $x = 60$, тј. купљено је 60 свезака и 41 оловка.



Сл. уз задатак 787

787. Како је $\measuredangle EAB = \measuredangle BCD$ (углови са нормалним крацима) и $AB = CH$ (по претпоставци), то су правоугли троуглови $\triangle ABE$ и $\triangle HCE$ подударни. Закључујемо да је $AE = EC$, а одатле и $\measuredangle EAC = \measuredangle ACE = 45°$.

788. (1) Из дељивости 135 и 30 са 5 и 135 и 252 са 9 закључујемо где се налазе 5 и 9. (2) Одмах закључујемо где се налази 3, а онда и 6 и 1. (3) Број 4 не може бити у истој колони са 3, јер је $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$, па су редом бројеви треће врсте 4, 2, 1. (4) Сада лако закључујемо где се налазе 8 и 7.

9		5	135
			336
			8
252	48	30	

9	3	5	135
		6	336
		1	8
252	48	30	

9	3	5	135
		6	336
4	2	1	8
252	48	30	

9	3	5	135
7	8	6	336
4	2	1	8
252	48	30	

Сл. уз задатак 788

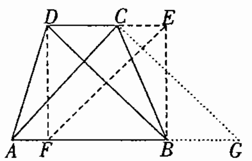
789. Ако квадрат, правим паралелним страницама, поделимо на $44 \cdot 44 = 1936$ малих квадрата странице 1 cm, онда, на основу Дирихлеовог принципа, бар две од датих 2005 тачака морају бити у истом (малом) квадрату. Растојање те две тачке је мање од дијагонале малог квадрата, која је мања од 2 cm због односа страница у троуглу.

790. Очигледно је $\overline{abcabc} = \overline{abc} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{abc} \cdot 1001$, па како је $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, то је и $\overline{abcabc}$ дељиво са 7, 11 и 13.

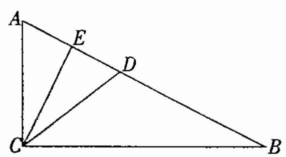
791. Како је $AC = BD$, то је $P = \dfrac{d^2}{2}$, тј. $d = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

Први начин. Ако уочимо тачке E и F такве да је $DF \perp AB$ и $BE \perp DC$, тада је $DFBE$ квадрат јер је $FE = BD$, $FB \parallel DE$ и $FE \perp BD$, а страница овог квадрата, тј. висина трапеза је $DF = 4\,\mathrm{cm}$.

Други начин. Ако је $CG \parallel BD$ и G на правој AB, троугао AGC је једнакокрако-правоугли и висина му је једнака половини хипотенузе, тј. 4 cm.



Сл. уз задатак 791



Сл. уз задатак 793

792. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Ако са x означимо број свезака тада је $30x + (205 - x) \cdot 5 = 2005$, тј. $5x = 196$. Како је $x \in \mathbf{N}_0$, закључујемо да није могуће купити 205 предмета.

793. Ако уочимо E на AB тако да је $CE \perp AB$, тада је $AE = ED$, јер је $\triangle CDA$ једнакокрак. Сада је $AB = 5$, $CE = 2$ и $AE = ED = 1$ (слика). Према томе, $O_{\triangle BCD} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + 5 - 2 = 3(1 + \sqrt{5})$ и $P_{\triangle BCD} = 5 - 2 = 3$.

794. I случај. $p = q = 2$ и r – непаран: $r^2 = 1997$, што је немогуће. II случај. p, q, r – непарни: $(2k+1)^2 + (2l+1)^2 + (2m+1)^2 = 2005$, тј. $4(k^2 + k + l^2 + l + m^2 + m) = 2002$, што није могуће јер 2002 није дељиво са 4.

795. Решења прве неједначине су $y \geqslant -8$, а друге $y > -\dfrac{1}{5}$. Заједничка решења су $y > -\dfrac{1}{5}$, тј. $y \in \left(-\dfrac{1}{5}, +\infty\right)$.

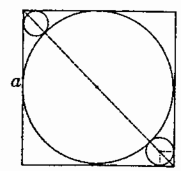
796. Лако се види да 5 свезака и 5 оловака коштају 175 динара, а 2 оловке и 2 свеске 70 динара. Према томе, цена једне свеске је 30 динара, а једне оловке 5 динара. Нека је набављено x оловака и y свезака. Тада је $5x + 30y = 2005$, тј. $x + 6y = 401$. Значи, $0 \leqslant 6y \leqslant 401$, односно, $0 \leqslant y \leqslant \frac{401}{6}$, па је могуће купити 0 или 1 или 2 или ... или 66 свезака и за остале динаре оловке. Према томе, има 67 начина да се за 2005 динара купе свеске и оловке.

797. Запремина квадра је $V = a^2 H$, а запремина мањег дела је $V_1 = \dfrac{1}{2} a^2 \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Запремина већег дела је $V_2 = a^2 H - \dfrac{1}{2} a^2 \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Како је $V_1 : V_2 = 1 : 2$, то је $H = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

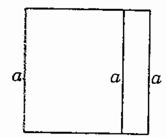
798. Ако је r полупречник малог круга (видети слику), тада је $2r\sqrt{2} + 2r + a = a\sqrt{2}$, па је

$$r = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2(\sqrt{2} + 1)} = \frac{a(3 - 2\sqrt{2})}{2}$$

и $P = r^2\pi = \dfrac{a^2(3 - 2\sqrt{2})^2}{4}\pi$.



Сл. уз задатак 798



Сл. уз задатак 802

799. Бројеви 7, 16, 25, 34, 43, 52, 59, 61, 68, 70, 77, 86 и 95 имају збир цифара дељив са 7, а између никоја два од њих нема 10 бројева. Према томе, најмањи број који је Милан записао је 96 јер су првих 10 узастопних бројева којима збир цифара није дељив са седам: 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104 и 105.

800. За првих 9 страна потребно је 9 цифара, а за наредних 90 страна 180 цифара. За преосталих 126 страна потребно је $126 \cdot 3 = 378$ цифара. Значи, за нумерацију 225 страна књиге потребно је 567 цифара.

801. Нека је x мањи од тих бројева. Тада је већи од њих $x + 1001$. Како је њихов збир 2005, то је $2x + 1001 = 2005$, односно $x = 502$. Већи од ових бројева је 1503.

802. Како је обим добијених правоугаоника за две дужине странице квадрата већи од квадрата, то је $a = 210 : 2 = 105\,\mathrm{cm}$ (слика). Како је површина мањег правоугаоника

4 пута мања од површине већег, то је једна његова страница 4 пута мања од странице већег (друге странице су им по 105 cm). Обим мањег правоугаомика је $O = 2(105+21) = 252$ cm.

803. На месту треће звездице (с лева на десно) мора да стоји цифра 6, јер је $9\cdot 8 = 72$. Ако на место средње звездице ставимо цифру 7, добијамо $708 = 79\cdot 8 + 76$. Ако на место средње звездице ставимо цифру 8, тада добијамо $788 = 89\cdot 8 + 76$.

804. У горњем десном углу мора да се упише $10+5-4 = 11$, а у средини $11+7-10 = 5+7-4 = 8$. Онда добијамо да је збир по врстама, колонама и дијагоналама једнак 24. Дакле:

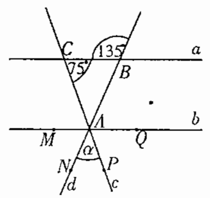
	4	
10		
5		7

	4	11
10		
5		7

	4	11
10	8	
5		7

9	4	11
10	8	6
5	12	7

Сл. уз задатак 804



Сл. уз задатак 805

805. Уочимо тачке M, N, P и Q као на слици. Тада $\measuredangle MAN$ има 45°, $\measuredangle PAQ$ има 75° и коначно тражени угао α има 60°.

806. Нека су $a, b, c \in \mathbb{N}$ дужине ивица квадра. Тада је $12\cdot b\cdot c = 960$ и $2(12b+12c+bc) = 596$, значи $bc = 80$ и $b+c = 18$. Растављањем броја 80 на чиниоце и провером збира добија се $b = 10$ cm и $c = 8$ cm.

807. Број који је дељив са 36 мора да буде дељив са 4 и са 9. Ако је дељив са 4, а записује се само цифрама 7 и 4, он мора да се завршава са 44. Збир цифара тог броја треба да буде дељив са 9, па како су случајеви $8+1$ и $8+10$ немогући, остаје нам $8+19$, тј. $8+4+4+4+7$, па је тражени број 444744.

808. Пустимо да „тече време" на пешчаном сату који мери 10 min. Када истекне 10 min, окренемо га и истовремено пустимо да „тече" и други сат који мери 7 min. Када истекне 7 min, окренемо сат који мери 7 min. Када „истекне" сат који мери 10 min, окренемо сат који мери 7 min, а на коме је „истекло" 3 min. Када „истекне" сат који мери 7 min, прошло је тачно 23 min.

		$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$		
		$\frac{4}{10}$

		$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	
		$\frac{4}{10}$

		$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	
	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$

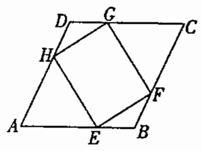
	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	
	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$

$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{10}$
$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{10}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{10}$

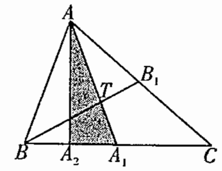
Сл. уз задатак 809

810. Како је $-3 < x < 3$, то се провером другог услова добија да је $x = 1$ или $x = 2$.

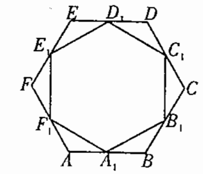
811. Лако се доказује да је $\triangle AEH \cong \triangle FCG$ и $\triangle EBF \cong \triangle HGD$, па је $EH = FG$ и $EF = HG$, па је четвороуфао $EFGH$ паралелограм (слика). Нека је $\measuredangle BAD = \alpha$. Тада је $\measuredangle AEH = \frac{180^\circ-\alpha}{2}$ и $\measuredangle BEF = \frac{\alpha}{2}$, те је $\measuredangle HEF = 90°$. Према томе, паралелограм $EFGH$ је правоугаоник.



Сл. уз задатак 811



Сл. уз задатак 814



Сл. уз задатак 815

812. Како је $7r < 47$, то је $r = 2$ или $r = 3$ или $r = 5$. Ако је $r = 2$, тада је $p + 5q = 33$, па како је p или $5q$ паран, то је једино могуће за $q = 2$ и $p = 23$. Ако је $r = 3$, тада је $p + 5q = 26$. Провером добијамо $p = 11$ и $q = 3$. Ако је $r = 5$, тада је $p + 5q = 12$. Провером добијамо решење $p = 2$ и $q = 2$.

813. Нека су x и y узајамно прости бројеви. Како су

$$\frac{x}{y} : \frac{11}{210} = \frac{210x}{11y} \quad \text{и} \quad \frac{x}{y} : \frac{11}{280} = \frac{280x}{11y}$$

природни бројеви, то $11 \mid x$, $y \mid 210$ и $y \mid 280$. Како тражимо најмањи могући разломак $\frac{x}{y}$, то ће x бити што је могуће мање, тј. $x = 11$, а y што је могуће веће, а то је $y = \text{НЗД}(210, 280) = 70$.

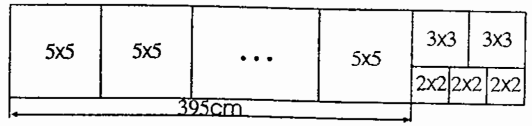
814. Нека је (види слику) AA_2 висина која одговара страници a, а AA_1 њена тежишна дуж, B_1 средиште странице AC и T тежиште троугла ABC. Прво можемо конструисати $\triangle AA_2A_1$ (познати су $\measuredangle AA_2A_1$, AA_2 и AA_1), а затим и $\triangle BA_1T$ (познати су $\measuredangle BA_1T$, A_1T и TB). Затим продужимо BA_1 преко A_1 тако да је $BA_1 = A_1C$. Спајањем A са тачкама B и C добијамо тражени $\triangle ABC$.

815. Сви троуглови AA_1F, BB_1A_1, CC_1B_1, DD_1C_1, EE_1D_1, FF_1E_1 су подударни, па је $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1A_1$ (слика). Како је A_1B_1 средња линија $\triangle ABC$, то је $A_1B_1 = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Осим тога, како је $\measuredangle FF_1E_1 = \measuredangle AF_1A_1 = 30°$, то је $\measuredangle E_1F_1A_1 = 120°$. Слично је и за остале углове. Дакле, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ је правилан шестоугао чија је странице дужине $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Његова површина је $P = \frac{9a^2\sqrt{3}}{8}$.

816. Нека су p, q и r прости бројеви такви да је $p \leqslant q \leqslant r$. Како је $pqr = 47(p+q+r)$ и p, q и r су прости бројеви, то је $r = 47$. Тада је $pq = p + q + 47$, тј. $(p-1)(q-1) = 48$. Провером долазимо до јединог решења $p = 5$ и $q = 13$.

817. Нека је O пресек дијагонала. Троуглови AOD и BOC су правоугли, па је $2MO = AD$ и $2NO = BC$. Из троугла OMN је $MN \leqslant MO + NO$ (једнакост важи ако су тачке M, O и N колинеарне), па је $2MN \leqslant 2MO + 2NO = AD + BC$.

818. Тражених бројева са цифрама 1 и 2 „на почетку" има $2\cdot 8\cdot 7 = 112$. Ако су цифре 1 и 2 „у средини", таквих бројева има $7\cdot 2\cdot 7 = 98$ и са цифрама 1 и 2 на крају $7\cdot 7\cdot 2 = 98$. Дакле, тражених бројева има укупно 308.

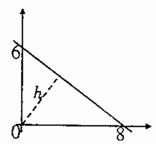


Сл. уз задатак 819

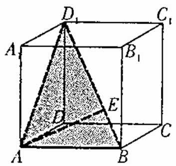
819. Најмање квадрата ће бити употребљено ако састављамо правоугаоник чија је једна страница 5 cm, а друга 401 cm и то као на слици. Дакле, биће потребно најмање 84 квадрата.

820. (а) Како је $3 = (2m+1)\cdot 4 + 6$, то је $m = -\frac{7}{8}$.

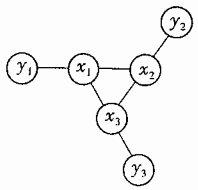
(б) Једначина праве је $y = -\frac{3}{4}x + 6$. Тражена удаљеност је једнака висини која одговара хипотенузи, тј. $\frac{h\cdot\sqrt{36+64}}{2} = \frac{6\cdot 8}{2}$, одакле је $h = 4{,}8$.



Сл. уз задатак 820



Сл. уз задатак 823



Сл. уз задатак 824

821. Нека су P, P_1 и P_2, затим s, s_1 и s_2 редом површине и полуобими троуглова ABC, ADC и DBC. Тада је $s_1 < s$ и $s_2 < 2$ и $P = sr$, $P_1 = s_1r_1$ и $P_2 = s_2r_2$. Како је $P = P_1 + P_2$, то је

$$r_1 + r_2 = \frac{P_1}{s_1} + \frac{P_2}{s_2} > \frac{P_1}{s} + \frac{P_2}{s} = \frac{P}{s} = r.$$

822. Лако се види да је $p(1+q+qr) = 5\cdot 401$. Ако је $p = 5$, тада је $q(1+r) = 400$, одакле се добија $q = 2$ и $r = 199$ или $q = 5$ и $r = 79$. Ако је $p = 401$, тада нема решења.

823. Нека ивица коцке има дужину a. Тада је (види слику) $BD_1 = a\sqrt{3}$, $AD_1 = a\sqrt{2}$, $AE = 2005$ cm и троугао ABD_1 је правоугли. Тада је $a\cdot a\sqrt{2} = 2005\cdot a\sqrt{3}$, тј. $a = 2005\sqrt{\frac{3}{2}}$. Површина и запремина су једнаке $P = 6a^2 = 9\cdot 2005^2\,\mathrm{cm}^2$ и $V = a^3 = 2005^3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{cm}^3$.

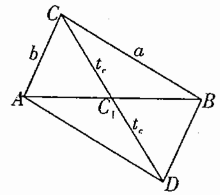
824. Нека је S збир бројева по сваком правцу (види слику). Тада је $S = y_1 + x_1 + x_2$, $S = y_2 + x_2 + x_3$ и $S = y_3 + x_3 + x_1$, па је $3S = (y_1+y_2+y_3+x_1+x_2+x_3) + x_1 + x_2 + x_3$, тј. $3S = 21 + x_1 + x_2 + x_3$, па је $x_1 + x_2 + x_3 = 3(S-7)$.

825. Нека је a цена пансиона у хотелу Славија, а b цена пансиона у хотелу Звезда пре прве промене цена. Цена пансиона после обе промене је $0{,}8\cdot 1{,}2a$ у хотелу Славија и $1{,}2\cdot 0{,}8b$ у хотелу Звезда. Како је $|0{,}8\cdot 1{,}2a - 1{,}2\cdot 0{,}8b| = 240$, то је $|a-b| = \frac{24}{0{,}96}$, односно $|a-b| = 250$. Према томе, разлика у цени пансиона пре прве промене је била 250 динара.

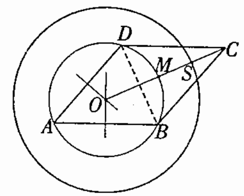
826. Нека је C_1 средиште странице AB (видети слику). Ако продужимо CC_1 преко C_1 тако да је $CC_1 = C_1D$, добијамо паралелограм $ADBC$. Сада је $CD < DA + AC$, тј. $2t_c < a + b$, односно $t_c < \frac{a+b}{2}$.

С друге стране је, из троуглова AC_1C и C_1BC, $t_c > b - \frac{c}{2}$ и $t_c > a - \frac{c}{2}$, па је $t_c > \frac{a+b-c}{2}$.

827. Како је $\overline{abc} - \overline{def} = 860$, то је $a = 9$, $d = 1$, $c = f$ и $b - e = 6$. Ако је $b = 6$ и $e = 0$, тада је $a+b+c+d+e+f = 16+2c$. Како је број $\overline{abcdef}$ дељив са 9, то је $16+2c$ дељиво са 9, па је $c = 1$ (јер је $c \in \{0,1,\dots,9\}$). Решење у овом случају је 961101. Слично, ако



Сл. уз задатак 826



Сл. уз задатак 828

је $b = 7$ и $e = 1$ решење је 970110 или 979119; ако је $b = 8$ и $e = 2$ решење је 988128 и ако је $b = 9$ и $e = 3$ решење је 997137.

828. Нека је $ABCD$ дати ромб. Конструишимо кружницу описану око $\triangle ABD$ (видети слику). Нека је M пресечна тачка кружнице и дужи OC, а S средина дужи MC. Кружница са центром O која садржи тачку S је тражена кружница. Има укупно четири решења.

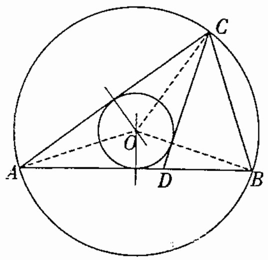
829. Четврта врста завршава се бројем $4n$. Како је 77 у петој врсти, то је $4n < 77$, односно $n \leqslant 19$. Седма врста се завршава бројем $7n$, па како је 127 у седмој врсти, то је $127 \leqslant 7n$, тј. $n > 18$. Према томе, $n = 19$. Сада знамо да последња врста почиње бројем $18m+1$, а завршава бројем $19m$, па мора бити $18m+1 \leqslant 307 \leqslant 19m$, тј. $m > 16$ и $m \leqslant 17$. Дакле, $m = 17$.

830. Како је $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}+\sqrt{6}}{6}$, то је $\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}}{6} > \frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$, јер је $(\sqrt{11}+\sqrt{7})^2 > (\sqrt{12}+\sqrt{6})^2$, односно $\sqrt{77} > \sqrt{72}$.

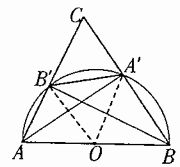
831. Одмах примећујемо да је $\frac{\alpha}{2} = \angle OAC = \angle ACO = \frac{\gamma}{4}$, тј. $\gamma = 2\alpha$ (слика). Сада је и

$$\beta = \angle ABC = \angle ABO + \angle OBC = \frac{\alpha}{2} + \frac{3}{4}\gamma = \gamma,$$

па је $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, тј. $\alpha = 36°$. Дакле, $\alpha = 36°$, $\beta = 72°$ и $\gamma = 72°$.



Сл. уз задатак 831



Сл. уз задатак 833

832. Како су бар два од бројева a, b и c исте парности, рецимо a и b, то је број $b^c + a$ паран и прост. Значи, $b^c + a = 2$, па је $b = a = 1$. Према томе, $p = 1 + c$ и $r = c + 1$, па су два од бројева p, q и r међусобно једнака.

833. Како тачке A, B, A', B' припадају једној кружници чији је пречник страница AB, а центар средиште странице AB, то је $\angle ABB' = \angle AA'B' = 25°$ (слика). Како је $\angle CA'B' =$

$180° - (90° + 25°) = 65°$, то је и $\angle A'B'C = 55°$, јер је $\angle A'CB' = \angle BCA = 60°$. С друге стране, $\triangle OA'B'$ је једнакокрак и

$$\angle B'OA' = 180° - (\angle AOB' + \angle BOA') = 180° - (50° + 70°) = 60°.$$

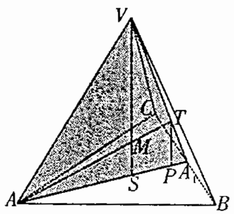
Значи, $\triangle OA'B'$ је једнакостраничан, па је $A'B' = 5\,\text{cm}$.

834. Како страница квадрата чија је дијагонала мања од $1\,\text{cm}$ мора бити мања од $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm, то ћемо дати квадрат поделити на $44 \cdot 44 = 1936$ мањих подударних квадрата странице $\frac{31}{44}$ cm ($\frac{31}{44} < \frac{\sqrt{2}}{2}$). Ако сада 2005 тачака на произвољан начин распоредимо у 1936 малих квадрата, тада ће постојати мали квадрат у коме се налазе бар две тачке, а њихово растојање је мање од дијагонале $d < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1\,\text{cm}$.

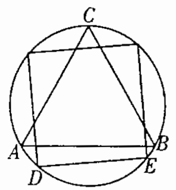
835. Дату једначину можемо записати у облику $5n + 401m = mn$, тј. $(m-5)(n-401) = 2005$. Ово је могуће за:

- $m - 5 = 1$ и $n - 401 = 2005$, тј. $m = 6$ и $n = 2406$;
- $m - 5 = 2005$ и $n - 401 = 1$, тј. $m = 2010$ и $n = 402$;
- $m - 5 = 401$ и $n - 401 = 5$, тј. $m = 406$ и $n = 406$;
- $m - 5 = 5$ и $n - 401 = 401$, тј. $m = 10$ и $n = 802$.

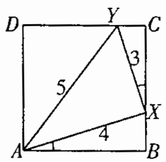
836. Ако је A_1 средиште ивице BC, тада T припада дужи VA_1 и S припада дужи AA_1 (јер је пирамида правилна), па се AT и VS секу. Обележимо пресечну тачку са M. Нормала из тачке T на раван основе сече дуж AA_1 у тачки P. Очигледно је $\triangle A_1SV \sim \triangle A_1PT$, па је $A_1T : TV = 1 : 2 = A_1P : PS$. Како је S тежиште основе, ако је x дужина дужи A_1P, тада је $AS : SP = 6x : 2x$. Сада из сличности троуглова ASM и APT следи $AM : MT = AS : SP = 3 : 1$.



Сл. уз задатак 836



Сл. уз задатак 837



Сл. уз задатак 838

837. Темена A, B и C једнакостраничног троугла деле кружницу на три лука, сваки дужине $\frac{O}{3}$. На једном од та три лука морају се наћи два темена квадрата, на пример на луку $\overset{\frown}{AB}$ (видети слику). Дужина лука $\overset{\frown}{DE}$ је $\frac{O}{4}$, па је збир дужина лукова $\overset{\frown}{AD}$ и $\overset{\frown}{EB}$ једнак $\frac{O}{3} - \frac{O}{4} = \frac{O}{12}$, па бар један од њих има дужину не већу од $\frac{O}{24}$.

838. Нека је дужина странице квадрата a. Троугао AXY је правоугли и $\angle AXY = 90°$. Како је $\angle CXY = \angle XAB$ (углови са нормалним крацима), то је $\triangle CXY \sim \triangle BAX$, па је $CX : BA = XY : AX$, односно $CX = \frac{XY \cdot BA}{AX} = \frac{3a}{4}$. Непосредно следи да је $BX = \frac{a}{4}$. У правоуглом троуглу ABX је $a^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = 4^2$, па је $a = \frac{16\sqrt{17}}{17}$.

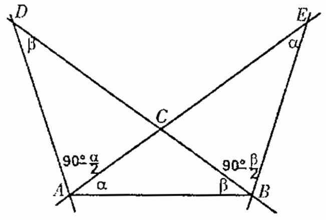
839. Ако са k означимо број неиздатих соба у току дана, тада је дневна зарада хотела

$$(40 - k)(1000 + k \cdot 50) - (40 - k) \cdot 100 = 50(40 - k)(18 + k),$$

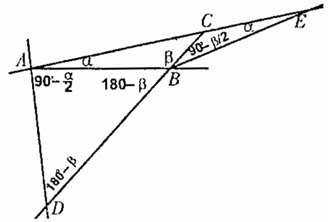
односно $50(841 - (k - 11)^2)$ динара. Зарада ће бити највећа ако је $k = 11$, а то значи да ће цена собе бити 1550 динара.

840. Разликујемо два случаја:
1° ако је $p = 2$, онда је $p^3 = 8$, па је $249 \cdot p^3 = 249 \cdot 8 = 1992$, што значи да је $q = 2005 - 1992 = 13$;
2° ако је $p \geqslant 3$, онда је p непаран број. Тада q мора бити паран, па је $q = 2$. Значи да је $249 \cdot p^3 = 2003$, па је $p^3 = \frac{2003}{249}$. Како 2003 није дељиво са 249, то p^3 није природан број.
Једино решење је $p = 2$, $q = 13$.

841. (а) 1° $\alpha < 90°$ и $\beta < 90°$ (слика). Из троугла ABE је $2\alpha + 90° + \frac{\beta}{2} = 180°$, а из троугла ABD је $2\beta + 90° + \frac{\alpha}{2} = 180°$, одакле је $\alpha = \beta = 36°$, $\gamma = 108°$.



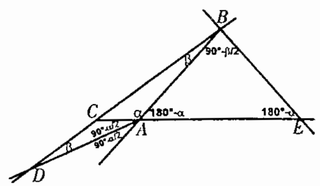
Сл. уз задатак 841а-1



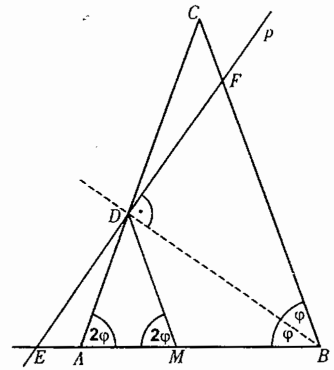
Сл. уз задатак 841а-2

2° $\alpha < 90°$ и $\beta > 90°$ (слика). Из троугла ABD је $450° - 2\beta - \frac{\alpha}{2} = 180°$, а из троугла ABE је $2\alpha + 90° + \frac{\beta}{2} = 180°$, одакле је $\alpha = 12°$, $\beta = 132°$, $\gamma = 36°$.

(б) $\alpha > 90°$ (слика). Из троугла ABD је $2\beta + 90° + \frac{\alpha}{2} = 180°$, а из троугла ABE је $450° - 2\alpha - \frac{\beta}{2} = 180°$, одакле је $\alpha = 132°$, $\beta = 12°$, $\gamma = 36°$.



Сл. уз задатак 841б



Сл. уз задатак 843

842. Ако са x означимо цену књиге у динарима, онда је Анка пре куповине имала x динара, Бранка $\frac{9}{5}x$ и Весна $2x$ динара. После куповине књиге Анка нема више новца, Бранки је остало $\frac{4}{5}x$, а Весни x динара. Како је то укупно $\frac{9}{5}x$, да би сви имали подједнако новца, Бранка је морала дати Анки $\frac{1}{5}x$, а Весна $\frac{2}{5}x$, тј. дупло више од Бранке. Значи, Весна је Анки дала 200 динара.

843. Нека права p сече BC у тачки F и нека је $DM \parallel BC$ (слика). $\triangle BEF$ је једнакокрак, јер је симетрала $\measuredangle EBF$ нормална на основицу EF. Закључујемо да је $ED = DF$. Како је $DM \parallel BC$, то је DM средња линија $\triangle BEF$, па је $EM = MB$. Тада је тежишна дуж DM правоуглог $\triangle BDE$ једнака половини дужи BE, тј. $DM = \frac{1}{2}BE$. Како је $\triangle AMD$ једнакокрак ($\measuredangle DAM = \measuredangle DMA = 2\varphi$), следи да је $DM = AD = \frac{1}{2}BE$, па је $BE = 2AD$.

844. Ако са x означимо збир свих додељених бројева, тада је збир било којих осам бројева додељених узастопним тачкама константан и једнак $x - 5 \cdot 1000$. Како је $108 = 13 \cdot 8 + 4$, на сличан начин закључујемо и да је збир било која четири броја додељена узастопним тачкама такође константан и једнак $100 : 5 = 200$ (јер пет „четворочланих блокова" стаје у један „двадесеточлани блок"). Према томе, тачкама $A_1, A_5, \ldots, A_{4n+1}, \ldots, A_{105}$ додељен је број 1; тачкама $A_2, A_6, \ldots, A_{4n+2}, \ldots, A_{106}$ додељен је број 50; тачкама $A_3, A_7, \ldots, A_{4n+3}, \ldots, A_{107}$ додељен је број 19 и коначно тачкама $A_4, A_8, \ldots, A_{4n}, \ldots, A_{104}, A_{108}$ додељен је број $130 = 200 - (1 + 50 + 19)$.

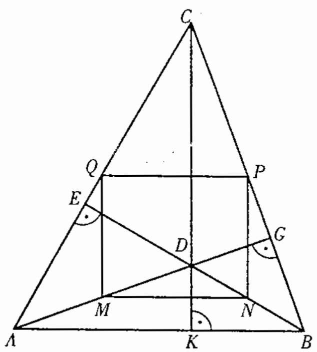
845. Нека је K подножје висине из темена C датог троугла (слика). Дуж MN је средња линија троугла ABD, па је

(1) $$MN = \frac{1}{2}AB \quad \text{и} \quad MN \parallel AB.$$

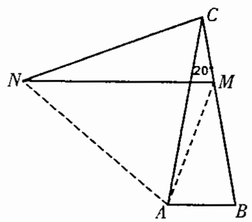
Дуж QP је средња линија троугла ABC, па је

(2) $$QP = \frac{1}{2}AB \quad \text{и} \quad QP \parallel AB.$$

Из (1) и (2) следи да је $MNPQ$ паралелограм. Дуж NP је средња линија троугла BCD, па је $PN \parallel CD$. Како је $CD \perp AB$, односно MN, то је и $PN \perp MN$, тј. $MNPQ$ је правоугаоник.



Сл. уз задатак 845



Сл. уз задатак 849

846. Доказаћемо да је број $(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36$ квадрат природног броја за сваки природан број n. Заиста,

$$(n-3)(n-2)(n-1)(n+1)(n+2)(n+3) + 36 = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) + 36$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) = (n(n^2-7))^2.$$

847. Пошто су бројеви 3 и 8 узајамно прости, довољно је доказати да је број $a + b$ дељив са 3 и са 8. Из услова следи да ab при дељењу са 3 даје остатак 2, што је могуће једино ако један од бројева a и b има остатак 1, а други има остатак 2 при дељењу са 3. Како је збир остатака 3, број $a + b$ је дељив са 3. Слично, при дељењу са 8 број ab има остатак 7, што је могуће једино ако један од бројева a и b има остатак 1, а други 7 или ако један има остатак 3, а други 5. У оба случаја збир остатака је 8, па је број $a + b$ дељив са 8.

848. Скуп $A = \{00, 01, \ldots, 23\}$ садржи бројеве који одређују сате. Ако у сваком броју из скупа A цифре замене места, добијају се 24 броја, међу којима 16 њих који могу представљати секунде.
Скуп $B = \{00, 01, \ldots, 59\}$ садржи бројеве који одређују минуте и секунде. Ако у сваком броју из скупа B цифре замене места, добија се 60 бројева, међу којима има 36 њих који могу представљати минуте. На пример, од бројева 00, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 првих шест одређују број минута на дигиталном часовнику, а последња четири не одређују број минута. Ако у сваком броју из скупа B цифре замене места, добија се 60 бројева међу којима има 16 њих који могу представљати сате. Наведена тврђења се доказују непосредним пребројавањем. Како се сваки број сати може комбиновати са сваким бројем минута и сваким бројем секунди, то је на основу правила производа тражени број једнак $16 \cdot 36 \cdot 16 = 9216$.

849. Нека је N таква тачка да је $\triangle MCN \cong \triangle ABC$ (N је са исте стране праве BC са које је и тачка A) (слика). Тада је $\measuredangle NCA = \measuredangle NCM - \measuredangle ACM = 80° - 20° = 60°$ и како је $CN = CA$, троугао ACN је једнакостраничан, па је и $\measuredangle CNA = 60°$. Следи да је $\measuredangle MNA = 60° - 20° = 40°$. Троугао AMN је једнакокрак, јер је $AN = MN$. Његов угао при врху N је $\measuredangle MNA = \measuredangle CNA - \measuredangle CNM = 60° - 20° = 40°$, па је угао на основици $\measuredangle NMA = 70°$. Како је $\measuredangle CMN = 80°$, то је $\measuredangle CMA = 70° + 80° = 150°$, па је $\measuredangle AMB = 180° - 150° = 30°$.

850. Како је $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$, број јединица у запису траженог броја је дељив са 9 и 11. С друге стране, тражени број је облика

$$101 + 101 \cdot 10^4 + 101 \cdot 10^8 + \cdots$$

или

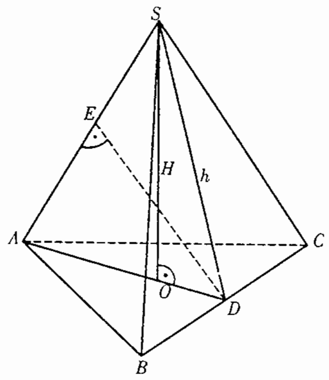
$$1 + 101 \cdot 10^2 + 101 \cdot 10^6 + \cdots,$$

у зависности од тога да ли је број јединица паран или непаран. У првом случају број је дељив са 101, а у другом при дељењу са 101 даје остатак 1. Дакле, број јединица у запису датог броја мора бити паран. Најмањи паран природан број који је дељив са 9 и 11 је 198. Тражени број у запису садржи 198 јединица и 197 нула, тј. има укупно 395 цифара.

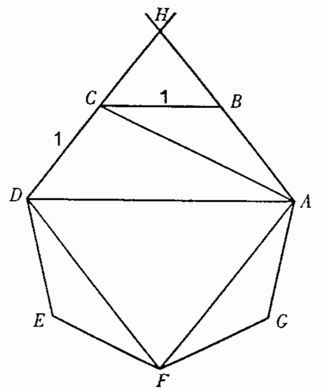
851. Троуглови AOS и ADE су слични јер је $\measuredangle AOS = \measuredangle DEA = 90°$ (из услова задатка) и $\measuredangle OSA = \measuredangle ADE$ (као углови са нормалним крацима) (слика). Из уочене сличности поставимо пропорцију $AD : AS = AE : AO$, одакле делимичном заменом добијамо

(1) $$a^2 = 2AE \cdot AS.$$

Даље, из услова задатка имамо $AE : ES = 9 : 8$ и $AS = AE + ES$, па је $ES = \frac{8}{9}AE$ и $AS = \frac{17}{9}AE$. Заменом у једнакости (1) добијамо $AE = \frac{9}{\sqrt{34}}\,\mathrm{dm}$ и $AS = \frac{17}{\sqrt{34}}\,\mathrm{dm}$. Из правоуглог троугла AOS је $OS^2 = AS^2 - AO^2$, где је $AO = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,\mathrm{dm}$. Даље добијамо $OS^2 = \frac{11}{2}\,\mathrm{dm}^2$. Применом Питагорине теореме на ΔODS који је, такође, правоугли, важи да је $SD^2 = OD^2 + OS^2$, где је $OD = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{dm}$. Сада је висина бочне стране $SD = \frac{5}{2}\,\mathrm{dm}$, па заменом у формули $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a\cdot SD}{2}$ добијамо да је површина правилне тростране пирамиде $P = \frac{9}{4}(\sqrt{3}+5)\,\mathrm{dm}^2$.



Сл. уз задатак 851



Сл. уз задатак 853

852. Сређивањем леве стране неједнакости добијамо

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right| = \frac{|a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b|}{abc}$$
$$= \frac{|a^2c+b^2a+c^2b-b^2c-c^2a-a^2b+abc-abc|}{abc}$$
$$= \frac{|(b-c)(c-a)(a-b)|}{abc}.$$

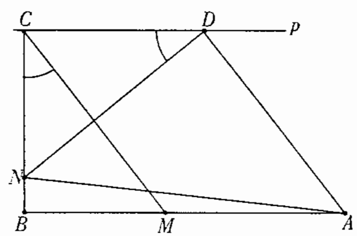
Како су a, b и c странице троугла, то је $|b-c| < a$, $|c-a| < b$ и $|a-b| < c$, па је

$$\left|\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{b}{a}-\frac{c}{b}-\frac{a}{c}\right| = \frac{|b-c|}{a}\cdot\frac{|c-a|}{b}\cdot\frac{|a-b|}{c} < 1.$$

853. Продужимо странице AB и DC до пресека у тачки H (слика). Како је $AHDF$ ромб, јер је $AH \parallel DF$, $DH \parallel FA$ и $AF = DF$, и како је $AC = AF$, то је $AC = AH$. Из сличности троуглова HBC и HAD, имамо $\frac{BC}{AD} = \frac{BH}{AH}$, тј. $\frac{1}{AD} = \frac{AH-1}{AH} = \frac{AC-1}{AC}$, па је $\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = 1$.

854. Нека је A једна плава тачка и B њој дијаметрално супротна тачка. Преостале тачке су крјаеви тетива које су нормалне на пречник AB. Ако је B плава тачка, тада једна од тих тетива има црвене крајеве, па је A средиште лука одређеног том тетивом. Ако је B црвена тачка, тада према услову задатка постоји тетива чији су крајеви плави. Како међу преосталим тачкама има мање црвених него плавих тачака, постоји и тетива са црвеним крајевима. И у овом случају тачка A је средиште лука одређеног том тетивом.

855. Означимо $CN = BM = x$ и $AM = BC = y$. Нека је p права паралелна са AB која садржи тачку C и D тачка те праве таква да је $AMCD$ паралелограм (слика). Правоугли троуглови MBC и NCD су подударни ($MB = NC = x$, $BC = CD = AM = y$), па је $\angle BCM = \angle CDN$. Како је $DC \perp BC$, одатле се лако изводи да је $DN \perp MC$. Како је $MC \parallel AD$, то је и $DN \perp AD$. При том је $DN = MC = AD$, тј. троугао NDA је једнакокраки и правоугли, па је $\angle NAD = 45°$. Дакле, права AN сече праву AD под углом од $45°$, па значи да сече и њој паралелну праву CM такође под углом од $45°$.



Сл. уз задатак 855

856. Одредимо најпре колико има троуглова на које је подељен дати квадрат. Код сваког од темена тих троуглова које лежи унутар квадрата сустиче се неколико углова чији је збир $360°$, док се код сваког темена квадрата сустиче неколико углова чији је збир $90°$. Укупан збир тих углова је, дакле, $2005\cdot 360° + 4\cdot 90°$. Како је збир углова у сваком од троуглова $180°$, то је тражени број троуглова

$$\frac{2005\cdot 360° + 4\cdot 90°}{180°} = 4012.$$

Претпоставимо сада, супротно тврђењу, да је површина сваког од датих троуглова већа од $\frac{1}{1003}$. Онда би збир површина свих троуглова био већи од $4012\cdot\frac{1}{1003} = 4$, дакле већи од површине датог квадрата, што је немогуће. Тиме је доказано да постоји троугао чија површина није већа од $\frac{1}{1003}$.

857. Једноставним трансформацијама се показује да је дата неједнакост еквивалентна свакој од следећих:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2-1}{4} \leqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{16},$$
$$3(a^2+b^2+c^2+d^2) - 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \leqslant 4,$$
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2 \leqslant 4. \qquad (1)$$

Не ограничавајући општост, можемо претпоставити да је $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d$. Користећи чињеницу да је $x^2 \leqslant x$ за $0 \leqslant x \leqslant 1$, добијамо да тада важи

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(b-c)^2+(b-d)^2+(c-d)^2$$
$$\leqslant (a-b)+(a-c)+(a-d)+(b-c)+(b-d)+(c-d)$$
$$= 3(a-d)+(b-c) \leqslant 4(a-d) \leqslant 4,$$

јер је $b-c \leqslant a-d$ и $a-d \leqslant 1$. Тиме је неједнакост (1), а са њом и дата неједнакост, доказана. Једнакост важи ако и само ако су два од датих бројева a, b, c, d једнака 1, а друга два једнака 0.

858. Дата једначина може се написати у облику

$$2(x+y)^2+(x-y)^2=664. \tag{1}$$

Бројеви $x+y$ и $x-y$ су исте парности. Из (1) следи да су оба парна.
Нека је $x+y=2m$ и $x-y=2t$, где су m и t цели бројеви. Тада се (1) може написати у облику

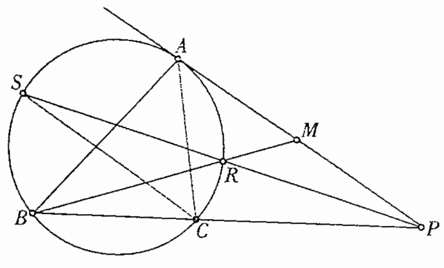
$$2m^2+t^2=166, \tag{2}$$

одакле закључујемо да су t и t^2 парни бројеви, док је m непаран. (Ако су и t и m парни, онда бисмо са леве стране у (2) имали број дељив са 4, а са десне број који није дељив са 4.)
Нека је $t=2k$ и $m=2n+1$, где је k цео, а n ненегативан цео број. Из (2) тада следи да је

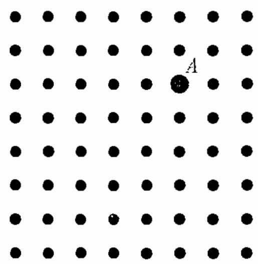
$$k^2=41-2n(n+1). \tag{3}$$

Дакле, $41-2n(n+1)\geqslant 0$. Та неједнакост је задовољена само за $n=0,1,2,3,4$. Међутим, само за $n=4$ је број на десној страни једначине (3) потпун квадрат, $k^2=1$. Дакле, $k=1$, $n=4$, $m=9$, $t=2$, $x=11$, $y=7$ или $k=-1$, $n=4$, $m=9$, $t=-2$, $x=7$, $y=11$. Непосредно се порверава да су парови $(x,y)=(11,7)$ и $(x,y)=(7,11)$ решења дате једначине.

859. Не умањујући општост, претпоставимо да тачка C припада дужи BP (слика). Имајући у виду потенцију тачке M у односу на кружницу, имамо да је $MA^2=MR\cdot MB$, дакле и $MP^2=MR\cdot MB$. Из последње једнакости закључујемо да су троуглови MRP и MPB слични. Из те сличности следи да је $\measuredangle MPR=\measuredangle MBP$. Како је и $\measuredangle PSC=\measuredangle MBP$ (периферијски углови над истим луком), то је и $\measuredangle MPR=\measuredangle PSC$, одакле следи тврђење.



Сл. уз задатак 859



Сл. уз задатак 860

860. (а) Такве тачке су темена једног квадрата и његов центар (пресек дијагонала).
(б) Посматрајмо квадрат 7×7 издељен на јединичне квадрате и 64 тачке које су темена тих квадрата (слика). На слици се могу уочити $\binom{8}{2}\binom{8}{2}=784$ правоугаоника са страницама на линијама мреже. Сваки од тих правоугаоника одређује 4 различита правоугла троугла (са теменима у три темена правоугаоника). Различити правоугаоници одређују различите троуглове. На тај начин добија се $784\cdot4=3136>2005$ различитих правоуглих троуглова са теменима у датим тачкама. (Јасно је да има и других правоуглих троуглова који нису обухваћени овим поступком.)

861. Дата једнакост еквивалентна је са

$$9(11a+b)=(a+b+c)(abc-1),$$

где су a,b,c једноцифрени позитивни бројеви. Лева страна претходне једнакости је дељива са 9, па је таква и десна. При том, бар један од чинилаца на десној страни мора бити дељив са 9. Заиста, ако је само $a+b+c\equiv 0 \pmod 3$ и $abc-1\equiv 0 \pmod 3$, онда је $a\equiv b\equiv c\equiv 1 \pmod 3$ и $11a+b\equiv 0 \pmod 3$, па је лева страна дељива са 27. Закључујемо да је $a+b+c\equiv 0 \pmod 9$ или $abc-1\equiv 0 \pmod 9$.
(1) Ако је $abc-1\equiv 0 \pmod 9$, онда је $11a+b=(a+b+c)k$, где је k цео број и $1<k\leqslant 10$. Дакле, треба да испитамо случајеве $k=2,3,4,5,6,7,8,9,10$. Ако је $k=2,4,5,6,8,9,10$, онда број $9k+1=abc$ има прост делитељ већи од 9, што је немогуће. Преостаје да размотримо случајеве $k=3$ и $k=7$.
Ако је $k=3$, онда је $8a=2b+3c$ и $abc=28$. Јасно је да је c паран број, $c=2c_1$, и важи $4a=b+3c_1$ и $abc_1=14$. Лако се види да су b и c_1 непарни, па постоје две могућности: $a=2, b=7, c_1=1$ и $a=2, b=1, c_1=7$. Ни у једном од ова два случаја не постоји решење.
Ако је $k=7$, онда је $4a=6b+7c$ и $abc=64$. Јасно је да је c паран број, $c=2c_1$, и важи $2a=3b+7c_1$ и $abc_1=32$. Лако се види да b и c_1 морају бити парни бројеви. Међутим, то је немогуће, јер то повлачи да је $a>9$. Дакле, ни у овом случају нема решења.
(2) Размотримо случај кад је $a+b+c\equiv 0 \pmod 9$, тј. $a+b+c=9l$, где је l природан број.
Ако је $l\geqslant 2$, онда је $a+b+c\geqslant 18$, $\max\{a,b,c\}\geqslant 6$ и лако се види да је $abc\geqslant 72$ и $abc(a+b+c)>1000$, па је случај $l\geqslant 2$ немогућ.
Ако је $l=1$, имамо $11a+b=abc-1$, тј.

$$11a+b+1=abc\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3=27.$$

Сада постоје две могућности: $a=1$ и $a=2$.
Ако је $a=2$, онда је $b(2c-1)=23$, па не постоји решење.
Ако је $a=1$, тада је $b+c=8$ и $11+b=bc-1$ или $b+(c-1)=7$ и $b(c-1)=12$, дакле могућа решења су $(a,b,c)=(1,3,5)$ и $(a,b,c)=(1,4,4)$. Лако се проверава да троцифрени бројеви 135 и 144 задовољавају услове задатка.

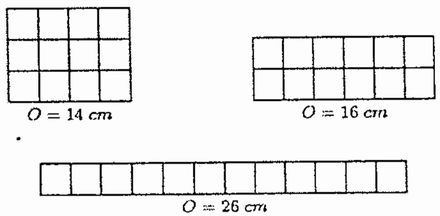
2006. година

862. Како је $27 \cdot 10^6 = 27\,000\,000$ и $3 \cdot 10^7 = 30\,000\,000$, то је $3 \cdot 10^7$ веће од $27 \cdot 10^6$.

863. Површина дате фигуре P једнака је збиру површина квадрата странице 4 m и правоугаоника страница 3 m и 10 m, (или збиру површина правоугаоника страница 4 m и 7 m и правоугаоника страница 3 m и 6 m), то јест $P = 46\,\mathrm{m}^2$.

864. Како је $1+2+3+\cdots+2006 = (1+2006)+(2+2005)+\cdots+(1003+1004) = 1003\cdot 2007$, то је тражени збир 2 013 021.

865. Могуће је направити следећа три правоугаоника:



Сл. уз задатак 865

Најмањи обим има први правоугаоник.

866. Да би тражени број био непаран, цифра јединица мора да буде 1 или 3. Највећи такав број је онај коме је прва цифра (цифра стотина хиљада) највећа, па су све остале цифре 0. Због тога, највећи тражени шестоцифрен број је 300 001.

867. Скуп X који задовољава услов задатка може бити $\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{2,3,4\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{3,4,5\}$ или $\{2,3,4,5\}$.

868. Како је $\alpha = 180^\circ - \beta$, то је $180^\circ - 2\beta = 48^\circ$. Следи да је $\beta = 66^\circ$, па је њему комплементан угао од 24°.

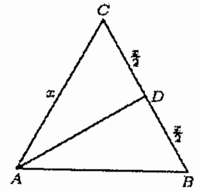
869. Како је 520 дељив са 4 а није са 3, мора $\overline{17a}$ бити дељив са 3. Следи да $a \in \{1,4,7\}$.

870. Ако дужину дужи QB обележимо са x, онда ће дужина дужи AP бити $2x$, а дужина дужи PQ ће бити $4x$. Како је $7x = 28\,\mathrm{cm}$, следи да је $x = 4\,\mathrm{cm}$. Према томе, дужине дужи AP, PQ и QB су 8 cm, 16 cm и 4 cm. Како су M и D средишта дужи AP и QB, то је дуж MD једнака збиру дужи MP, PQ и QD, па је њена дужина 22 cm.

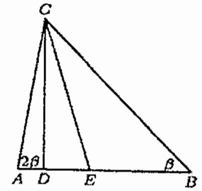
871. Како је $D(21,24,27) = 3$, дужина ивица исечених коцки је 3 cm, а има укупно $7\cdot 8\cdot 9 = 504$ коцке. Коцки које немају ниједну обојену страну ('унутрашње коцке') има $5\cdot 6\cdot 7 = 210$, са две обојене стране ('ивичне коцке') има $5\cdot 4 + 6\cdot 4 + 7\cdot 4 = 72$, а са три обојене стране ('темене коцке') има 8. Према томе, коцки које имају само једну обојену страну има $504 - (210 + 72 + 8) = 214$.

872. Нека је цифра десетица траженог броја x, а цифра јединица y. Из $\overline{xy} = 4(x+y)$ добија се $10x + y = 4x + 4y$, односно $2x = y$. Решења су 12, 24, 36 и 48.

873. Како троуглови ABD и ADC имају заједничку страницу AD и једнаке странице BD и DC, то је основица AB за 1 cm дужа од крака AC. Ако је x дужина (у cm) крака AC, обим трогла ABC је $3x+1$, па је $x = 8$. Према томе, дужина основице AB је 9 cm.



Сл. уз задатак 873



Сл. уз задатак 875

874. Обележимо са n природан број који задовољава услов задатка, а са q количник који се добија при дељењу n са 6. Тада је $n = 6q + q$, тј. $n = 7q$. Мора бити $q < 6$, јер је q истовремено и остатак при дељењу природног броја са 6. Такође је $q > 0$, јер је n природан број. Према томе, $n \in \{7, 14, 21, 28, 35\}$. Тражени збир је 105.

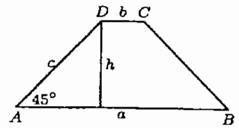
875. Нека је тачка D подножје висине из темена C, тачка E пресек симетрале $\measuredangle ACB$ и странице AB, а $\measuredangle ABC = \beta$. Тада је $\measuredangle BAC = 2\beta$, а $\measuredangle ECB = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\beta - \beta) = 90^\circ - \frac{3}{2}\beta$. Из правоуглог троугла BCD добијамо да је $\measuredangle DCB = 90^\circ - \beta$, па је $\measuredangle DCB$ већи од $\measuredangle ECB$ за $\frac{1}{2}\beta$. Према томе, $\measuredangle DCE = \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}(\measuredangle BAC - \measuredangle ABC)$.

876. За пешачење у једном смеру потребно му је $7 : 2 = 3\frac{1}{2}$ сати, што значи да му за јахање у једном смеру треба $5\frac{1}{4} - 3\frac{1}{2} = 1\frac{3}{4}$ сати. Да је јахао у оба смера требало би му $2 \cdot 1\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}$ сати.

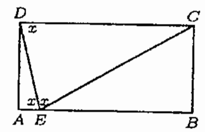
877. Како је $\sqrt{7} < 3$, то је $7 - \sqrt{7} > 7 - 3 = 4$. Следи да је $\sqrt{7 - \sqrt{7}} > 2$.

878. Како је $8^{2n+1} \cdot 16^n = (2\cdot 4)^{2n+1} \cdot 4^{2n} = 2^{2n+1} \cdot 4^{4n+1}2 \cdot 4^n \cdot 4^{4n+1} = 2 \cdot 4^{5n+1}$, следи да је вредност датог израза једнака 2.

879. Нека су a и b дужине основица, c дужина крака, а h дужина висине (све у cm) датог трапеза. Из $h\dfrac{a+b}{2} = 32$ следи да је $a + b = 32 : \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$. Како је оштар угао трапеза 45°, то је $c = h\sqrt{2} = 4$. Према томе, обим датог трапеза је $8(2\sqrt{2} + 1)$ cm.



Сл. уз задатак 879



Сл. уз задатак 881

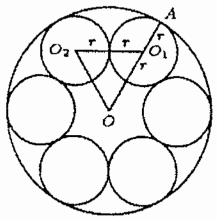
880. Ако су x и y цифре јединица датих бројева, из услова задатка добијамо да је $\overline{6x} \cdot \overline{6y} = \overline{x6} \cdot \overline{y6}$. Из једнакости $(60 + x)(60 + y) = (10x + 6)(10y + 6)$ следи $3600 + xy = 100xy + 36$, односно $xy = 36$. Како су x и y цифре, оне могу бити једино 4 и 9, па су тражени бројеви 64 и 69.

881. Како је $\measuredangle DEC = \measuredangle AED = \measuredangle EDC$, следи да је $CE = CD$, односно $CE = AB$. У правоуглом троуглу EBC хипотенуза EC два пута је већа од катете BC. Према томе, $\measuredangle CEB = 30^\circ$, што значи да је $\measuredangle AED = \measuredangle DEC = 75^\circ$.

882. Како је квадрат било ког реалног броја ненегативан број, добијамо да је $4x^2-4x+3=(2x-1)^2+2 \geqslant 2>0$.

883. Нека су дужине катета a и b (у cm). По услову задатка је $a+b=22$ и $ab=(a-4)(b+2)$. Из друге једначине добија се $2a-4b=8$, тј. $a-2b=4$. Решавањем система једначина $a+b=22$, $a-2b=4$ добијамо $a=16$, $b=6$.

884. Множењем датих једнакости добијамо $(xy)\cdot(yz)\cdot(zx)=20\cdot35\cdot28$ тј. $(xyz)^2=140^2$. Следи да је $xyz=140$ или $xyz=-140$. Решења су $x=4$, $y=5$, $z=7$, односно $x=-4$, $y=-5$, $z=-7$.



Сл. уз задатак 885

885. Нека је O центар велике кружнице, O_1 и O_2 центри две суседне мале кружнице k_1 и k_2 и нека је A тачка додира велике кружнице и кружнице k_1 (слика). Тада је OA полупречник велике кружнице који садржи тачку O_1. Како је $OO_1=OO_2=R-r$ и $\measuredangle O_1OO_2=\frac{1}{6}360°=60°$, то је троугао OO_1O_2 једнакостраничан. Због тога је $OO_1=O_1O_2$, то јест $R-r=2r$. Следи да је $R=3r$.

886. Означимо са a и b две различите цифре које се појављују у четвороцифреном броју, с тим што ћемо са a означити цифру на првом месту. Сваки број који задовољава услове задатка припада једном од следећих седам типова: $aaab$, $aaba$, $abaa$, $aabb$, $abab$, $abba$, $abbb$. Сваки тип садржи $9\cdot9$ бројева. Наиме, цифра a се може изабрати на 9 начина (различита од 0), а цифра b такође на 9 начина (различита од a). Према томе, има укупно $7\cdot9\cdot9=567$ четвороцифрених бројева са тачно две различите цифре.

887. Највећи такав број је 976320, а најмањи 203679. Њихова разлика је $976320-203679=772641$.

888. Решења ове неједначине су сви природни бројеви већи од 2006 и мањи од 8008, тј. $x\in\{2007,2008,\dots,8007\}$. Тражених решења има $8007-2006=6001$.

889. Преклопљени део је, очигледно, квадрат странице 3 cm. Обим добијене фигуре (у cm) је $15+2\cdot3+12+2\cdot12+3=60$.

890. Ако дужину краће странице правоугаоника означимо са x (у cm), онда је дужина дуже странице тог правоугаоника једнака $4x$. Како је његов обим 20 cm, следи да је $2\cdot(4x+x)=20$, односно $x=2$. Дужина странице квадрата је $4x$, тј. 8 cm, а његова површина 64 cm^2.

891. За нумерацију првих 100 страна употребљено је 20 седмица, и то за нумерацију следећих страна: 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 87 и 97. Слично, за нумерацију наредних 200 страна употребљено је још 40 седмица, тако да је остало 17 седмица. Значи да књига има 378 страна, односно 189 листова.

892. Провером за $x\in\{0,1,\dots,9\}$ добијају се два решења: $x=6$, $y=5$ и $x=9$, $y=2$.

893. Како је по услову задатка $A=\{500,501,\dots,2005\}$ и $B=\{1000,1002,\dots,2006\}$, добијамо да је $A\setminus B=\{500,501,\dots,999,1001,1003,\dots,2005\}$ и $B\setminus A=\{2006\}$. Следи да је $A\star B=\{500,501,\dots,999,1001,1003,\dots,2005,2006\}$.

894. Означимо већи угао са α, а мањи са β. Како је $\frac{8}{9}$ правог угла $80°$, а $\frac{1}{4}$ правог угла $22°30'$, то је $\alpha=\beta+22°30'$, а $\alpha+\beta=80°$. Одатле следи да је $2\beta+22°30'=80°$, па је $2\beta=57°30'$. Коначно, добијамо да је $\beta=28°45'$, а $\alpha=51°15'$.

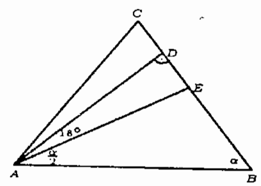
895. Множењем два двоцифрена броја добија се број који може да има **или 3 или 4 цифре**, јер је $10\cdot10=100$, а $99\cdot99=9801$. Како је $7777=7\cdot11\cdot101$, а 101 **је прост број, следи** да производ два двоцифрена броја не може бити 7777. С обзиром да је $777=3\cdot7\cdot37$, једини двоцифрени бројеви који задовољавају услове задатка су 21 и 37.

896. Сем 2. јануара који је био петак, у години је било још 52 петка, што значи да је та година имала $2+7\cdot52=366$ дана, тј. да је била преступна. У таквој години, између 1. јануара и 1. априла има тачно $30+29+31=90$ дана, што значи да је 1. април 92. дан у години. Како је $92=7\cdot13+1$, а 1. јануар је био четвртак, следи да је 1. април био такође четвртак.

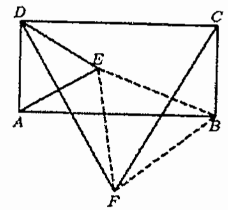
897. Како је $\frac{21}{37}=0,\overline{567}$, а $2006=3\cdot668+2$, на 2006-ом месту иза децималне запете налази се цифра 6.

898. Нека је ученик требало да сабере бројеве x и y. По услову задатка је $x+y=62{,}5876$. Како се померањем децималне запете за два места удесно број повећа 100 пута, то је $x+100y=295$. Даље добијамо да је $99y=295-62{,}5876$, па је $y=2{,}3476$, а $x=60{,}24$.

899. Нека су D и E тачке у којима висина из темена A, односно симетрала угла код темена A секу крак BC. Угао на основици обележимо са α. Како је AE симетрала угла код темена A, то је $\measuredangle BAE=\frac{\alpha}{2}$, па је $\measuredangle BAD=\frac{\alpha}{2}+18°$. Троугао ABD је правоугли, па је $\measuredangle BAD+\measuredangle ABD=90°$, тј. $\frac{\alpha}{2}+18°+\alpha=90°$. Следи да је $\frac{3}{2}\alpha=72°$, односно $\alpha=48°$.



Сл. уз задатак 899



Сл. уз задатак 900

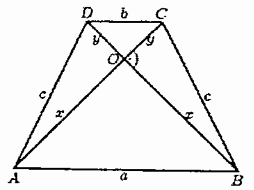
900. Како је $\measuredangle BCF=90°-\measuredangle FCD=30°$ и $\measuredangle EDF=\measuredangle EDA-\measuredangle FDA=60°-(90°-\measuredangle CDF)=30°$, то су ова два угла једнака. Такође је $BC=AD=ED$ и $CF=DF$, па на основу става СУС следи да је $\triangle BCF\cong\triangle EDF$. Одатле је $FB=FE$. Како је и $\measuredangle CFB=\measuredangle DFE$, добијамо да је $\measuredangle EFB=\measuredangle DFC=60°$. Према томе, $\triangle BEF$ је једнакокраки са углом између кракова од 60°, па је једнакостраничан.

901. Сабирајући 5 сабирака из скупа $\{-1,0,1\}$ могуће је добити 11 збирова, и то: $-5,-4,\dots,4,5$. Како врста, колона и дијагонала у таблици има 12, по Дирихлеовом принципу бар два збира морају бити једнака.

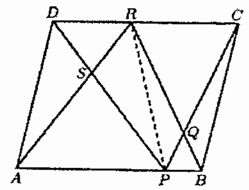
902. Из $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$ следи да је $\frac{a}{b}+1=2-\sqrt{2}$, тј. $\frac{a}{b}=1-\sqrt{2}$. Одатле је $\frac{b}{a}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=-(1+\sqrt{2})$. Како је $\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, вредност датог израза је $(1-\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}$.

903. Нека је тачка O пресек дијагонала датог трапеза и нека су x и y дужине дужи AO и CO (слика). Тада су и дужине дужи BO и DO такође x и y. Како су троуглови

ABO, CDO и BCO правоугли, користећи Питагорину теорему добијамо да је $a^2 = 2x^2$, $b^2 = 2y^2$ и $c^2 = x^2 + y^2$. Одатле следи да је $2c^2 = a^2 + b^2$, па је $c = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$.



Сл. уз задатак 903



Сл. уз задатак 905

904. Како је $a = 2^{2003} \cdot (2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{2003}$, $b = 2^{2004} \cdot (1 - 2 + 2^2) = 3 \cdot 2^{2004} = 6 \cdot 2^{2003}$ и $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$, узимајући да је $2^{2003} = A$, добијамо да је $a^2 = 9A^2$, $b^2 = 36A^2$ и $c^2 = 27A^2$. Следи да је $a^2 + c^2 = b^2$.

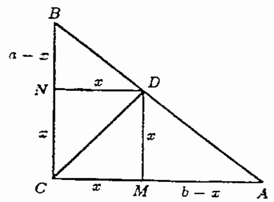
905. У трапезу $APRD$ троуглови APR и APD имају једнаке површине, што значи да и троуглови PRS и ASD имају једнаке површине (слика). На исти начин се показује да и троуглови PQR и BCQ имају једнаке површине. Према томе, површина четвороугла $PQRS$ је једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ.

906. Претпоставимо супротно, тј. да је у свакој групи производ бројева мањи од 72. Тада би производ бројева у свакој од група био мањи или једнак 71, па би производ свих бројева био мањи или једнак 71^3, односно 357911. Међутим, производ бројева од 1 до 9 је 362880. Према томе, дата претпоставка није тачна, односно постоји група у којој производ бројева није мањи од 72.

907. Како је $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = a^2$, следи да је $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2$. Даље је $\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2 = (a^2-2)^2$, па је $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = (a^2-2)^2 - 2$, тј. $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = a^4 - 4a^2 + 2$.

908. Множењем почетне једнакости са $1000(x+y+z)$ добијамо да је $1000 = \overline{xyz} \cdot (x+y+z)$. Како је $x+y+z \leqslant 27$, могућа су следећа представљања броја 1000 као производа два броја: $500 \cdot 2$, $250 \cdot 4$, $200 \cdot 5$, $125 \cdot 8$, $100 \cdot 10$, $50 \cdot 20$ и $40 \cdot 25$. Провером налазимо да је једино решење задатка: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$.

909. Обележимо са M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC. Како дуж CD полови прав угао ACB, следи да су троуглови CMD и CND једнакокрако правоугли, па је четвороугао $MDNC$ квадрат. Обележимо дужину његове странице са x. Како је површина троугла ABC једнака збиру површина троуглова CDB и ADC, добијамо да је $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{ax}{2} + \dfrac{bx}{2}$. Одатле следи да је $x = \dfrac{ab}{a+b}$. Како је CD дијагонала квадрата $MDNC$, то је њена дужина $x\sqrt{2}$, тј. $\dfrac{ab}{a+b}\sqrt{2}$.



Сл. уз задатак 909

910. За $x < 1$ дата једначина је еквивалентна са $1 - x + 2 - x = a$. Следи да је $x = \dfrac{3-a}{2}$, па једначина има највише једно решење без обзира на a. Слично, за $x \geqslant 2$ дата једначина је еквивалентна са $x - 1 + x - 2 = a$, па је $x = \dfrac{a+3}{2}$. Опет, без обзира на a једначина има највише једно решење. За $1 \leqslant x < 2$ дата једначина је еквивалентна са $x - 1 + 2 - x = a$, односно са $a = 1$, па ако је $a \neq 1$ нема решења, а ако је $a = 1$ има бесконачно много решења. На основу сва три случаја закључујемо да дата једначина за $a \neq 1$ има највише два решења, док за $a = 1$ има бесконачно много решења.

911. Растојања од пресека дијагонала до ивица квадра једнака су половинама дужина дијагонала страна квадра. Означимо дужине ивица квадра са a, b и c (у cm) тако да је $a^2 + b^2 = 14^2$, $b^2 + c^2 = 16^2$ и $a^2 + c^2 = 18^2$. Из прве две једнакости добијамо да је $a^2 + c^2 + 2b^2 = 14^2 + 16^2 = 452$, па користећи и трећу једнакост израчунавамо да је $2b^2 = 452 - 18^2$. Следи да је $b^2 = 64$. Даље се лако добија да је $a^2 = 132$ и $c^2 = 192$, па је $a = 2\sqrt{33}$, $b = 8$ и $c = 8\sqrt{3}$. Запремина квадра (у cm^3) је $V = abc = 384\sqrt{11}$.

912. Дељењем броја 2030 редом једноцифреним бројевима 1, 2, ..., 9 добија се да је 2030 дељив само бројевима 1, 2, 5, и 7, тј. да је $2030 = 2030 \cdot 1 = 1015 \cdot 2 = 406 \cdot 5 = 290 \cdot 7$. Решења су 406 и 290.

913. Површина дате фигуре једнака је површини осам малих квадрата, па је површина малог квадрата $25\,\text{mm}^2$, а дужина његове странице 5 mm. Обим дате фигуре (у mm) је $16 \cdot 5 = 80$.

914. Погледајмо спискове са именима такмичара. Укупно се на сва три списка налази 90 имена. Од тог броја 23 имена су само на једном од тих спискова, а 23 се налазе на по два списка. Како је $23 + 2 \cdot 23 = 69$, на списковима остаје укупно 21 име, при чему су то уствари 7 имена која се налазе на сва три списка. Према томе, 7 ученика је учествовало на сва три такмичења.

915. Број који је при дељењу са 11 дао резултат 21 је 231. Када уклонимо цифру 1 која је дописана, остаје број 23. Слично, из $13 \cdot 23 = 299$ закључујемо да је пре дописивања цифре 9 био број 29. Дакле, почетни број је 29.

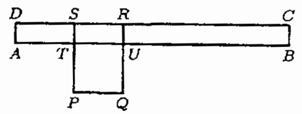
916. Ако на највећу коцку ставимо средњу коцку, тада је површина насталог тела једнака збиру површина тих коцки умањеном за двоструку површину једне стране средње коцке. Како је $6 \cdot 3^2 + 6 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^2 = 70$, та површина је $70\,\text{cm}^2$. Ако сад мању коцку прислонимо уз обе коцке, површина новог тела је најмања могућа и једнака је збиру површина првоформираног тела и најмање коцке, умањеном за четвороструку површину једне стране најмање коцке. Та површина (у cm^2) је $70 + 6 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1^2 = 72$.

917. Ако је x број белих, тада је $\dfrac{7}{8}x$ број црвених ружа. Из услова задатка добијамо једначину $\dfrac{7}{8}x + 7 = x - 7$, чије је решење број 112. Дакле, белих ружа има 112, а црвених $\dfrac{7}{8} \cdot 112$, односно 98.

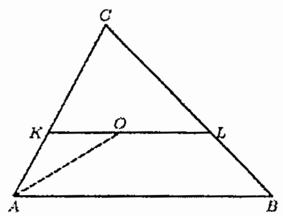
918. Од 5 узастопних природних бројева бар један мора бити дељив са 2, бар један са 3 и бар један са 5, па производ тих 5 бројева мора бити дељив и са 10 и са 3. Због тога, цифра јединица мора бити 0, а ако цифру стотина обележимо са a, збир $9 + 5 + a + 4 + 0$ мора бити дељив са 3. Следи да је a из скупа $\{0, 3, 6, 9\}$. Провером за свако a из овог скупа следи да је једино за $a = 0$ добијени број производ 5 узастопних природних бројева и то $95040 = 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12$.

919. Из $E \subset B$ следи да је $a = 1$. Из $B \subset A$ закључујемо да је или $c = 4$ или $d = 4$. Не може бити $c = 4$, јер и c и 4 припадају скупу C, па је $d = 4$. Даље, из $D \subset A$ следи да је $c = 3$. Коначно, из $C \subset A$ закључујемо да је $b = 2$.

920. Како је површина правоугаоника $TURS$ једнака $\frac{2}{7}$ површине правоугаоника $PQRS$, следи да је површина квадрата $PQUT$ једнака $\frac{5}{7}$ површине правоугаоника $PQRS$, па је површина правоугаоника $PQRS$ једнака $35\,\mathrm{cm}^2$. Одатле следи да је површина правоугаоника $TURS$ једнака $10\,\mathrm{cm}^2$. Како је то $\frac{2}{11}$ површине правоугаоника $ABCD$, добијамо да је површина правоугаоника $ABCD$ једнака $55\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз задатак 920



Сл. уз задатак 923

921. Добијени низ је 2357111317192329 и он садржи 16 цифара, тако да након брисања 9 цифара остаје седмоцифрен број. Како је цифра 9 на петом месту гледано са десне стране, она не може бити прва цифра траженог броја, већ испред ње треба узети две цифре. Тражени број ће бити највећи ако за те две цифре узмемо седмице. Дакле, брисањем цифара 2, 3, 5, 1, 1, 1, 3, 1, 1 остаје број 7792329 који је највећи могућ.

922. Нека су x и y поменути бројеви. Тада је $\frac{7}{9}x-\frac{7}{9}y=\frac{7}{9}(x-y)=\frac{3}{7}$, па је $x-y=\frac{27}{49}$. Следи да је $\frac{3}{4}y-\frac{3}{4}x=-\frac{3}{4}(x-y)=-\frac{81}{196}$.

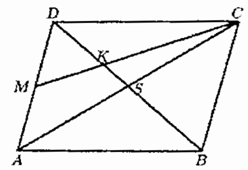
923. Тачка O је центар кружнице уписане у троугао ABC, па је AO симетрала угла BAC (слика). Због тога је $\angle KAO=\angle OAB$. Како је $KO \parallel AB$, следи да је $\angle OAB=\angle AOK$, па је $\angle KAO=\angle AOK$. Троугао AOK је једнакокраки, па је $KA=KO$. Аналогно се добија да је $LB=LO$. Ако је $O_{\triangle ABC}$ обим троугла ABC, онда је $O_{\triangle ABC}=AB+BC+CA=AB+BL+LC+CK+KA=AB+(OL+LC+CK+KO)=c+s$.

924. Како су све цифре којима се записује тражени број парне, следи да ће и тај број бити паран. Да би био дељив са 18 потребно је још да буде дељив са 9, односно да му збир цифара буде дељив са 9. Најмањи такав збир, узимајући у обзир да су све цифре парне, је 18. Тражени број ће бити најмањи ако му је прва цифра 2, тако да збир осталих цифара треба да буде 16. Најмање цифара чији је збир 16 се користи ако 16 представимо као збир $6+6+2+2$. Тражени број је $20\ldots02266$, где у запису има 2001 нула.

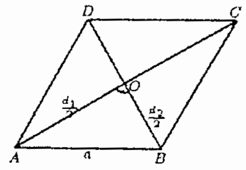
925. Обележимо тачку пресека дијагонала паралелограма са S (слика). Како је S средиште обе дијагонале, следи да је тачка K тежиште троугла ACD, па је $3KD=3\cdot\frac{2}{3}SD=2SD=BD$.

926. Запремина сока од боровнице је два пута већа од запремине сока од рибизле, па је мерни број укупне запремине сока дељив са три. Укупна запремина балона је $7\,\ell$, а како је 74 број који при дељењу са три даје остатак 2, празан је онај балон чији мерни број запремине при дељењу са три такође даје остатак 2. Једини такав балон је онај чија је запремина $14\,\ell$, па је он празан. Следи да је укупна запремина сокова $60\,\ell$, тако да је запремина сока од рибизле $20\,\ell$. Тим соком напуњени су балони од 7 и $13\,\ell$. Балони од 9, 15 и $16\,\ell$ напуњени су соком од боровнице.

927. Из једнакости $\frac{a^2}{a+3}=\frac{a^2-9}{a+3}+\frac{9}{a+3}=a-3+\frac{9}{a+3}$ следи да је $\frac{a^2}{a+3}$ цео број једино ако је $\frac{9}{a+3}$ цео број, односно ако $a+3\in\{-9,-3,-1,1,3,9\}$. Тражени скуп је $\{-12,-6,-4,-2,0,6\}$.



Сл. уз задатак 925

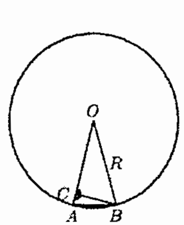


Сл. уз задатак 928

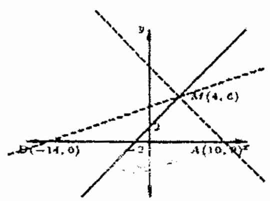
928. Нека је тачка O пресек дијагонала датог ромба $ABCD$. Обележимо са a, d_1 и d_2 дужине (у cm) странице и дијагонала ромба. Обим ромба је 36 cm, па је $a=9$. Дијагонале ромба се полове и нормалне су једна на другу, па применом Питагорине теореме на троугао ABO добијамо да је $(\frac{d_1}{2})^2+(\frac{d_2}{2})^2=a^2$, тј. $d_1^2+d_2^2=324$. На основу услова $d_1+d_2=20$ имамо да је $400=(d_1+d_2)^2=d_1^2+d_2^2+2d_1d_2=324+2d_1d_2$, што значи да је $d_1d_2=38$. Према томе, површина датог ромба је $19\,\mathrm{cm}^2$.

929. Из једнакости $\sqrt{\overline{ab}}=a+\sqrt{b}$ добијамо да је $10a+b=(a+\sqrt{b})^2=a^2+2a\sqrt{b}+b$, односно $10a=a^2+2a\sqrt{b}$. Како је $a\neq 0$, следи да је $a=10-2\sqrt{b}$. То значи да је $\sqrt{b}$ цео број, па b може бити само 0, 1, 4 или 9. Налажењем одговарајуће вредности за a и провером датог услова добијамо да су тражени бројеви: 49, 64 и 81.

930. Нека је O центар датог круга, ABO карактеристични троугао правилног дванаестоугла, а BC висина тог троугла. Како је $\angle AOB=30°$, следи да је $|BC|=\frac{R}{2}$, $|OC|=R\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $|AC|=R-R\frac{\sqrt{3}}{2}$. Применом Питагорине теореме на троугао ABC добијамо да је тражена дужина странице правилног дванаестоугла $|AB|=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.



Сл. уз задатак 930



Сл. уз задатак 933

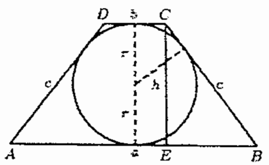
931. Тражени бројеви су облика $\overline{abcba}$. Тих бројева има колико и троцифрених бројева $\overline{abc}$, тј. $9\cdot 10\cdot 10=900$.

932. Нека је година рођења те особе $\overline{abcd}$. По услову задатка је $\overline{abcd}+a+b+c+d=2006$, тј. $1001a+101b+11c+2d=2006$. Мора бити $a=1$ или $a=2$. Ако је $a=1$, онда је

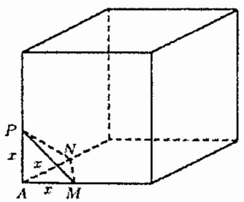
$101b + 11c + 2d = 1005$. Одавде је $b = 9$, па је $11c + 2d = 96$. Провером се добија $c = 8$, $d = 4$. Дакле, једно решење је 1984. Ако је $a = 2$, онда је $101b + 11c + 2d = 4$. Следи да је $b = 0$, $c = 0$ и $d = 2$. Друго решење је 2002.

933. Тачка $M(4,6)$ припада и графику функције $y = x + 2$ и графику функције $y = kx + n$, па је она теме троугла који граде ти графици и x оса (слика). Онда је дужина висине троугла из темена M једнака 6. Како је површина троугла 36, следи да је дужина одговарајуће странице 12. Један крај те странице је у тачки $(-2,0)$, па ће други бити или у $A(10,0)$ или у $B(-14,0)$. График функције $y = kx + n$ садржи или тачке M и A, или M и B. У првом случају из система $6 = 4k + n$ и $0 = 10k + n$, добија се $k = -1$ и $n = 10$. У другом случају из система $6 = 4k + n$ и $0 = -14k + n$, добија се $k = 1/3$ и $n = 14/3$.

934. Нека су дужине (у cm) крака, висине, веће и мање основице трапеза $ABCD$ и полупречника круга редом c, h, a, b и r. Како је $h = 2r = 4$, а површина (у cm^2) $P = 20$, из формуле $P = \dfrac{a+b}{2}h$ добијамо да је $a + b = 10$. Због једнакости тангентних дужи је $c = \dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{2}$, па је $c = 5$. Нека је CE висина датог трапеза. Како је $BE = \dfrac{a-b}{2}$, из правоуглог троугла BCE добијамо да је $\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = 5^2 - 4^2$, па је $a - b = 6$. Даље лако следи $a = 8$, $b = 2$.



Сл. уз задатак 934



Сл. уз задатак 936

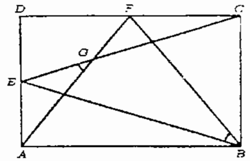
935. Из услова $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$ следи $\dfrac{ab + bc + ca}{abc} = 0$, односно $ab + bc + ca = 0$. Због тога је $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = a^2 + b^2 + c^2$. Како су a, b и c различити од 0, следи $a^2 + b^2 + c^2 > 0$. Према томе, $a + b + c \neq 0$.

936. Обележимо са x дужине (у cm) дужи које раван одсеца од ивица коцке (слика). Како је мањи део на који раван дели коцку тространа пирамида, његова запремина је $\dfrac{x^3}{6}$. Запремина већег дела се добија када се од запремине коцке одузме запремина мањег дела и једнака је $125 - \dfrac{x^3}{6}$. По услову задатка је $(125 - \dfrac{x^3}{6}) : \dfrac{x^3}{6} = 371 : 4$, одакле следи да је $4 \cdot (125 - \dfrac{x^3}{6}) = 371 \cdot \dfrac{x^3}{6}$. Даље је $\dfrac{375}{6} \cdot x^3 = 500$, па је $x^3 = 8$, односно $x = 2$. Већи и мањи део коцке имају заједничку страну (део равни који пресеца коцку), па ће разлика површина тих делова (у cm^2) бити $(3 \cdot 25 + 3 \cdot (25 - \dfrac{2 \cdot 2}{2})) - 3 \cdot \dfrac{2 \cdot 2}{2} = 138$.

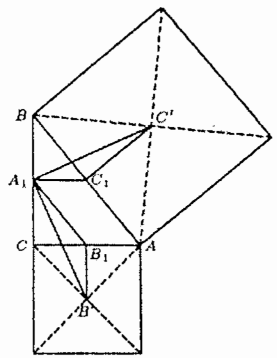
937. Није могуће. Постоји врста у којој се налази број 7 и врста у којој се не налази број 7. У првој врсти је производ бројева дељив са 7, а у другој није, па ти производи не могу бити једнаки.

938. Нека је x цена карте (у динарима) без попуста. Путник је очигледно карту резервисао или 7 или 14 или 30 дана пре путовања. Претпоставимо да је то учинио 7 дана пре путовања. Тада је $0,9 \cdot x = 21\,000$, па је $x = \dfrac{70\,000}{3}$. Да је резервисао 6 дана пре путовања платио би је 25 200 динара и то би била цена карте без попуста, тј. x. Контрадикција. Ако је путник резервисао карту 14 дана пре путовања, тада је $0,75 \cdot x = 21\,000$, па је $x = 28\,000$. Да је резервисао дан касније, морао би да плати $0,9 \cdot x$, а то је 25 200 динара, што је тачно 4 200 динара више. Према томе, путник је карту резервисао 14 дана пре путовања. Што се тиче трећег случаја, сличним резоновањем као у првом случају добија се да је и он неодговарајући.

939. Како је $\triangle ABE \cong \triangle DCE$ (једнаке по две странице и углови између њих), следи да је $\angle ABE = \angle DCE$. Слично, $\triangle BCF \cong \triangle ADF$ (такође једнаке по две странице и углови између њих), па је $FB = FA$. Одатле следи да је $\angle ABF = \angle BAF$. Како је $\angle BAF = \angle AFD$ (углови са паралелним крацима), добијамо да је $\angle ABF = \angle AFD$. На основу свега овога и чињенице да је спољашњи угао једнак збиру два несуседна унутрашња угла троугла добијамо да је $\angle EBF = \angle ABF - \angle ABE = \angle AFD - \angle DCE = \angle FGC = \angle EGA$.



Сл. уз задатак 939



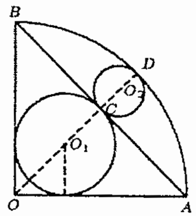
Сл. уз задатак 941

940. У пуном миксеру укупна количина чоколаде је 3,5 пута већа од количине беле чоколаде. Због тога ће црне чоколаде бити $\dfrac{5}{7}$, а беле $\dfrac{2}{7}$ од пуног миксера. За то је потребно да славина за црну чоколаду буде отворена $\dfrac{5}{7} \cdot 23$ минута, а за белу $\dfrac{2}{7} \cdot 17$ минута. Пошто је $\dfrac{5}{7} \cdot 23 - \dfrac{2}{7} \cdot 17 = \dfrac{81}{7}$, славину за белу чоколаду треба отворити $11\dfrac{4}{7}$ минута након отварања славине за црну чоколаду.

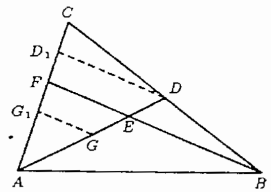
941. Нека су B_1 и B' средиште катете AC и пресек дијагонала квадрата чија је страница та катета, а C_1 и C' средиште хипотенузе AB и пресек дијагонала квадрата чија је страница та хипотенуза (слика). Како је A_1C_1 средња линија троугла ABC, следи да је $A_1C_1 = \dfrac{CA}{2}$, па је $A_1C_1 = B'B_1$. Слично се добија да је $C_1C' = B_1A_1$. Како је још и $\angle A_1C_1B = \angle CB_1A_1$ (углови са паралелним крацима), односно $\angle A_1C_1C' = \angle B'B_1A_1$, следи да је $\triangle A_1C_1C' \cong \triangle B'B_1A_1$. Одавде добијамо да је $A_1C' = A_1B'$, па важи тврђење задатка.

942. Обележимо са x прву цифру траженог, односно последњу цифру новог броја. Како је нови број пет пута већи од траженог, он је дељив са 5, па следи да је $x = 0$ или $x = 5$. Не може бити $x = 0$ јер је x прва цифра траженог броја, а не може ни $x = 5$ јер би тада нови број имао цифру више него тражени број. Следи да не постоји број са траженим својством.

943. Центри O, O_1 и O_2 кругова k, k_1 и k_2 су колинеарне тачке. Нека су C и D додирне тачке кругова k_1 и k_2, односно k_2 и k и нека су r_1 и r_2 дужине полупречника (у cm) кругова k_1 и k_2. Како је $OC = \frac{AB}{2} = 5\sqrt{2}$, $OO_1 = r_1\sqrt{2}$ и $O_1C = r_1$, следи да је $r_1\sqrt{2} + r_1 = 5\sqrt{2}$. Из ове једнакости добијамо да је $r_1 = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 5\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = 5(2-\sqrt{2})$. Слично, из $OD = 10$, $OC = 5\sqrt{2}$ и $CD = 2r_2$, следи да је $5\sqrt{2} + 2r_2 = 10$, односно $2r_2 = 5(2-\sqrt{2})$. Према томе, $r_1 : r_2 = 2$.



Сл. уз задатак 943



Сл. уз задатак 946

944. За $p = 2$ је $p^2+11 = 15$, а делиоци броја 15 су 1, 3, 5 и 15. За $p = 3$ је $p^2+11 = 20$, а делилаца броја 20 има шест и то су : 1, 2, 4, 5, 10 и 20. Ако је $p > 3$, онда је p облика $6k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$, па је $p^2 + 11 = (6k\pm1)^2 + 11 = 36k^2 \pm 12k + 12 = 12\cdot(3k^2 \pm k + 1)$. Дакле, $12 \mid p^2 + 11$ и $p^2 + 11 > 12$. Како број 12 има шест делилаца, следи да број $p^2 + 11$ има више од 6 делилаца јер је међу делиоцима бар још и сам број $p^2 + 11$. Једино решење је $p = 3$.

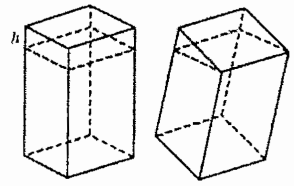
945. Бројеви 1, 2 и 3 имају једноцифрене квадрате који заузимају прва 3 места у датом низу цифара. Бројеви од 4 до 9 (укупно 6 бројева) имају двоцифрене квадрате који заузимају следећих 12 места у датом низу цифара. Бројеви од 10 до 31 (укупно 22 броја) имају троцифрене квадрате који заузимају наредних 66 места у датом низу цифара. Бројеви од 32 до 99 (укупно 68 бројева) имају четвороцифрене квадрате који заузимају следећих 272 места у датом низу цифара. Бројеви од 100 до 316 (укупно 217 бројева) имају петоцифрене квадрате који заузимају још 1085 места у датом низу цифара. Дакле, цифра јединица квадрата броја 316 се налази на 1438. месту у низу. Квадрати следећа 94 броја (од 317 до 410) су шестоцифрени бројеви, па заузимају још 564 места у датом низу, што значи да је цифра јединица квадрата броја 410 на 2002. месту у датом низу цифара. Како је $411^2 = 168921$, то ће 2006. цифра у датом низу бити 9.

946. Нека су D_1, G и G_1 редом средишта дужи FC, AD и AD_1 (слика). Тада је E средиште дужи GD, па су DD_1, GG_1 и EF средње линије троуглова FBC, ADD_1 и трапеза DD_1G_1G. Због тога је $CD_1 = D_1F = FG_1$ и $D_1G_1 = G_1A$. Према томе, $AF : FC = 3 : 2$.

947. Ако је $a+b+c = 2k$, онда је $a+b+d = 8k$, $a+c+d = 8k$ и $b+c+d = 6k$. Тада је $3(a+b+c+d) = 24k$, тј. $a+b+c+d = 8k$, па је $a = 2k$, $b = 0$, $c = 0$ и $d = 6k$. Како су a, b, c и d цифре и $d = 3a$, следи да су решења бројеви 1003, 2006 и 3009.

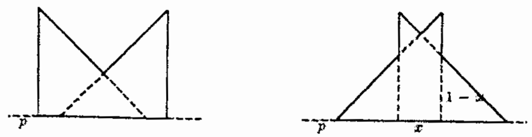
948. (а) Сваки природан број n може се представити у облику $7k + r$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Како је $n^3 = 7(49k^3 + 21k^2r + 3kr^2) + r^3$, следи да је остатак при дељењу n^3 са 7 исти као остатак при дељењу r^3 са 7. Како $r \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ могући остаци при дељењу куба природног броја са 7 су 0, 1 и 6.
(б) Из $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ следи да је $(2^3)^{668} \equiv 1 \pmod 7$. Како је $2^{2006} = 4\cdot(2^3)^{668}$ добијамо да је $2^{2006} \equiv 4 \pmod 7$. Дакле, 2^{2006} при дељењу са 7 даје остатак 4. Користећи резултат под (а) добијамо да остатак при дељењу $x^3 + y^3$ са 7 може бити 0, 1, 2, 5 или 6. Према томе, не постоје тражени бројеви.

949. Нека је висина празног дела суда пре нагињања h. Запремина воде у суду пре и после нагињања је једнака, па је и запремина празног дела суда пре и после нагињања једнака. Пре нагињања та запремина је $4^2 \cdot h$. После нагињања запремина празног дела суда је облика тростране призме чија је висина 4 cm, а основа правоугли троугао. Дужина његове катете је 4 cm, а угао између те катете и хипотенузе је 30°. Због тога је дужина друге катете $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. Запремина празног дела суда после нагињања је $\frac{4^3\sqrt{3}}{6}$ cm^3. Изједначавањем запремина празног дела суда пре и после нагињања добијамо да је $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ cm.



Сл. уз задатак 949

950. Обележимо дате бројеве са $a_1, a_2, \ldots, a_{50}$. Претпоставимо супротно тврђењу задатка да је збир било која три броја мањи од 6. Тада је $(a_1+a_2+a_3) + (a_4+a_5+a_6) + \ldots + (a_{46}+a_{47}+a_{48}) < 16\cdot 6$, па је $a_{49} + a_{50} > 4$. Слично се добија да је $a_{48} + a_{50} > 4$ и $a_{48} + a_{49} > 4$. Одатле следи да је $2(a_{48}+a_{49}+a_{50}) > 12$, односно $a_{48}+a_{49}+a_{50} > 6$. Ово је контрадикција са уведеном претпоставком, па следи да постоје три броја чији збир није мањи од 6.



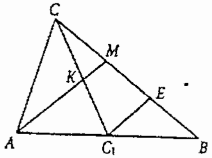
Сл. уз задатак 951

951. Посматраћемо два случаја. Прво, пресек може бити једнакокракоправоугли троугао (слика лево). Очигледно да је површина пресека максимална када се катете полазних троуглова поклопе, тј. када је хипотенуза троугла који је пресек полазних троуглова дужине 1 cm. Та површина је $\frac{1}{4}$ cm^2. Друго, пресек може бити петоугао (слика десно). Ако са x обележимо дужину странице петоугла (у cm) која припада правој p, онда је $0 < x < 1$ и површина тог петоугла је једнака збиру површина правоугаоника са страницама x и $1-x$ и једнакокракоправоуглог троугла са хипотенузом x. Дакле, површина

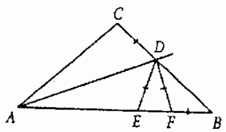
тог петоугла је
$$x\cdot(1-x)+\frac14x^2=-\frac34x^2+x=\frac13-\frac34\left(x-\frac23\right)^2.$$
Максимум ове функције је $\frac13$ и постиже се за $x=\frac23$. Како је у првом случају максимална површина пресека $\frac14$, а у другом $\frac13$, следи да је максимална површина пресека који се може добити померањем полазних троуглова по правој p једнака $\frac13\,\mathrm{cm}^2$.

952. Број $\overline{cba}\in\{5^3,6^3,7^3,8^3,9^3\}=\{125,216,343,512,729\}$, па је $\overline{abc}\in\{521,612,343,215,927\}$. Како су бројеви 612, 343, 215 и 927 сложени јер су дељиви, редом, са 2, 7, 5 и 9, једини кандидат је број 521. Он није дељив са 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 и 23 (проверити!), па је једино решење задатка $\overline{abc}=521$, $\overline{cba}=125=5^3$.

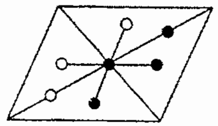
953. Нека је C_1E средња линија троугла ABM. Тада је $BE=ME$. Како је $KM\parallel C_1E$ и K средиште дужи CC_1, следи да је KM средња линија троугла C_1EC, па је $CM=ME$. Према томе, $CM:MB=1:2$.



Сл. уз задатак 953



Сл. уз задатак 955


Сл. уз задатак 956

954. Прва и трећа свећа су се изједначиле по дужини пошто је прва горела 2 сата, а трећа 1 сат. Прва свећа, дакле, гори два пута спорије од треће, па ће цела изгорети за 16 сати. Прва свећа ће за 4 сата изгорети четвртину своје дужине. За то време друга ће горети три сата и такође изгорети четвртину своје дужине. Тада ће се ове две свеће изједначити по дужини.

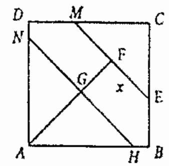
955. Нека су E и F тачке на страници AB такве да је $\measuredangle ADE=60^\circ$ и $\measuredangle BDF=40^\circ$ (слика). Из подударности троуглова ACD и AED следи да је (1) $DC=DE$. Троуглови DEF, FBD и ADF, су једнакокраки, па је (2) $DE=DF=FB$ и (3) $AD=AF$. Из (1) и (2) следи (4) $DC=FB$, па из (3) и (4) добијамо $AB=AF+FB=AD+DC$.

956. Јелена води игру ка сигурној победи користећи чињеницу да је паралелограм централно симетрична фигура, са центром симетрије у пресеку дијагонала. Она прво нацрта круг чији је центар у пресеку дијагонала паралелограма. Затим ма где Радован нацрта свој круг, Јелена нацрта круг који је Радовановом кругу симетричан у односу на пресечну тачку дијагонала. На слици су Јеленини кругови осенчени. На тај начин Јелена ће увек моћи да нацрта круг после Радована, а самим тим и побеђује у игри.

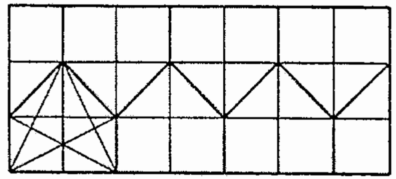
957. *Прво решење.* Ако су p, q, r непарни бројеви, онда је број $pqr+pq+qr+rp+p+q+r$ непаран, па не може бити једнак 2006. Дакле, бар један од бројева p, q и r је паран, дакле једнак 2. Нека је $r=2$. Тада једначина постаје $3pq+3p+3q=2004$, односно $pq+p+q=668$. Опет је један од бројева p и q паран, јер би у супротном $pq+p+q$ био непаран. Следи, на пример, $q=2$, па је $3p=666$, односно $p=222$, што није прост број. Дакле, такви бројеви не постоје.

Друго решење.
$$\begin{aligned}&pqr+pq+qr+rp+p+q+r=2006\\ \iff{}&pqr+pq+qr+rp+p+q+r+1=2007\\ \iff{}&(p+1)(q+1)(r+1)=3\cdot3\cdot223.\end{aligned}$$
Не смањујући општост, претпоставимо да је $p\leqslant q\leqslant r$. Тада је $p+1=3$, $q+1=3$, $r+1=223$, па је $p=2$, $q=2$, $r=222$. Дакле, r није прост, па такви бројеви не постоје.

958. Означимо дужину дужи FE са x (слика). Троугао MCE је правоугли једнакокраки, па је и $CF=x$. Из $P_{\triangle MCE}=\frac15P_{ABCD}$ следи $x^2=\frac15a^2$, односно $x=\frac{a\sqrt5}{5}$. Троуглови AHG и MCE су подударни, па је $AH=2x=\frac{2a\sqrt5}{5}$ и $AG=CE=x\sqrt2=\frac{a\sqrt{10}}{5}$. Сада је $EF+FG+GH=CF+FG+GA=d=a\sqrt2$. Даље је $HB=a-2x=a-\frac{2a\sqrt5}{5}$ и $BE=a-x\sqrt2=a-\frac{a\sqrt{10}}{5}$, па је
$$O=EF+FG+GH+HB+BE=a\left(2+\sqrt2-\frac25\sqrt5-\frac15\sqrt{10}\right).$$



Сл. уз задатак 958


Сл. уз задатак 961

959.
$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot6\cdot11}+\frac{1}{6\cdot11\cdot16}+\cdots+\frac{1}{1996\cdot2001\cdot2006}\\ &=\frac1{10}\cdot\frac{11-1}{1\cdot6\cdot11}+\frac1{10}\cdot\frac{16-6}{6\cdot11\cdot16}+\cdots+\frac1{10}\cdot\frac{2006-1996}{1996\cdot2001\cdot2006}\\ &=\frac1{10}\left(\frac1{1\cdot6}-\frac1{6\cdot11}+\frac1{6\cdot11}-\frac1{11\cdot16}+\cdots+\frac1{1996\cdot2001}-\frac1{2001\cdot2006}\right)\\ &=\frac1{10}\left(\frac16-\frac1{2001\cdot2006}\right)=\frac{1003\cdot667-1}{10\cdot2001\cdot2006}=\frac{669000}{10\cdot2001\cdot2006}=\frac{11150}{667\cdot1003}.\end{aligned}$$
Сада је јасно да $q=667\cdot1003$ није дељив бројем 2006.

960. Претпоставимо да тврђење задатка није тачно. Тада постоји број n, такав да је после n бацања кошаркаш имао мање од 80%, а после $n+1$ бацања више од 80% погодака. Ако је k број погодака у тих n бацања, онда је $\frac kn<\frac45<\frac{k+1}{n+1}$. Из ових неједнакости следи да је $5k<4n$ и $5k<4n<5k+1$. Ово је немогуће јер не постоји природан број између два суседна природна броја. Дакле, добили смо контрадикцију са уведеном претпоставком, па следи да је у неком тренутку кошаркаш имао успешност тачно 80%.

961. Дати правоугаоник поделимо на 8 делова као на слици (6 „кућица“ и две „полукућице“). Растојање било које две тачке унутар једног дела мање је од $\sqrt5$, тј. од

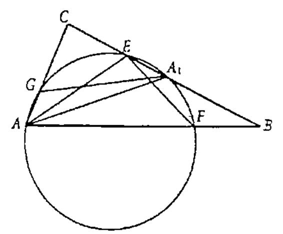
„дијагонале“ тог дела (може бити једнако $\sqrt{5}$ само у случају да је једна од тачака на рубу датог правоугаоника, што је искључено условом задатка). На основу Дирихлеовог принципа, постоји део у којем су бар две тачке. Те две тачке су међусобно удаљене мање од $\sqrt{5}$.

962. Сваки петоцифрени палиндром може се написати у облику

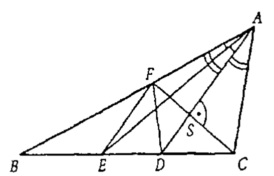
$$\overline{abcba} = 10001a + 1010b + 100c = 101(99a + 10b + c) + 2a - c.$$

Дакле, $2a - c$ мора бити дељив са 101, а како су a и c једноцифрени бројеви, мора бити $2a - c = 0$, тј. $c = 2a$. Највеће цифре за које то важи су $a = 4$, $c = 8$. За b узимамо највећу цифру, тј. $b = 9$. Тражени број је 49894.

963. Како је $\angle FAA_1 = \angle FEA_1$ (периферијски углови над истим луком) и $\angle ABA_1 = \angle FBE$, следи да је $\triangle ABA_1 \sim \triangle EBF$ (слика). Одатле је $BF = \dfrac{BA_1}{AB} BE$. Слично, из $\triangle AEC \sim \triangle A_1GC$ следи да је $CG = \dfrac{A_1C}{AC} CE$. Како је $A_1C = A_1B$ и $\dfrac{CE}{BE} = \dfrac{AC}{AB}$ (AE је симетрала угла ABC), следи да је $BF = CG$.



Сл. уз задатак 963



Сл. уз задатак 966

964. Означимо дате бројеве са a, b и c. Према условима задатка је

$$(1) \quad abc = 1 \quad \text{и} \quad (2) \quad a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Из (2), користећи (1), добијамо да је $a + b + c > ab + bc + ca$, одакле је $a + b + c - ab - bc - ca + abc - 1 > 0$, тј. $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$. Последња неједнакост важи само ако је тачно један чинилац на левој страни позитиван или су сва три позитивна. Други случај није могућ, јер је $a > 1$, $b > 1$, $c > 1$ супротно услову (1), па остаје први случај, тј. тачно један од бројева a, b, c је већи од 1.

965. Нека је укупан број екипа n; тада је укупан број бодова које су освојиле екипе $n(n-1)$. Како је $n(n-1) \geqslant 7 + 5 + 3$, следи да је $n \geqslant 5$. Екипа које су се пласирале иза трећег места има $n - 3$, и свака од њих је освојила мање од 5 бодова, па је $n(n-1) \leqslant 15 + 5(n-3)$, дакле, $n < 6$. Из свега овога следи да је $n = 5$. Укупан број бодова је 20, па су четврто и петопласирана екипа освојиле 3, односно 2 бода.

966. Нека је F тачка странице AB таква да је $\angle ACF = 60°$ (слика). Троугао AFC је једнакостраничан (сви углови су му од 60°). Зато је симетрала AD нормална на FC. Нека је S тачка пресека AD и FC. Како је D на симетрали дужи FC, то је $DF = DC = DE$. Следи да је EC пречник полукружнице која пролази кроз тачку F, па је $\angle EFC$ прав. Даље је $\angle FEA = 180° - 90° - 60° - 15° = 15°$, па је троугао EFA једнакокрак. Следи да је $FA = FE$, па је и $FC = FE$. Дакле, $\triangle EFC$ је једнакокрако-правоугли троугао, па је $\angle DCF = 45°$, одакле је $\angle BCA = 45° + 60° = 105°$.

967. Број $n^2 + 2006n$ је свакако већи од n^2, па ако је он једнак квадрату природног броја, мора бити облика $(n+k)^2$ за неко природно k. Из једнакости

$$(1) \qquad n^2 + 2006n = (n+k)^2 = n^2 + 2nk + k^2$$

добијамо да је $k^2 = n(2006 - 2k)$, па мора бити $2006 - 2k \geqslant 0$, односно $k \leqslant 1003$. Највећа могућа вредност за k је, дакле, 1003, али она очигледно не задовољава услов (1). За $k = 1002$ се добија $n = 501 \cdot 1002$ који задовољава услове задатка и највећи је број са том особином.

968. *Прво решење.* Нека је $\triangle ABB'$ симетричан троуглу ABC у односу на праву AB, а $\triangle AC'C$ симетричан троуглу ABC у односу на праву AC (нацртати слику!). Тада је $\triangle AB'C'$ једнакостраничан (јер је једнакокрак, крака једнаког b, са углом при врху једнаким $3 \cdot 20° = 60°$). Означимо са D и E пресеке дужи $B'C'$ са крацима AB и AC датог троугла. Ако означимо $BD = x$ и $DE = y$, из сличности $\triangle B'BD \sim \triangle ABC$ добијамо $x : a = a : b$, одакле $x = \dfrac{a^2}{b}$. С друге стране, на основу Талесове теореме добијамо да је $y : a = (b - x) : b$, одакле $y = \dfrac{a}{b}\left(b - \dfrac{a^2}{b}\right) = \dfrac{a(b^2 - a^2)}{b^2}$. Најзад, из $b = B'C' = DE + 2 \cdot B'D = y + 2a$, заменом налазимо $b = \dfrac{a(b^2 - a^2)}{b^2} + 2a$, одакле сређивањем следи тражена релација $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Друго решење. На основу синусне теореме важи

$$\frac{a}{\sin 20°} = \frac{b}{\sin 80°} = \frac{b}{\cos 10°},$$

односно $a \cos 10° = b \sin 20° = 2b \sin 10° \cos 10°$, па је $a = 2b \sin 10°$, тј. $\sin 10° = \dfrac{a}{2b}$. С друге стране је

$$\frac{1}{2} = \sin 30° = \sin(3 \cdot 10°) = 3 \sin 10° - 4 \sin^3 10°,$$

па замењујући претходно добијени израз за $\sin 10°$ налазимо да је $\dfrac{1}{2} = 3 \cdot \dfrac{a}{2b} - 4 \cdot \dfrac{a^3}{8b^3}$, одакле лако следи тражена релација $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

969. Означимо са a и b дужине страница „великог“ правоугаоника, а са $a_1, a_2, \dots, a_7$, односно $b_1, b_2, \dots, b_7$ дужине страница малих правоугаоника који се налазе „на дијагонали“ великог. Тада је обим великог правоугаоника

$$2(a + b) = 2[(a_1 + \dots + a_7) + (b_1 + \dots + b_7)] = 2(a_1 + b_1) + \dots + 2(a_7 + b_7),$$

тј. једнак је збиру обима малих правоугаоника „на дијагонали“. Како су ти обими, по претпоставци, цели бројеви, то је и обим великог правоугаоника цео број.

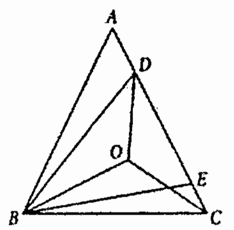
970. Размотримо следеће случајеве: 1° n је производ два различита непарна делиоца, већа од 1. Оба та делиоца, као и двојка, садржани су међу чиниоцима $2, 3, \dots, n-1$ броја $(n-1)!$, те њихов производ $2n$ дели $(n-1)!$.

2° n је квадрат непарног броја $m > 1$. Тада се међу бројевима $2, 3, \dots, n-1$ налазе свакако бројеви m и $2m$, па и тада $2n \mid (n-1)!$.

3° n је облика $2^k m$, где је m непаран број и $k \geqslant 1$. Број m је свакако садржан међу бројевима $2, 3, \dots, n-1$. Остаје да се докаже да је производ тих бројева дељив са 2^{k+1}. „Најгори“ је случај када је $m = 1$, $n = 2^k$, $k > 2$. Међу наведеним бројевима је $n/2 - 1 = 2^{k-1} - 1$ парних, што значи да им је производ дељив са 2^{k+1}, јер је $2^{k-1} - 1 > k + 1$, сем у случају $k = 3$; но, и тада $2^4 \mid 7!$ (проверити!).

971. Покажимо најпре да тачка D припада дужи AE. У супротном би тачка E припадала дужи AD, па би следило $\measuredangle ACB + \measuredangle CBD = \measuredangle BDE = \measuredangle EDB < \measuredangle ABC$, што није тачно. Дакле, важи A–D–E (слика). Зато је

$$\begin{aligned}\measuredangle DBC &= \measuredangle DBE + \measuredangle EBC = \measuredangle EDB + \measuredangle EBC\\ &= \measuredangle BAC + \measuredangle ABD + \measuredangle EBC = \measuredangle BAC + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2\measuredangle ABC + 2\measuredangle EBC = 180^\circ - 2(\measuredangle DBC + \measuredangle ABD) + 2\measuredangle EBC\\ &= 180^\circ - 2(\measuredangle DBE + \measuredangle EBC) + 2\measuredangle EBC = 180^\circ - 2\measuredangle DBC,\end{aligned}$$



Сл. уз задатак 971

дакле, $\measuredangle DBC = 60^\circ$. Тачка O је центар круга уписаног у троугао DBC, па је

$$\begin{aligned}\measuredangle COD &= 180^\circ - (\measuredangle OCD + \measuredangle ODC)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\measuredangle BDC + \measuredangle DCB)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle DBC)\\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\measuredangle DBC = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ.\end{aligned}$$

972. *Прво решење.* Најмањи савршени број је 6 и он задовољава услове задатка. Претпоставимо да је $n > 6$ и да су $n-1$ и $n+1$ прости бројеви. Тада мора да важи $n = 6k$ за неки природан број $k > 1$. То значи да су 1, k, $2k$, $3k$ и $6k$ различити делиоци броја n, па је збир свих његових делилаца већи или једнак од

$$1 + k + 2k + 3k + 6k = 12k + 1 = 2n + 1 > 2n$$

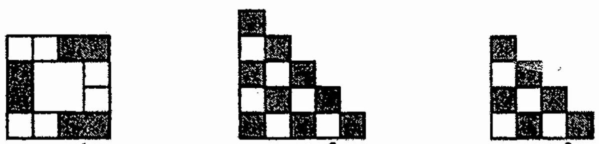
и број n није савршен. Дакле, $n = 6$ је једини број који задовољава услове задатка.

Друго решење. Према Еуклид-Ојлеровој теореми[1] сваки паран савршени број n може се приказати у облику

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

где су p и $2^p - 1$ прости бројеви. Ако је $p = 2$, добија се први савршени број 6 који, очигледно, задовољава услове задатка. Ако је p непаран, онда је $2^p \equiv 2 \pmod 3$ и $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 3$, па је $n - 1 \equiv 0 \pmod 3$, и број $n - 1$ не може да буде прост. Дакле, број 6 је једино решење задатка.

973. За $n = 2$ фигура се може покрити на начин приказан на слици 1, и у том случају тражени највећи број је 6.



слика 1 слика 2 слика 3

Сл. уз задатак 973

[1] Видети, на пример, В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре 15, Друштво математичара Србије, Београд 2004.

За $n > 2$ исецимо фигуру на четири подударна дела дуж линија између n-те и $(n+1)$-е врсте и између n-те и $(n+1)$-е колоне. Обојимо те делове на шаховски начин, као што је приказано на слици 2 за $n = 5$ и на слици 3 за $n = 4$. Свака домина покрива једно бело и једно црно поље. Тада највећи број домина које се могу сместити на једном делу фигуре није већи од броја белих поља (број белих поља је мањи од броја црних). На сваком од четири дела (без крајњег горњег и крајњег десног) домине се могу поставити на следећи начин тако да покривају сва бела поља: поставити вертикално домине на две најниже врсте, полазећи од леве ивице фигуре, све док је то могуће, и хоризонталне домине на остале врсте, полазећи од леве ивице, све док је то могуће.
Ако је n непарно, $n = 2k - 1$, на сваком делу има

$$2((k-1) + (k-2) + \cdots + 2 + 1) = k(k-1)$$

белих поља, па је то и највећи број домина које се могу поставити на тај део. При томе, према начину постављања који смо описали, гранична поља (којима се делови покривају) остала су непокривена. Зато је највећи број домина које се могу поставити на фигуру једнак $4k(k-1) + 4$ (четири домине су на граничним пољима којима се додирују делови). Дакле, у овом случају, тражени највећи број домина је

$$4k(k-1) + 4 = 4k^2 - 4k + 4 = (2k-1)^2 + 3 = n^2 + 3.$$

За $n = 2k$ имамо $(2k-1) + (2k-3) + \cdots + 3 + 1 = k^2$ белих поља. Слично као у претходном случају добијамо да је сада тражени највећи број домина једнак

$$4k^2 + 4 = (2k)^2 + 4 = n^2 + 4.$$

2007. година

974. а) 693; б) 541; в) 200.

975. $8 \cdot 7 + 8 : 2 = 56 + 4 = 60$.

976. Постоје три решења: III + V + VI = XIV, II + VI + VI = XIV, II + V + VII = XIV.

977. а) $555 + 222 = 522 + 255 = 552 + 225 + 525 + 252 = 777$.
б) $555 - 222 = 255 - 222 = 33$.

978. Софија је замислила број 522, јер је $600 - 148 + 70 = 452 + 70 = 522$.

979. Резултат је 2 450 444.

980. За 8 година.

981. Како је $2007 : 3 = 669$, а $2007 : 9 = 223$, следи да су странице сваког од тих правоугаоника дужине 669 cm и 223 cm. Према томе, обим једног од њих је 1784 cm.

982. Нека је x број ученика које треба преместити из прве у другу школу. Након премештања тих ученика у другој школи би било $946 + x$ ученика, што значи да их је пре премештања у првој школи било $946 + 2x$. Следи да је $2x = 512$, тј. $x = 256$.

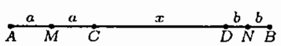
983. Број a је тим већи што су остала два сабирка мања. Због тога, највећа вредност броја a је 7999 када су остала два броја 1000 и 1001.

984. Како је $4536 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7$, а $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 80$, то је тражени количник 80.

985. Нека је мера мањег угла α. Како је $2007' = 33°27'$, следи да је мера већег угла $\alpha + 33°27'$. Користећи услов комплементности добијамо да је $2\alpha + 33°27' = 90°$, па је $2\alpha = 56°33'$. Следи да је мера мањег угла $28°16'30''$, а мера већег угла $61°43'30''$.

986. Да би број био дељив са 15 он мора бити дељив и са 3 и са 5. Како је број дељив са 5 ако му је цифра јединица 0 или 5, а дељив са 3 ако му је збир цифара дељив са 3, тражени бројеви су: 3150, 6150, 9150, 1155, 4155 и 7155.

987. Нека је распоред тачака A, B, C и D као на слици. Средишта дужи AC и DB означимо са M и N, а дужине дужи MC, CD и DN обележимо редом са a, x и b. Тада су и дужине дужи AM и NB редом a и b. Према условима задатка следи да је $2a + x + 2b = 60$ cm, а $a + x + b = 45$ cm. Одатле је $a + b = 15$ cm, а $x = 30$ cm.



Сл. уз зад. 987

988. Унија скупова A и B садржи 17 елемената, а пресек 5 елемената, тако да ће сваки од скупова $A \setminus B$ и $B \setminus A$ садржати по 6 елемената и то $A \setminus B = \{10, 11, 12, 14, 15, 16\}$, а $B \setminus A = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Према томе, $A = \{1, 2, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$, а $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 17\}$.

989. Вредност израза је -9.

990. Прва неједначина је еквивалентна са неједначином $x \geqslant -6$, а друга са $x < -3$. Према томе, заједничка целобројна решења датих неједначина су -6, -5 и -4, а збир тих решења је -15.

991. Углови AMP и MBN, односно MAP и BMN су једнаки као углови са паралелним крацима. Такође је $AM = MB$ јер је M средиште дужи AB. На основу другог става подударности (УСУ) следи да су троуглови AMP и MBN подударни.

992. Како је $a = (1-2) + (3-4) + (5-6) + \cdots + (2005 - 2006) = (-1) \cdot 1003 = -1003$, а $b = (1-3) + (5-7) + (9-11) + \cdots + (2005 - 2007) = (-2) \cdot 502 = -1004$, то је $a > b$.

993. Нека је $\angle ABC = \alpha$. Тада важи да је и $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BDE = \alpha$ јер су троуглови ABC и BDE једнакокраки. Како је збир унутрашњих углова у четвороуглу $ABDF$ једнак 360°, то је $3\alpha + 144° = 360°$, односно $\alpha = 72°$. Следи да су и у троуглу ABC и у троуглу BDE мере углова 72°, 72° и 36°.

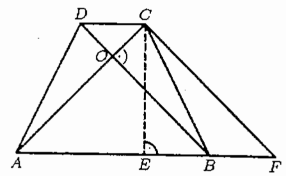
994. Дата једначина еквивалентна је једначини $3^8 + 3^8 - 5 \cdot 3^8 = x \cdot 3^8$. Следи да је $x = -3$.

995. Како је $-5\sqrt{2} = -\sqrt{50}$, $4\sqrt{3} = \sqrt{48}$, $-3\sqrt{5} = -\sqrt{45}$ и $2\sqrt{6} = \sqrt{24}$, то је распоред датих бројева од већег ка мањем следећи: $4\sqrt{3}$, $2\sqrt{6}$, $-3\sqrt{5}$, $-5\sqrt{2}$.

996. У троуглу ABC важи да је $AB^2 + BC^2 = AC^2$, па је $\alpha = 90°$. У троуглу ACD дужина катете AD једнака је половини дужине хипотенузе. Следи да је наспрам те катете угао од 30°, тј. $\beta = 30°$. Према томе, $\alpha + \beta = 120°$.

997. Како је $45^{10} = 3^{10} \cdot 15^{10} = 9^5 \cdot 15^{10}$ и $15^{15} = 15^5 \cdot 15^{10}$, то је 15^{15} већи број од броја 45^{10}.

998. Нека је O пресек дијагонала датог трапеза, CE висина, а F тачка у којој права кроз C паралелна дијагонали BD сече праву којој припадају тачке A и B. Четвороугао $BFCD$ је паралелограм, па је $BF = DC$ и $FC = BD$. Код једнакокраког трапеза дужине дијагонала су једнаке, па је троугао ACF једнакокраки. Како су ACF и AOB углови са паралелним крацима, они су једнаки, па је троугао ACF и правоугли. Следи да је $AF = 2 \cdot CE = 10$ cm. Како је $AB + CD = AB + BF = AF$, то је $AB + CD = 10$ cm. Површина трапеза $ABCD$ једнака је $\frac{AB + CD}{2} \cdot CE$, тј. $25\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 998

999. Нека је дужина правоугаоника a, а ширина b. Тада је дужина новог правоугаоника $(1 + \frac{p}{100})a$, а ширина $(1 - \frac{p}{100})b$. Како је површина новог правоугаоника мања за 16% у односу на површину првобитног правоугаоника, добијамо да је $(1 + \frac{p}{100})a \cdot (1 - \frac{p}{100})b = 0,84 \cdot ab$. Одатле следи да је $1 - (\frac{p}{100})^2 = 0,84$, тј. $p = 40$.

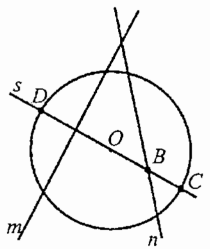
1000. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $x \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - 1) \geqslant -\frac{2}{3}$, тј. неједначини $x \cdot (-\frac{2}{3}) \geqslant -\frac{2}{3}$. Следи да је $x \leqslant 1$, па $x \in (-\infty, 1]$.

1001. Обележимо са F тачку пресека дужи AE и BC. Површине троуглова AFC, ABF, ADB, FBE и BDE су једнаке јер ови троуглови имају једнаку по једну страницу и одговарајућу висину. Следи да је површина троугла ADE два пута већа од површине троугла ABC и износи $64\,\text{cm}^2$.

1002. Јасно је да је $x \neq 0$ јер именилац разломка не може бити 0. Ако је $x < 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $x - x = \frac{x}{-x}$, тј. $0 = -1$, па у овом случају нема решења. Ако је $x > 0$, дата једначина еквивалентна је једначини $x + x = \frac{x}{x}$, односно $x = \frac{1}{2}$, па је то и решење полазне једначине.

1003. Дате праве одређују једну раван. Уколико дате тачке не припадају истој правој, оне такође одређују једну раван. Свака права са сваком тачком одређује по једну раван, што значи још највише 6 равни. Укупно то је највише 8 равни.

1004. а) $438 + 163 = 601$; б) $908 - 159 = 749$; в) $60 : 5 + 5 \cdot 3 = 27$; г) $85 + 15 : 5 = 88$.



Сл. уз зад. 1005

1005. В. слику. г) Дуж OC је полупречник круга.

1006. Симонидина мајка ће за три године имати 30 година, а Симонида 10. Симонида сада има $10 - 3 = 7$ година.

1007. а) Пренос утакмице је трајао 1 час и 45 минута.

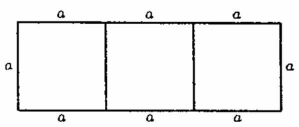
б) Како је емисија о рибама трајала 55 минута, то је пренос трајао дуже 50 минута.

1008. Највећи троцифрени број чији је збир цифара 12 је 930, а најмањи троцифрени број чији је збир цифара 21 је 399. Разлика ових бројева је $930 - 399 = 531$.

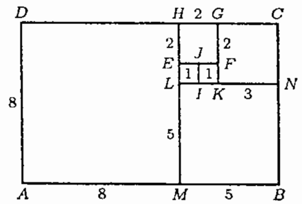
1009. а) Највећи могући такав број је 6644322. б) Најмањи могући такав број је 6364422.

1010. Може. То се дешава када једна свешчица има 40 страница, а осталих пет свешчица по 44 странице.

1011. Ако дужину странице квадрата обележимо са a, онда је обим квадрата $4a$, а обим правоугаоника је $8a$. Према томе, обим правоугаоника је два пута већи од обима једног од квадрата.



Сл. уз зад. 1011



Сл. уз зад. 1017

1012. Љиља и Биља заједно имају 62 динара више од Маше и Таше заједно. Како Љиља има 70 динара више од Маше, то Таша има 8 динара више од Биље.

1013. Има их једнако, по десет. То су: 112, 121, 211, 220, 202, 130, 103, 310, 301 и 400, односно 1114, 1141, 1411, 4111, 1122, 1212, 1221, 2112, 2121 и 2211.

1014. То су: 147, 174, 417, 471, 714 и 741.

1015. Како је $(3x^\circ + 1^\circ) + (x^\circ + 7^\circ) = 180^\circ$, то је $4x^\circ = 172^\circ$, односно $x = 43$. Следи да су на слици углови од 130° и 50°.

1016. Како енглески језик учи $\frac{4}{5}$ свих ученика, то остатак, односно $\frac{1}{5}$ свих ученика учи само француски. Број ученика који уче оба језика добијамо када од броја свих који уче француски одузмемо број оних који уче само тај језик. Како је $\frac{3}{4} - \frac{1}{5} = \frac{11}{20}$, следи да $\frac{11}{20}$ свих ученика учи оба језика.

1017. Обележимо сва темена свих квадрата, као на слици. Обим квадрата $EFGH$ је 8 cm, па је дужина његове странице 2 cm. Квадрати $LIJE$ и $IKFJ$ имају странице једнаке дужине, по 1 cm. Даље, дужина странице квадрата $KNCG$ је 3 cm, дужина странице квадрата $MBNL$ је 5 cm, а дужина странице квадрата $AMHD$ је 8 cm. Према томе, дужине страница правоугаоника $ABCD$ су 13 cm и 8 cm, па је његова површина 104 cm^2.

1018. Из једнакости $\frac{2}{9} = \frac{2 \cdot 223}{9 \cdot 223} = \frac{446}{2007}$ следи да је $\frac{2}{9} < \frac{447}{2007}$. Како је $\frac{447}{2007} = \frac{149}{669}$ и $\frac{149}{669} < \frac{150}{669} < \frac{150}{666}$ и $\frac{150}{666} = \frac{25}{111}$, то је $\frac{447}{2007} < \frac{25}{111}$. Решење је: $\frac{2}{9}, \frac{447}{2007}, \frac{25}{111}$.

1019. Дата неједначина је еквивалентна са $-6 < x - 1 < 6$, односно са $-5 < x < 7$. Према томе, целобројна решења неједначине су $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и 6, а њихов збир је 11.

1020. Из чињенице да се симетрале углова BAC и ABC секу под углом од 124° следи да је $\frac{1}{2} \cdot \measuredangle BAC + \frac{1}{2} \cdot \measuredangle ABC + 124^\circ = 180^\circ$. Одатле добијамо да је $\measuredangle BAC + \measuredangle ABC = 112^\circ$, па је $\measuredangle ACB = 68^\circ$.

1021. Нека је на почетку у кеси било x кликера. Аца је додао $x + 1$ кликер, што значи да је након тога у кеси било $2x + 1$ кликера. Затим је Веса додао $2(2x + 1) + 3$ кликера, тј. $4x + 5$ кликера, што значи да је након тога у кеси било $6x + 6$ кликера. Последњи је пришао Веса и додао $3(6x + 6) + 5$ кликера, односно $18x + 23$ кликера. Према томе, на крају је у кеси било $24x + 29$ кликера. Како је $24x + 29 = 149$, то је $x = 5$.

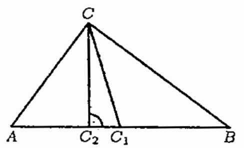
1022. Троугао CBE је једнакокрако правоугли, па је $BC = EB$. Нека је $\measuredangle ABC = \alpha$. Тада је $\measuredangle BCA = 90^\circ - \alpha$. Како је $\measuredangle ABC + 90^\circ + \measuredangle EBD = 180^\circ$, то је $\measuredangle EBD = 90^\circ - \measuredangle ABC$, тј. $\measuredangle EBD = 90^\circ - \alpha$. Одатле добијамо да је $\measuredangle DEB = \alpha$. На основу свега овога следи да је $\measuredangle ABC = \measuredangle DEB$ и $\measuredangle BCA = \measuredangle EBD$. На основу другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle ABC \cong \triangle DEB$.

1023. Распоредимо ученике у 366 група, при чему истој групи припадају они ученици који славе рођендан истог датума. Како је $800 = 366 \cdot 2 + 68$, бар једна група садржи бар 3 ученика. Они имају рођендан истог датума.

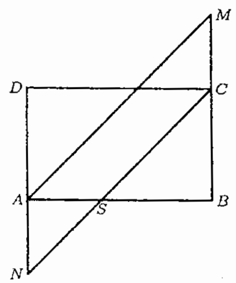
1024. $\sqrt{(\sqrt{5} - 5)^2} - (\sqrt{5} - 5) = |\sqrt{5} - 5| - (\sqrt{5} - 5) = 5 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + 5 = 10 - 2\sqrt{5}$.

1025. Примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао ABC добијамо да је $AB^2 = AC^2 + BC^2$, па је дужина хипотенузе AB једнака 50 cm. Дужина тежишне дужи која одговара хипотенузи једнака је половини дужине хипотенузе, па је дужина дужи CC_1 једнака 25 cm. Површина правоуглог троугла једнака је половини производа дужина катета, односно половини производа дужина хипотенузе и одговарајуће висине. Одавде добијамо да је дужина дужи CC_2 једнака $\frac{30 \cdot 40}{50}$ cm, тј. 24 cm. Коначно, примењујући Питагорину теорему на правоугли троугао C_1CC_2 добијамо да је $C_1C_2^2 = C_1C^2 - CC_2^2$, па је дужина дужи C_1C_2 једнака 7 cm.

1026. Нека је тачка S пресек дужи AB и CN. Како је $\measuredangle BCS = 45^\circ$, а троуглови BCS и ANS су правоугли, то је $\measuredangle CSB = 45^\circ$ и $\measuredangle ASN = \measuredangle ANS = 45^\circ$. Следи да су троуглови BCS и ANS и једнакокраки, па је $BS = BC = 3$ cm, а $AN = AS = 2$ cm. Како је и $\measuredangle BAM = 45^\circ$, он је једнак са $\measuredangle BSC$, па је $NC \parallel AM$. Такође је $NA \parallel CM$, па је



Сл. уз зад. 1025



Сл. уз зад. 1026

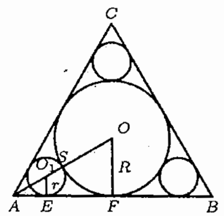
четвороугао $ANCM$ паралелограм. Његова површина је производ дужина странице AN и одговарајуће висине AB, те је према томе једнака $10\,\mathrm{cm}^2$.

1027. Број је дељив са 15 ако је дељив и са 5 и са 3. Да би био дељив са 5, тражени број се мора завршавати нулом, а да би био дељив са 3, збир цифара му мора бити дељив са 3. Због тога се у декадном запису тог броја мора појавити тачно k четворки, где је k број дељив са 3. Како тражимо најмањи природан број са задатом особином, то је $k = 3$. Тражени број је 4440.

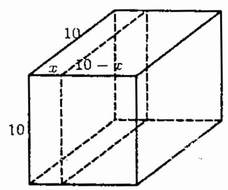
1028. Најмањи природан број који се може добити је 1, на пример на следећи начин: $(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(2001-2002-2003+2004)-2005+2006$.

1029. Решење дате једначине је $x = \dfrac{8-14k}{3}$. То решење је веће од -2 ако је $\dfrac{8-14k}{3} > -2$, тј. ако је $k < 1$. Према томе, $k \in (-\infty, 1)$.

1030. Нека су тачка O и R центар и дужина полупречника круга k, а тачка O_1 и r центар и дужина полупречника једног од три подударна уписана круга. Нека је, даље, S додирна тачка та два круга, а F и E тачке у којима их страница AB додирује. Како су троуглови AFO и AEO_1 правоугли, а $\measuredangle FAO = 30°$, то је $AO = 2R$ и $AO_1 = 2r$. Следи да је $AS = AO - OS = R$, а такође и $AS = AO_1 + O_1S = 3r$. Према томе, $R = 3r$. Површина круга k је $R^2\pi$, односно $9r^2\pi$, а збир површина три уписана круга је $3r^2\pi$. Тражени однос је $3:1$.



Сл. уз зад. 1030



Сл. уз зад. 1032

1031. Дата неједначина еквивалентна је са $2 - a < x < 2 + a$. Ако је $a \leqslant 1$, број 2 је једино решење неједначине. Ако је $1 < a \leqslant 2$, решења неједначине су 1, 2 и 3. Ако је $a > 2$, неједначина има пет или више решења. Следи да не постоји позитиван реалан број a за који дата неједначина има тачно 4 решења у скупу целих бројева. Према томе, тражени скуп вредности је празан.

1032. Нека дата раван дели ивице коцке које сече на делове дужине x и $10 - x$ (у cm). Тада су површине квадара (у cm^2) на које је подељена коцка $2\cdot 100 + 4\cdot 10x$ и $2\cdot 100 + 4\cdot 10\cdot(10-x)$, односно $200 + 40x$ и $600 - 40x$. Однос тих површина је $2:3$, па из једначине $3\cdot(200+40x) = 2\cdot(600-40x)$ добијамо да је $x = 3$. Запремине датих квадара су $3\cdot 10\cdot 10\,\mathrm{cm}^3$ и $7\cdot 10\cdot 10\,\mathrm{cm}^3$. Следи да је однос тих запремина $3:7$.

1033. Могуће је да два темена троугла припадају истој страници квадрата или да свако теме троугла припада различитој страници квадрата. У првом случају, на 4 начина бирамо страницу квадрата којој припадају два темена троугла, на 3 начина бирамо две од три тачке са изабране странице и на 9 начина бирамо треће теме троугла од тачака које припадају осталим страницама квадрата. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4\cdot 3\cdot 9$ троуглова, тј. 108 троуглова. У другом случају, на 4 начина бирамо три од четири странице квадрата којима припада по једно теме троугла, а на $3\cdot 3\cdot 3$ начина са сваке од изабраних страница квадрата по једну од три дате тачке. Следи да је, у овом случају, датим тачкама одређено $4\cdot 3\cdot 3\cdot 3$ троуглова, тј. 108 троуглова. Према томе, укупно је датим тачкама одређено 216 троуглова.

1034. Има их 15. То су: ABG, BGC, CGF, AGF, AFE, EFD, CFD, CDE, ADE, ACF, ABC, ABF, BCF, ACE и ACD.

1035. Могуће је да Воја, Раде и Зоран добију редом кликера: 1, 1, 5 или 1, 2, 4 или 1, 3, 3 или 1, 4, 2 или 1, 5, 1 или 2, 1, 4 или 2, 2, 3 или 2, 3, 2 или 2, 4, 1 или 3, 1, 3 или 3, 2, 2 или 3, 3, 1 или 4, 1, 2 или 4, 2, 1 или 5, 1, 1. То је укупно 15 начина.

1036. Нека је ширина стазе x, а дужина тражене странице y (све у m). Пешак који обиђе целу стазу идући спољном ивицом те стазе уствари пређе за $8x$ m дужи пут него пешак који обиђе целу стазу идући унутрашњом ивицом те стазе. Следи да је $x = 2$. Одатле добијамо да је површина стазе (у m^2) $4\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 16 + 2\cdot 2\cdot y$. Према томе, $80 + 4\cdot y = 176$, па је $y = 24$.

1037. Да је и број фазана и број јаребица порастао 3 пута, било би их укупно $3\cdot 565$, односно 1695. Како је број јаребица порастао 5 пута, а не 3 пута, то разлика $2007 - 1695$ представља 2 пута увећан почетни број јаребица. Према томе, на почетку је у шуми било 156 јаребица и 409 фазана.

1038. Како је Б различито од Л и разлика између Б и Л не може бити већа од 1, то је Б = 6. Због преношења 1 при сабирању са цифре јединица хиљада на цифру десетица хиљада, добијамо да је О = 9 и А = 0. Како нема преношења при сабирању са цифре десетица на цифру стотина, то је 2В = 10 + Ј, па је В = 7 или В = 8. Не може бити В = 8 јер би било Ј = 6, а та цифра је већ искоришћена. Према томе, В = 7, Ј = 4. Како је К + Ц = 10 и У + 1 = К, то користећи преостале цифре добијамо да је К = 2, Ц = 8 и У = 1. Након замене дата једнакост гласи: $712 + 59708 = 60420$.

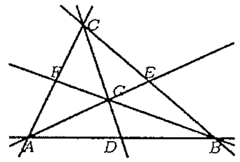
1039. Како је $\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{10}$, а $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$, то је $\dfrac{5}{10} < \dfrac{a}{10} < \dfrac{15}{20}$, па је $a = 6$ или $a = 7$. Заменом ових вредности у једнакост $\dfrac{a}{10} + \dfrac{b}{15} = \dfrac{5}{6}$ добијамо да је једино решење задатка: $a = 7$, $b = 2$.

1040. Како је $10\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{dm}$, то је укупно исечено 1 000 000 коцкица. Да би се поплочала стаза ширине 1 m потребно је поређати једну поред друге 10 коцкица. То значи да је по дужини поређано једна поред друге 100 000 коцкица. Та стаза је дугачка 100 000 dm, односно 10 km. Пешак би ту стазу прешао за 2 сата.

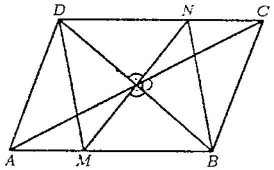
1041. Бројеви $2p$, $4r$ и 2006 су парни, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. Следи да је $2p + 4r = 2000$, односно $p + 2r = 1000$. Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је и p паран број, па је $p = 2$. Следи да је $r = 499$. Након провере да је 499 прост број закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = 2$, $q = 2$, $r = 499$.

1042. Остаци при дељењу бројева 287 и 431 природним бројем n су редом 1 и 2, па следи да n дели бројеве 286 и 429. Како је $286 = 2 \cdot 11 \cdot 13$, а $429 = 3 \cdot 11 \cdot 13$, то је могуће да је $n = 11$ или $n = 13$ или $n = 143$. Провером утврђујемо да се при дељењу броја 231 бројем $n + 1$ добија остатак 3 једино за $n = 11$.

1043. Једно решење је дато на слици.



Сл. уз зад. 1043



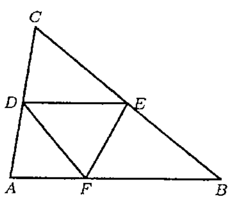
Сл. уз зад. 1045

1044. Из друге једнакости добијамо да је $\frac{a}{b} = \frac{1}{9}$. Користећи прву једнакост добијамо да је $a = 3$, $b = 27$.

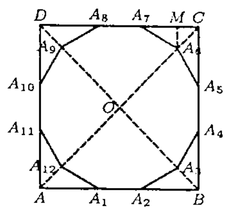
1045. Углови OBM и ODN су углови са паралелним крацима, па су једнаки. Тачка O је средиште дијагонале BD, па је $OB = OD$. Како је још $\angle BOM = \angle DON = 90°$, то је по другом ставу подударности троуглова (УСУ) $\triangle MBO \cong \triangle NDO$. Следи да је $MB = ND$. Ове дужи су и паралелне, па следи да је четвороугао $MBND$ паралелограм. Његове дијагонале су међусобно нормалне, па је он ромб.

1046. Прости бројеви већи од 3 су непарни, па су a и b непарни бројеви. Њихов збир $a + b$ и њихова разлика $a - b$ су парни бројеви, па је производ $(a + b) \cdot (a - b)$ дељив са 4. При дељењу са 3 бројеви a и b могу имати остатак 1 или 2. Ако имају исти остатак, онда је разлика $a - b$ дељива са 3, а ако имају различит остатак, онда је збир $a + b$ дељив са 3. У сваком случају производ $(a + b) \cdot (a - b)$ је дељив са 3. Како је дељив и са 3 и са 4, дељив је са 12.

1047. Нека је F тачка пресека симетрала углова ADE и BED. Како је DE средња линија троугла ABC, то је она паралелна са страницом AB. Одатле следи да је $\angle FDE = \angle AFD$, па је $\angle AFD = \angle ADF$. Троугао AFD је једнакокрак, па је $AF = AD$. Тачка D је средиште странице AC, па је $AF = \frac{AC}{2}$. Аналогно добијамо да је $BF = \frac{BC}{2}$. Следи да је $AB = \frac{AC + BC}{2}$.



Сл. уз зад. 1047



Сл. уз зад. 1050

1048. Нека је a дужина основице, а b дужина крака (све у cm) троугла који испуњава услове задатка. Како је $a + 2b$ непаран број, то је a непаран број. Збир дужина две странице у троуглу је већи од дужине треће странице, па мора бити $a < 2b$. Како је $a + 2b = 2005$, то је $a < 1003$, па a може бити било који елемент скупа $\{1, 3, \ldots, 1001\}$. Према томе, број троуглова који испуњавају услове задатка је 501.

1049. Из $\sqrt{17} > 4$ и $\sqrt{37} > 6$ следи $\sqrt{\sqrt{17} + \sqrt{37}} > \sqrt{10}$. Како је $\sqrt{10} > 3$ и $\sqrt{2} > 1$, то је $\sqrt{5 + \sqrt{\sqrt{17} + \sqrt{37}} + \sqrt{2}} > \sqrt{5 + 3 + 1}$, па следи тражена неједнакост.

1050. Обележимо темена дванаестоугла словима A_1, A_2, ... A_{12}, а темена квадрата словима A, B, C и D (као на слици). Нека је дужина странице дванаестоугла једнака x (у cm). Обележимо са M подножје нормале из A_6 на страницу квадрата CD. У правоуглом троуглу A_6MA_7 угао A_6A_7M једнак је $30°$ као спољашњи угао правилног дванаестоугла. Због тога је $A_6M = \frac{x}{2}$, а $A_7M = \frac{\sqrt{3}}{2}x$. Троугао A_6CM је једнакокрако правоугли, па је $MC = \frac{x}{2}$. Како је $A_8D = A_7C$, то је $CD = x + 2 \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{x}{2})$. Следи да је $x \cdot (2 + \sqrt{3}) = 10$, па је $x = 10 \cdot (2 - \sqrt{3})$.

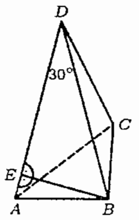
1051. Пођимо од очигледне неједнакости $3^2 > 2^3$. Степеновањем добијамо да је $3^{2000} > 2^{3000}$. Следи да је $3^{2007} > 3^7 \cdot 2^{3000}$, па је $3^{2007} - 2^{3000} > (3^7 - 1) \cdot 2^{3000}$. Како је $3^7 - 1 > 2007$, то је $(3^7 - 1) \cdot 2^{3000} > 2007 \cdot 2^{2007}$. Према томе, $3^{2007} - 2^{3000} > 2007 \cdot 2^{2007}$.

1052. Претпоставимо да постоји такав троугао. Ако са P означимо његову површину (у cm^2), онда користећи формулу за површину троугла добијамо да су дужине страница (у cm) тог троугла $\frac{2P}{1}$, $\frac{2P}{2}$ и $\frac{2P}{3}$. Како је $\frac{2P}{1} > \frac{2P}{2} + \frac{2P}{3}$, то је дужина једне странице тог троугла већа од збира дужина друге две странице. То је немогуће, па следи да такав троугао не постоји.

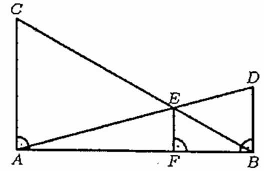
1053. Такви четвороцифрени бројеви могу да буду записани са две цифре које се појављују по два пута или са три цифре од којих се једна појављује два пута, а остале две по једном. У првом случају, на три начина бирамо које две цифре се појављују по два пута у запису броја. Нека су то на пример неке цифре a и b. Бројеви записани помоћу њих су: $aabb$, $abab$, $abba$, $baba$, $baab$ и $bbaa$. Према томе, у том случају има $3 \cdot 6$, односно 18 бројева. У другом случају, на три начина бирамо цифру која се у запису броја појављује два пута, на четири начина бирамо место на коме је једна од цифара које се у том запису појављују једном, а на три начина бирамо место на коме је друга од цифара које се у том запису појављују једном. У том случају има $3 \cdot 4 \cdot 3$, односно 36 бројева. Укупно има 54 броја са датом особином.

1054. Како је $2007^{2005} - 2007 = 2007 \cdot (2007^{2004} - 1) = 9 \cdot 223 \cdot (2007^{2004} - 1)$, то је дати број дељив са 9. Број 2007^4 се завршава цифром 1, па следи да се и број 2007^{2004} завршава цифром 1. Због тога је $2007^{2004} - 1$ дељив са 10, па је и $2007^{2005} - 2007$ дељив са 10. Како је дати број дељив и са 9 и са 10, он је дељив са 90.

1055. Обележимо темена основе пирамиде са A, B и C, а врх са D. Нека је тачка E подножје висине из темена B бочне стране ABD. У правоуглом троуглу EBD угао EDB једнак је $30°$, па је дужина катете BE једнака половини дужине хипотенузе BD и износи 4 cm. Површина бочне стране пирамиде је 16 cm^2. Примењујући Питагорину теорему на троугао EBD добијамо да је дужина дужи ED једнака $4\sqrt{3}$ cm. Онда је дужина дужи AE једнака $8 - 4\sqrt{3}$ cm. Примењујући Питагорину теорему на троугао ABE добијамо да је дужина основне ивице AB дате пирамиде једнака $8\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ cm. Основа пирамиде је једнакостранични троугао, па је површина те основе једнака $\frac{(8\sqrt{2}-\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$, тј. $32\sqrt{3}-48\,\text{cm}^2$. Површина пирамиде је $32\sqrt{3}-48\,\text{cm}^2+3\cdot 16\,\text{cm}^2$, односно $32\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.



Сл. уз зад. 1055



Сл. уз зад. 1057

1056. Како је $1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2004\cdot 2006=(2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+(4-1)\cdot(4+1)+\cdots+(2005-1)\cdot(2005+1)=2^2-1+3^2-1+4^2-1+\cdots+2005^2-1=1^2+2^2+3^2+\cdots+2005^2-2005$, то је тражена разлика једнака 2005.

1057. Нека је тачка F подножје нормале из тачке E на дуж AB. Троуглови AFE и ABD су правоугли и имају заједнички угао FAE, па су слични. Следи да је $FE:BD=AF:AB$. Троуглови FBE и ABC су правоугли и имају заједнички угао FBE, па су и они слични. Следи да је $FE:AC=FB:AB$. Из ових једнакости добијамо да је $\frac{FE}{BD}+\frac{FE}{AC}=\frac{AF+FB}{AB}$, односно $FE\cdot(\frac{1}{BD}+\frac{1}{AC})=1$. Према томе, дужина дужи FE, а самим тим и тражено растојање је 2 cm.

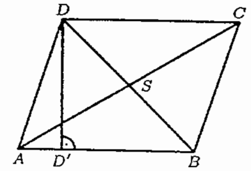
1058. Цифру десетица хиљада петоцифреног броја са датим својством можемо изабрати на 5 начина, цифру јединица хиљада на 4 начина, цифру стотина на 3 начина, цифру десетица на 2 начина и цифру јединица на 1 начин, одакле следи да таквих петоцифрених бројева има 120. Како су код сваког од њих све цифре различите, то се у запису свих 120 бројева свака од цифара 1, 2, 3, 4 и 5 појављује по 120 пута, и то по 24 пута на сваком месту у запису петоцифреног броја. Следи да је збир свих петоцифрених бројева са датим својством једнак $(1+2+3+4+5)\cdot 24\cdot(10000+1000+100+10+1)$, тј. 3999960.

1059. Број који је дељив и са 5 и са 7 и са 11, дељив је са 385. Како при дељењу броја 7002000 бројем 385 добијамо количник 18187 и остатак 5, то ће тражени седмоцифрени бројеви бити $385\cdot 18188$ и $385\cdot 18189$, односно 7002380 и 7002765.

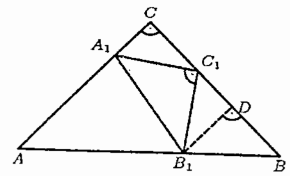
1060. Ако је S тачка пресека дијагонала, онда је S средиште сваке од дијагонала, па је $AS=SC=3\,\text{cm}$. Прво се конструише правоугли троугао BDD'. Након тога, одреди се средиште S дужи BD. Затим се конструише круг са центром у S и полупречником дужине 3 cm. У пресеку круга са правом која садржи тачке B и D' добија се тачка A. Тачка C се добија у пресеку круга и праве која садржи тачке A и S.

1061. На тестирању је учествовало 30 дечака и 270 девојчица. Сви ученици су укупно освојили $300\cdot 84$, односно 25200 бодова, док су девојчице укупно освојиле $270\cdot 83$, односно 22410 бодова. Следи да су дечаци укупно освојили 2790 бодова. Како је учествовало 30 дечака, сваки од њих је освојио по 93 бода.

1062. Нека је тачка D подножје нормале из тачке B_1 на страницу BC. Како је $\angle B_1C_1D=180°-(\angle A_1C_1B_1+\angle A_1C_1C)=90°-\angle A_1C_1C=\angle C_1A_1C$ и $\angle C_1DB_1=\angle A_1CC_1=90°$, то је и $\angle C_1B_1D=\angle A_1C_1C$. Како је и $C_1B_1=A_1C_1$, то на основу



Сл. уз зад. 1060



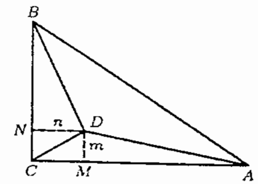
Сл. уз зад. 1062

другог става подударности (УСУ) следи да је $\triangle C_1B_1D\cong\triangle A_1C_1C$. Одатле добијамо да је $C_1D=A_1C$ и $DB_1=CC_1$. Троугао B_1BD је једнакокракоправоугли, па је $DB_1=DB$. Одатле добијамо да је $DB=CC_1$. Следи да је $CB=2\cdot CC_1+C_1D$. Како је $CB=AC=AA_1+A_1C$ и $A_1C=C_1D$, то је $AA_1=2\cdot CC_1$.

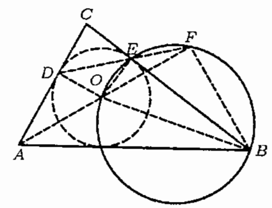
1063. Прости бројеви се могу завршавати цифром 1, 2, 3, 5, 7 или 9. Како се од простих бројева цифром 2 завршава само број 2, а цифром 5 само број 5, то се бар 2005 од датих простих бројева завршавају неком од цифара 1, 3, 7 или 9. Како имамо бар 2005 бројева, а 4 могућности за цифру којом се завршавају ти бројеви, по Дирихлеовом принципу бар 502 од тих бројева се завршавају истом цифром.

1064. Како је $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab=\frac{a^2+b^2-(ab)^2}{ab}=\frac{a^2+b^2-(a-b)^2}{ab}=\frac{2ab}{ab}=2$, то је вредност датог израза увек константна, па не зависи ни од a ни од b.

1065. Нека су тачке M и N подножја нормала из тачке D на катете AC и BC. Означимо са a, b, c, m и n дужине (у cm) дужи BC, AC, AB, DM и DN редом. Како су површине троуглова ACD и BCD једнаке четвртини површине троугла ABC, то је $\frac{mb}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{ab}{2}$ и $\frac{na}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{ab}{2}$. Следи да је $m=\frac{a}{4}$ и $n=\frac{b}{4}$. Из правоуглог троугла CMD добијамо да је $m^2+n^2=CD^2$, односно $(\frac{a}{4})^2+(\frac{b}{4})^2=25$. Следи да је $a^2+b^2=400$, па је $c^2=20^2$. Према томе, дужина хипотенузе AB је 20 cm.



Сл. уз зад. 1065



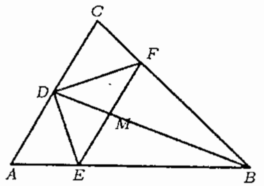
Сл. уз зад. 1068

1066. Нека је разлика сваког броја и његовог претходника једнака d. Други и трећи број у низу имају исту цифру десетица, па следи да је d једноцифрен број. Како је први број у низу једноцифрен, а други двоцифрен, то је $B=1$. Даље следи да је $C=2$ и $F=3$. Други број у низу је 12, а пети 33. Како је $12+3d=33$, то је $d=7$. Ћирило је на табли написао бројеве: 5, 12, 19, 26, 33.

1067. Како је $2^1=2$, $2^2=4$, $2^3=8$, $2^4=16$, $2^5=32$, то се бројеви облика 2^n редом завршавају цифром 2, 4, 8, 6, 2, $\ldots$. Слично, бројеви облика 3^{n+3}, односно $27\cdot 3^n$ се редом завршавају цифром 1, 3, 9, 7, 1, ... Због тога се збир $2^n + 3^{n+3}$ завршава или цифром 3 или цифром 7. Како се квадрат природног броја никад не завршава неком од те две цифре, то следи да тражени број n не постоји.

1068. Нека је $\angle BAC = \alpha$, а $\angle ABC = \beta$. Тада је $\angle ACB = 180° - \alpha - \beta$. Дужи CD и CE су тангентне дужи из исте тачке, па су једнаке. Троугао DEC је једнакокрак, па је $\angle CDE = \frac{1}{2}(180° - (180° - \alpha - \beta)) = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Угао CDE је спољашњи угао троугла AFD, па је $\angle FAD + \angle AFD = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Како је AO симетрала $\angle BAC$, то је $\angle FAD = \frac{\alpha}{2}$, па следи да је $\angle AFD = \frac{\beta}{2}$. Полуправа BO је симетрала $\angle ABC$, па је $\angle OBE = \frac{\beta}{2}$. Како је $\angle OFE = \angle AFD = \angle OBE$, то се око четвороугла $OBFE$ може описати круг. Углови OEB и OFB су периферијски углови тог круга над истом тетивом OB, па су једнаки. Како је $\angle OEB = 90°$, то је и $\angle AFB = \angle OFB = 90°$.

1069. Ако је $|x-2| < 0{,}04$, онда је $1{,}96 < x < 2{,}04$. Тада је $-1{,}1584 < x^2 - 5 < -0{,}8384$, па је $A = 1{,}1584$.



Сл. уз зад. 1070

1070. У троуглу ADB дуж DE је симетрала угла ADB, па је $AE : EB = AD : BD$. Слично, у троуглу BCD је $CF : FB = DC : BD$. Како је $AD = DC$, то је $AE : EB = CF : FB$. На основу обрнуте Талесове теореме добијамо да је $AC \parallel EF$. Следи да је $\triangle ADB \sim \triangle EMB$ и $\triangle DBC \sim \triangle MBF$. Одатле је $AD : EM = DB : MB$ и $DC : MF = DB : MB$. Према томе, $AD : EM = DC : MF$, па је $EM = MF$.

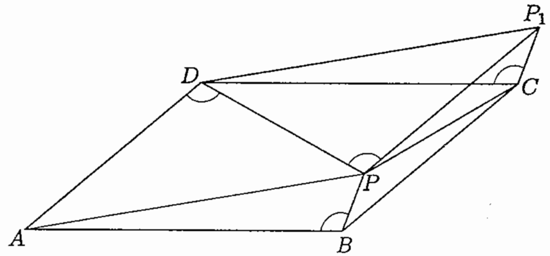
1071. За $n = 1$ и $n = 2$ бројеви датог облика су 18 и 45. Њихов највећи заједнички делилац је 9, па следи да највећи заједнички делилац свих бројева датог облика може бити или 1 или 3 или 9. Како је $4^1 \equiv 4 \pmod 9$, $4^2 \equiv 7 \pmod 9$, $4^3 \equiv 1 \pmod 9$, то закључујемо да је $4^{3k+l} \equiv 4^l \pmod 9$, где $k \in \mathrm{N}$, а $l \in \{0,1,2\}$. Сваки природан број већи од 2 може се представити у облику $3k$, $3k+1$ или $3k+2$, где је k природан број. Ако је $n = 3k$, онда је $4^{3k} + 15 \cdot 3k - 1 \equiv 1 + 0 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Ако је $n = 3k+1$, онда је $4^{3k+1} + 15 \cdot (3k+1) - 1 \equiv 4 + 6 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. Ако је $n = 3k+2$, онда је $4^{3k+2} + 15 \cdot (3k+2) - 1 \equiv 7 + 3 - 1 \equiv 0 \pmod 9$. У сваком случају, сви бројеви облика $4^n + 15n - 1$ су дељиви са 9, па је управо број 9 њихов највећи заједнички делилац.

1072. Обележимо дужине ивица квадра са x, y и z, тако да је $x \leqslant y \leqslant z$. Тада важи да је $2(xy + xz + yz) = 4(x + y + z)$, односно $xy + xz + yz = 2(x + y + z)$. Како је $xy + xz + yz \geqslant xy + xz + x^2 = x(x + y + z)$, то је $x \leqslant 2$. Ако је $x = 1$, онда је $y + z + yz = 2(1 + y + z)$, односно $yz - y - z = 2$. Одатле је $y(z-1) - (z-1) = 3$, па је $(y-1)(z-1) = 3$. Како је $y \leqslant z$, то је $y - 1 = 1$ и $z - 1 = 3$, па је $y = 2$ и $z = 4$. Ако је $x = 2$, онда је $2y + 2z + yz = 2(2 + y + z)$, односно $yz = 4$. Како је $2 \leqslant y \leqslant z$, то је $y = 2$ и $z = 2$. Према томе, решења су $x = 1$, $y = 2$, $z = 4$ и $x = 2$, $y = 2$, $z = 2$.

1073. Након првог потеза Раша сигурно даје Гаши део чоколаде правоугаоног облика. Гаша треба да пресече чоколаду тако да део који да Раши буде квадратног облика. Раша је опет принуђен да након свог потеза да Гаши део правоугаоног облика, итд. Према томе, Гаша никад неће добити део чоколаде квадратног облика, а он увек даје Раши део квадратног облика, па ће овом стратегијом Гаша сигурно победити.

1074. Конструишимо троугао DCP_1 (слика) тако да је $DP_1 \parallel AP$ и $DP_1 = AP$. Тада је $\triangle ABP \cong \triangle DCP_1$, јер је $AB = DC$, $AP = DP_1$ и $\angle BAP = \angle CDP_1$. Одмах следи да је $\angle DCP_1 = \angle ABP$. Како је $PP_1 \parallel AD$, јер је APP_1D паралелограм, то је

$\angle ADP = \angle DPP_1$. Тада је $\angle DPP_1 = \angle DCP_1$, па је четвороугао $DPCP_1$ тетиван. Сада је $\angle DAP = \angle DPP_1 = \angle DCP = 30°$.



Сл. уз зад. 1074

1075. Направимо произвољну групу од 1003 члана. Једна од 1004 преостале особе познаје све чланове те групе. Нека је то особа x_1. Укључимо особу x_1 у ту групу уместо неке од чланова те групе. Сада међу преостале 1004 особе опет постоји особа, означимо је са x_2 која познаје све чланове те групе. Укључимо и њу у групу уместо једне од особа изузев особе x_1. На овај начин може се формирати група од 1003 особе $x_1, x_2, \ldots, x_{1003}$ које се све међусобно познају. Сада постоји особа x_{1004} која није у групи и познаје све особе из те групе. У групи $x_1, x_2, \ldots, x_{1003}, x_{1004}$ сви познају једни друге. Од преостале 1003 особе се може формирати једна група чије ће све чланове познавати нека особа ван те групе, то јест нека од особа $x_1, x_2, \ldots, x_{1004}$, рецимо особа x. Та особа x познаје заправо све присутне особе.

1076. Нека је

$$A = \frac{2}{(x+1)^2 + y^2 + 1} + \frac{2}{(y+1)^2 + z^2 + 1} + \frac{2}{(z+1)^2 + x^2 + 1}$$
$$= \frac{2}{x^2 + y^2 + 2x + 2} + \frac{2}{y^2 + z^2 + 2y + 2} + \frac{2}{z^2 + x^2 + 2z + 2}.$$

Како је $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$, $y^2 + z^2 \geqslant 2yz$ и $z^2 + x^2 \geqslant 2zx$, то је

$$A \leqslant \frac{1}{xy + x + 1} + \frac{1}{yz + y + 1} + \frac{1}{zx + z + 1}.$$

Како је $\frac{1}{xy + x + 1} \cdot \frac{z}{z} = \frac{z}{1 + xz + z}$ и $\frac{1}{yz + y + 1} \cdot \frac{xz}{zx} = \frac{zx}{zx + 1 + z}$, то је

$$A \leqslant \frac{z}{1 + xz + z} + \frac{zx}{zx + 1 + z} + \frac{1}{zx + z + 1} = 1.$$

Једнакост важи за $x^2 + y^2 = 2xy$, $y^2 + z^2 = 2yz$, $z^2 + x^2 = 2xz$, тј. за $x = y$, $y = z$ и $z = x$ односно за $x = y = z$.

1077. Почетна позиција дата је на слици 1 ($a, b, c, d, e, f, g, h, j \in \{-1, 1\}$). Први корак је на слици 2.

a	b	c
d	e	f
g	h	j

Сл. 1 уз зад. 1077

bd	aec	bf
aeg	$dbhf$	cej
dh	gej	hf

Сл. 2 уз зад. 1077

Други корак је дат на слици 3, тј. (јер је $1^2 = (-1)^2 = 1$ и $x^3 = x$ за $x \in \{-1, 1\}$) на слици 4.

a^2e^2gc	$d^2b^3f^2h$	e^2c^2aj
$b^2d^3h^2f$	$a^2e^4g^2j^2c^2$	$b^2f^3h^2d$
ae^2g^2j	$d^2h^3f^2b$	ge^2j^2c

Сл. 3 уз зад. 1077

gc	bh	aj
df	1	fd
aj	bh	gc

Сл. 4 уз зад. 1077

Трећи корак је као на слици 5, тј. 6.

$bhdf$	$acgj$	$bhdf$
$acgj$	$(bhdf)^2$	$acgj$
$bhdf$	$acgj$	$bhdf$

Сл. 5 уз зад. 1077

$bhdf$	$acgj$	$bhdf$
$acgj$	1	$acgj$
$bhdf$	$acgj$	$bhdf$

Сл. 6 уз зад. 1077

Последњи, четврти корак, дат је на слици 7, тј. 8.

$(acgj)^2$	$(bhdf)^2$	$(acgj)^2$
$(bhdf)^2$	1	$(bhdf)^2$
$(acgj)^2$	$(bhdf)^2$	$(acgj)^2$

Сл. 7 уз зад. 1077

1	1	1
1	1	1
1	1	1

Сл. 8 уз зад. 1077

1078. Како је $n!$ за $n \geqslant 9$ дељиво са $3^3 = 27$, то треба проверити дељивост са 3^3 збира $1!+2!+3!+\cdots+8!$. Из $1!+2!+3!+\cdots+8! = 9+4!\cdot(1+5+5\cdot 6)+7!\cdot(1+8)$ добијамо $1!+2!+3!+\cdots+8! \equiv 9 \pmod{27}$, па значи за $n \geqslant 8$ број $1!+2!+\cdots+n!$ није дељив са $27 = 3^3$ (а дељив је са $9 = 3^2$).

Непосредно се проверава да је $1 \equiv 1 \pmod{27}$, $1+2! \equiv 3 \pmod{27}$, $1+2!+3! \equiv 9 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4! \equiv 6 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4!+5! \equiv 18 \pmod{27}$, $1+2!+3!+4!+5!+6! \equiv 9 \pmod{27}$. Како је $1+2!+3!+4!+5!+6!+7! = 81\cdot 73$, тј.

$3^4 \mid (1+2!+3!+4!+5!+6!+7!)$, то је $k=4$ највећи број за који $3^k \mid (1!+2!+\cdots+n!)$ и то за $n = 7$.

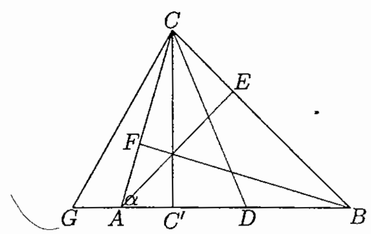
1079. Како је $AE \leqslant \sqrt{3}$, $BF \leqslant \sqrt{3}$ и $CD \leqslant \sqrt{3}$, то је $h_a \leqslant \sqrt{3}$, $h_b \leqslant \sqrt{3}$ и $h_c \leqslant \sqrt{3}$. Бар један од углова α, β или γ је већи или једнак од $60°$. Нека је рецимо $\alpha \geqslant 60°$.

(1) Ако је $\alpha = 60°$, тада је $AC = \frac{2}{\sqrt{3}}h_c \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = 2$, па је

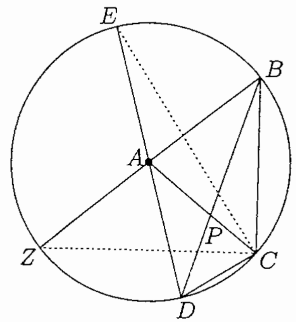
$$P_{\triangle ABC} = \frac{b\cdot h_b}{2} \leqslant \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

(2) Ако је $\alpha > 60°$, тада на правој AC постоји тачка G таква да је $\measuredangle BGC = 60°$ (слика), па је тада $GC = \frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant h_c \leqslant 2$ и $AC < GC \leqslant 2$. Сада се одмах добија

$$P_{\triangle ABC} = \frac{AC\cdot h_b}{2} \leqslant \frac{2\cdot\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$



Сл. уз зад. 1079



Сл. уз зад. 1081

1080. Како је $x^2+ax+a^2-6 = (x+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}(a^2-8)$, то за $a^2 > 8$ једначина $x^2+ax+a^2-6 = 0$ нема решења. Претпоставимо да је $a^2 \leqslant 8$. Тада је $a^3 \leqslant 8a$, јер је $a > 0$ по претпоставци. Како је $a^3 = 6a+b$, то је $6a+6 \leqslant 8a$, односно $a \geqslant 3$ и $a^2 \geqslant 9$, што је контрадикција. Дакле, ни у овом случају дата једначина нема решења.

1081. На правим DA и BA изабрати редом тачке E и Z тако да је $AC = AE = AZ$ (слика). Како је $\measuredangle DEC = \frac{\measuredangle DAC}{2} = 18° = \measuredangle CBD$, то је четвороугао $DEBC$ тетиван. Слично, четвороугао $CBZD$ је тетиван, јер је $\measuredangle AZC = \frac{\measuredangle BAC}{2} = 36° = \measuredangle BDC$. Према томе, петоугао $BCDZE$ је уписан у кружницу $k(A, AC)$. Из тога следи да је $AC = AD$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ADC = \frac{180°-36°}{2} = 72°$, што повлачи да је $\measuredangle ADP = 36°$ и $\measuredangle APD = 108°$.

1082. Како је $50 = 4\cdot 12+2$, то постоји најмање 13 тачака обојених истом бојом. Пронађимо максималан број једнакокраких троуглова чија су темена неке три од датих n тачака. Издвајањем неке две од тих n тачака, можемо добити највише 2 једнакокрака троугла којима изабране две тачке одређују основицу. Зато је тражени максималан број једнакокраких троуглова $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n(n-1)$. Када од укупног броја троуглова одузмемо максималан број једнакокраких троуглова, добијамо минималан број разностраничних троуглова, и он износи

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-8)}{6}, \quad n > 8.$$

За $n = 13$ добијамо $\frac{13 \cdot 12 \cdot 5}{6} = 130$, па дакле постоји најмање 130 разностраничних троуглова чија су темена обојена истом бојом.

1083. Претпоставимо супротно од оног што се тврди у задатку, тј. да је p прост број и да је $m = 7p + 3^p - 4$ квадрат целог броја. За $p = 2$ је $m = 19$, а за $p = 3$ је $m = 44$, што нису потпуни квадрати. Претпоставимо зато да је $p > 3$ и нека је $m = n^2$ за неко $n \in \mathbf{Z}$. Искористимо „малу“ Фермаову теорему[1] према којој је $3^p \equiv 3 \pmod{p}$, па добијамо да је

$$m = 7p + 3^p - 4 \equiv 0 + 3 - 4 = -1 \pmod{p}.$$

Ако је $p = 4k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$, тада је, опет по „малој“ Фермаовој теореми, $-1 \equiv m^{2k+1} = n^{4k+2} = n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, што је контрадикција, јер је $p > 3$.
Претпоставимо да је $p \equiv 1 \pmod{4}$. Тада је $m \equiv 3 - 1 = 2 \pmod{4}$, што је опет контрадикција, јер ниједан квадрат природног броја не даје остатак 2 по модулу 4.
Дакле, ни за један прост број p, m није квадрат природног броја.

[1] Видети, на пример, В. Мићић, З. Каделбург, Д. Ђукић: *Увод у теорију бројева*, Материјали за младе математичаре 15, Друштво математичара Србије, Београд 2004.

Срђан Огњановић

Математика 10

Решени задаци са пријемних испита у Математичкој гимназији 1975–1999

• • •

Припремни задаци за упис у Математичку гимназију

„К Р У Г"
БЕОГРАД, 1999.

Аутор: *мр Срђан Огњановић*, професор Математичке гимназије у Београду

МАТЕМАТИКА

Решени задаци са пријемних испита
у Математичкој гимназији 1975–1999.

Друго допуњено издање

Издавач: „Круг“, Београд, Захумска 31

За издавача: *Маријана Ивановић*

Рецензент: *Др Зоран Каделбург*, професор Математичког факултета у Београду

Уредник: *Живорад Ивановић*

Текст је обрађен компјутерски применом програмског пакета
AMS-TEX Америчког математичког друштва

Коректура: *аутор*

Корице: *Маријана Ивановић*

CIP-Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

372.851(079.1)

ОГЊАНОВИЋ, Срђан
Математика : решени задаци са пријемних испита у Матеметичкој гимназији 1975-1995. / Срђан Огњановић. - [1. Изд.]. - Београд : Круг , 1995 (Бор : "Графомед"). - 78 стр. ; 24 цм

Тираж 500.
ISBN 86-7136-009-1

ИД=42467084

Штампа "Графомед" Бор

САДРЖАЈ

П Р Е Д Г О В О Р

Ова Збирка је мали допринос предстојећој прослави тридесетогодишњице Математичке гимназије у Београду, а намењена је првенствено ученицима завршних разреда основне школе и њиховим наставницима за припремање за пријемне испите, додатну наставу и такмичења.

У Математичкој гимназији први разред је уведен 1975. године. Овде су дати задаци са свих пријемних испита одржаних од тада до 1995. године (у периоду тзв. усмереног образовања пријемни испити нису се одржавали). Почевши од 1993. године испит је у облику теста са 12 задатака код којих је у сваком понуђено пет одговора од којих је само један тачан. Показало се да овакав начин испитивања ученика даје најреалнију слику њиховог знања и могућности. Задаци су, наиме, такви да један број захтева добро познавање математичке технике, а други су суптилнији и више испитују интелигенцију ученика и њихов таленат за математику.

Аутор Збирке, који је имао прилику да током година учествује у одабирању и састављању задатака за скоро све ове пријемне испите, додао је Збирци још 15 тестова са по 12 задатака, који својим садржајем и формом подсећају на задатке са пријемних испита. Они су намењени ученицима за самостални рад, а могу се лако оценити и бодовати. Ученицима који се припремају за пријемни испит препоручује се да се, осим овом Збирком, послуже и приручницима аутора Срђана Огњановића и Живорада Ивановића:

- Збирка припремних задатака и тестова за полагање пријемних испита за упис у средњу школу у издању Друштва математичара Србије;
- Учите брзо, научите лако (формуле, решени примери, задаци, тестови) у издању компаније „Политика".

Посебну захвалност дугујем рецензенту, колеги др Зорану Каделбургу, који је и сам дуго година учествовао у комисијама за одабирање задатака за пријемни испит у Математичкој гимназији, а такође детаљно прегледао све задатке у Збирци и дао врло корисне примедбе и корекције.

Аутор

ПРЕДГОВОР ДРУГОМ ИЗДАЊУ

Прво издање допуњено је задацима са пријемних испита 1996–1999. године, као и са десет нових тестова за увежбавање пређеног градива. Међутим, најзначајнија промена је додавање једног броја припремних задатака разврстаних по областима. Наиме, програм за пријемни испит у Математичкој гимназији поклапа се са програмом математике у основној школи, али се ипак на испиту највећи број задатака даје из одређених области. Ученицима који се припремају за полагање пријемног испита, препоручује се да прво раде задатке по темама, а да тестове I–XXV раде на крају као завршне припреме.

Аутор

ПРИЈЕМНИ ИСПИТИ У МАТЕМАТИЧКОЈ ГИМНАЗИЈИ

јуни 1975.

1. (1.) Решити једначину $\dfrac{(x+2)(x-3)(x+5)}{x-2}=0$.

2. (2.) Када се омотач купе развије добија се полукруг полупречника $r=6$. Колике су површина и запремина купе?

3. (3.) Одредити a тако да права $3x+ay=12$ одређује са координатним осама троугао површине 6.

4. (4.) Окружити тачна тврђења:

а) разлика два природна броја је природан број;

б) две паралелне праве увек припадају истој равни;

в) 1 је једини цео број који је једнак свом квадрату;

г) $\sqrt{2}>\sqrt[3]{3}$.

5. (5.) Које од следећих неједнакости важе за сваки a и b:

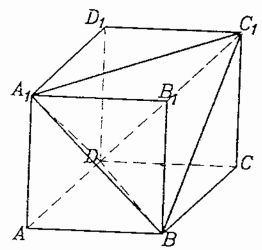
а) $(a+b)^2>a^2+b^2$; б) $a^2-b^2\geqslant 2ab$; в) $a^2>a^2-b^2$?

6. (6.) Ако је запремина коцке V, тада пирамида A_1BC_1D има запремину која је:

а) $\frac{1}{2}V$; б) $\frac{2}{3}V$;

в) $\frac{1}{4}V$; г) $\frac{1}{3}V$.

Окружити тачан одговор.



Сл. уз зад. 6

7. (7.) Дијагонале трапеза $ABCD$ ($AB \parallel CD$) секу се у тачки O. Доказати да су површине троуглова AOD и BOC једнаке.

8. (8.) Дат је ромб $ABCD$ са оштрим углом 60°. Права MN одсеца на страницама AB и BC одсечке MB и NB чији је збир једнак страници ромба. Доказати да је троугао MDN једнакостраничан.

9. (9.) Роба је поскупела 10%, а затим појефтинила 10%. Када је цена била нижа — пре поскупљења или после појефтињења?

10. (10.) Доказати да је број $9^{44}+4^{99}$ дељив са 5.

10. јуни 1976.

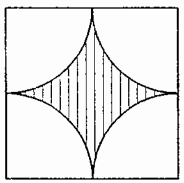
11. (1.) Решити по a једначину

$$a-\frac{(a+b)d}{c}=1-\frac{d+bc}{c}, \quad c\neq 0.$$

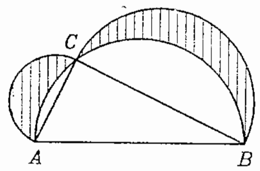
12. (2.) Конструисати квадрат чија је површина једнака збиру површина два дата квадрата.

13. (3.) Број 82** дељив је са 90. Које цифре су замењене звездицама?

14. (4.) Који део површине квадрата заузима фигура на слици ако је страница квадрата $a=2\,\mathrm{cm}$?



Сл. уз зад. 14



Сл. уз зад. 21

15. (5.) Доказати да је за сваки a израз a^2-2a+9 позитиван.

16. (6.) У једном троуглу је разлика два угла једнака троструком трећем углу, тј. $\alpha-\beta=3\gamma$. Доказати да је $\alpha-\gamma=90°$.

17. (7.) Доказати да средишта страница ма ког четвороугла образују паралелограм.

18. (8.) На неколико листова папира написани су бројеви $+1$ или -1 (на сваком листићу по један број). Збир свих тих бројева је 0, а њихов производ је 1. Доказати да је број листића дељив са 4.

14. јуни 1977.

19. (1.) За које вредности реалног броја a важе неједнакости:

а) $\frac{1}{a}>a$; б) $-a>a$; в) $|a|>1$?

20. (2.) Дата је једначина $\frac{a-b}{c}+2-\frac{a+c}{b}=0$. Решити је најпре по a, затим по b и најзад по c.

21. (3.) Над хипотенузом и катетама правоуглог троугла конструисани су полукругови као на слици. Доказати да је збир површина осенчених фигура једнак површини троугла.

22. (4.) Дато је пет произвољних природних бројева. Доказати да међу њима постоје бар два броја чија је разлика дељива са 4.

23. (5.) Доказати да је симетрала спољашњег угла при врху једнакостраничног троугла ABC паралелна основици троугла.

24. (6.) Решити једначину $x+|x|=\frac{x}{|x|}$.

25. (7.) Једнакокраки троугао са основицом a и краком b ротира око праве која је паралелна висини (на основицу) и пролази кроз теме на основици. Израчунати запремину тела које се добија на тај начин.

26. (8.) Одредити најмањи природан број који има следећу особину: остаци при дељењу тог природног броја, редом, са $2,3,\ldots,10$ су: $1,2,\ldots,9$.

26. август 1977.

27. (1.) Наћи бројеве a такве да је:

1° $2a<a$; 2° $|a-2|>1$.

28. (2.) Разговарају Зоран и Горан.

Зоран: „Горане, дај ми пет кликера, па ћу их имати два пута више од тебе.“

Горан: „Зоране, дај ми пет кликера, па ћу их имати три пута више од тебе.“

Колико кликера укупно имају Зоран и Горан?

29. (3.) У троуглу ABC је $\angle BAC=60°$, тачке D и E су подножја висина из темена B и C, а A_1 је средиште странице BC. Доказати да је $DA_1=EA_1$.

30. (4.) Ако се природном броју n дода 100, добија се тачан квадрат, а ако му се дода 168, добија се опет тачан квадрат. Који је то природан број?

31. (5.) Доказати да је број n^3+5n дељив са 6 за сваки цео број n.

32. (6.) Правилна тространа пирамида чије су све ивице једнаке има површину $6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Израчунати запремину ове пирамиде.

Време за израду: 120 минута.

20. јуни 1978.

33. (1.) Питали неког човека: „Колико имаш година?“ Он је одговорио: „Пре 10 година ја сам био четири пута старији од свог сина, а кроз 10 година бићу два пута старији од сина.“ Колико му је година?

34. (2.) Наћи све бројеве за које важи:

а) $\frac{1}{3} < |a| \leqslant 3$; б) $b^4 > b^3$.

35. (3.) Решити једначину $||x| - 2| = 1$.

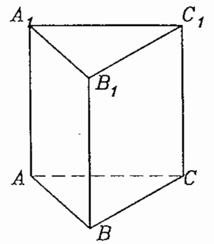
36. (4.) Ако је p прост број већи од 3, доказати да је $p^2 - 1$ дељиво са 24.

37. (5.) Одредити последњу цифру броја 77^{77}. Образложити одговор.

38. (6.) Нацртати троугао чије су све странице веће од 5 cm, а површина мања од 2 cm^2.

39. (7.) Дат је квадрат $ABCD$ странице $AB = 1$. Нека је O средиште странице AB. Израчунати површину оног дела квадрата који се налази ван круга са центром O и полупречником дужине 1.

40. (8.) Ако је V запремина призме $ABCA_1B_1C_1$, доказати да је запремина пирамиде ACB_1C_1 једнака $\frac{1}{3}V$.



Сл. уз зад. 40

25. јуни 1986.

41. (1.) Апсолутна вредност броја -2, тј. $|-2|$, једнака је (заокружи тачан одговор):

1° -2; 2° 2; 3° 0.

42. (2.) Која од следећих неједнакости важи за свако a и b (заокружи тачан одговор):

1° $(a-b)^2 \geqslant 0$; 2° $a^2 \geqslant a^2 - b^2$; 3° $a^2 + b^2 > a$.

43. (3.) Квадратни корен из x^2, тј. $\sqrt{x^2}$, једнак је (заокружи тачан одговор):

1° x; 2° $\pm x$; 3° $|x|$; 4° $-x$.

44. (4.) Окружити тачна тврђења:

1° Дијагонале ромба су нормалне међу собом;
2° Дијагонале ромба су једнаке;
3° Дијагонале ромба се полове.

45. (5.) Окружити тачна тврђења:

1° Спољашњи угао троугла већи је од унутрашњег несуседног угла троугла;
2° Спољашњи угао троугла мањи је од унутрашњег несуседног угла троугла;
3° Спољашњи угао троугла једнак је унутрашњем несуседном углу троугла.

46. (6.) Решење једначине је $x = 3$. Заокружити број испред те једначине:

1° $\frac{2x-1}{5} - 1 = 0$; 2° $3x - 1 = 2x + 3$; 3° $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}$.

47. (7.) За $m = 4$ систем једначина $\begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ mx - 6y = -8 \end{cases}$ је (заокружи тачан одговор):

1° немогућ; 2° одређен; 3° неодређен.

48. (8.) Средишта страница једног квадрата су темена (заокружи тачан одговор):

1° трапеза; 2° квадрата; 3° правоугаоника.

49. (9.) Вредност израза $\dfrac{3 + 4{,}20 : 0{,}1}{(1 : 0{,}3 - 2\frac{1}{3}) \cdot 0{,}3125}$ је (заокружи тачан одговор):

1° 132; 2° -5; 3° 144.

50. (10.) 3,6% неког броја је 144. Тај број је (заокружи тачан одговор):

1° 12 000; 2° 4 000; 3° 5 200.

51. (11.) Нека је A_1 средиште странице BC троугла ABC. Доказати да је $P_{\triangle BA_1A} = P_{\triangle CA_1A}$.

52. (12.) Нека су α, β, γ углови у теменима A, B и C троугла ABC и S пресек симетрала унутрашњих углова троугла. Доказати да је $\angle ASB = 90° + \frac{\gamma}{2}$.

53. (13.) Нека је P средиште странице AB и Q средиште странице BC квадрата $ABCD$. Израчунати површину троугла DPQ ако је дата дужина странице $AB = a$.

20. јуни 1988.

54. (1.) а) Одредити x тако да је $\{x, 2\} = \{2, 3\}$.
б) Одредити x, y тако да је $\{x, y, 5\} = \{2, 5\}$.
в) Одредити x, y, z тако да је $\{x, y, z\} = \{1\}$.

55. (2.) Израчунати вредност израза $\dfrac{2{,}75 : 1{,}1 + \frac{10}{3}}{2{,}5 - 0{,}4 \cdot \frac{10}{3}} : \frac{5}{7}$.

56. (3.) Одредити све природне бројеве m и n тако да је $m^2 - n^2 = 105$.

57. (4.) Решити једначину $2\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x$.

58. (5.) Иван има два пута више година него што је Горан имао када је Ивану било толико година колико је сада Горану. Заједно сада имају 35 година. Колико је стар свако од њих двојице?

59. (6.) Узастопни углови неког четвороугла су α, $\alpha+20°$, $\alpha+30°$ и $\alpha+50°$. Доказати да је тај четвороугао трапез.

60. (7.) Правоугли троугао, чије су катете дужине 15 cm и 20 cm, ротира око своје хипотенузе. Наћи запремину добијеног тела.

Време за рад 60 минута.

21. јуни 1989.

61. (1.) Одредити све реалне бројеве a за које важи:

а) $-a^2 = (-a)^2$; б) $-a^3 = (-a)^3$; в) $a^2 = a^3$;

г) $a^2 + a^3 = 0$; д) $\sqrt{a^2} = -a$.

62. (2.) а) Ако се дужине страница квадрата повећају за 10%, за колико се процената повећа његова површина?

б) Ако се дужине страница квадрата смање за 10%, за колико се процената смањи његова површина?

63. (3.) Решити једначину

$$\sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{4x^2+12x+9} = -1.$$

64. (4.) а) Доказати да број n^2+n+1 није дељив бројем 1990 ни за један природан број n.

б) Доказати да број n^2+n+2 није дељив бројем 1989 ни за један природан број n.

65. (5.) Решити неједначину $\dfrac{2x-3}{x-4} \leqslant 1$.

66. (6.) Нека је D тачка странице AC троугла ABC тако да је $AD = 7\,\text{cm}$, $DC = 9\,\text{cm}$ и $\angle BDC = \angle ABC$. Израчунати дужину странице BC и однос $BD : BA$.

67. (7.) Раван садржи средиште једног полупречника лопте и нормална је на тај полупречник. Одредити однос површине пресека те равни и лопте и површине великог круга лопте.

Време за рад 90 минута.

16. јуни 1990.

68. (1.) Израчунати вредност израза

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{225}\right)\cdot 9 + 0{,}16\right] : \left(\frac{1}{3} - 0{,}3\right)}{(5 - 1{,}1409 : 0{,}3) : \left(4{,}2 : 12 - 0{,}21 \cdot \frac{2}{3}\right)} : \frac{1}{114}.$$

69. (2.) Решити неједначину $\sqrt{4x^2-4x+1} < 3 - x$.

70. (3.) Просек година старости 11 играча фудбалског тима је 22 године. У току игре један играч је искључен, а један је због повреде изашао ван терена. Просек година старости преосталих 9 играча је 20 година. Када се вратио у игру повређени играч, онда је просек старости 10 играча на терену био 21 година. Израчунати колико година има искључени, а колико повређени играч.

71. (4.) Одредити најмањи природан број дељив са 7 који при дељењу са 3, 4, 5, 6 даје редом остатке 1, 2, 3, 4.

72. (5.) Дат је једнакокраки троугао ABC ($AB = AC \neq BC$). За сваку од следећих реченица утврдити да ли је тачна, односно нетачна:

1° Средишта описаног и уписаног круга троугла ABC се поклапају.

2° Тежиште троугла ABC се поклапа са његовим ортоцентром.

3° Симетрала спољашњег угла код темена C паралелна је краку AB.

4° Средиште уписаног круга и тежиште троугла ABC припадају висини која одговара основици.

5° За сваки једнакокраки троугао MNP важи: ако је један угао троугла MNP једнак неком углу троугла ABC, тада су троуглови ABC и MNP слични.

73. (6.) Висина једнакокраког трапеза једнака је 17 cm, а основице су 10 cm и 24 cm. Израчунати полупречник круга описаног око тог трапеза.

74. (7.) У равни π дат је једнакостранични троугао ABC странице a. Ван те равни дата је тачка M која је од сваког од темена троугла ABC удаљена за $\frac{5}{3}a$. Израчунати растојање тачке M од равни π.

Време за рад 90 минута

19. јуни 1991.

75. (1.) Своту од 42 000 динара треба поделити на четири лица тако да се износи који добијају први и други односе као $2:3$, други и трећи као $4:5$, а трећи и четврти као $6:7$. Колико ће свако од њих добити?

76. (2.) Одредити два природна броја чији је највећи заједнички делилац једнак 83, а најмањи заједнички садржалац једнак 1992.

77. (3.) Решити неједначину $\dfrac{x+7}{\sqrt{9x^2+6x+1}} < 2$.

78. (4.) У хиљадуцифреном броју

12345678901234567890 . . . 1234567890

избрисане су све цифре које се налазе на непарним местима (рачунајући слева на десно). У добијеном петстоцифреном броју избрисане су такође цифре које се налазе на непарним местима. Брисање цифара је продужено на исти начин све док нису избрисане све цифре. Која цифра је последња избрисана? (Образложити одговор!)

79. (5.) Које од следећих реченица су тачне, а које нетачне (одговорити са ДА или НЕ):

а) Ако су две праве нормалне на једну раван, онда су оне међусобно паралелне.

б) Ако су две праве паралелне једној равни, онда су и те две праве међу собом паралелне.

в) Ако су две праве нормалне на трећој правој (у простору), онда су те две праве међу собом паралелне.

г) Ако су две равни паралелне трећој равни, онда су и ове две равни међусобно паралелне.

д) Ако су две равни нормалне на трећој равни, онда су оне међу собом паралелне.

80. (6.) У унутрашњости правоугаоника $ABCD$ дата је тачка P. Ако је $PA = 5\,\mathrm{cm}$, $PB = 10\,\mathrm{cm}$ и $PC = 14\,\mathrm{cm}$, одредити PD.

81. (7.) Правоугли троугао ABC са катетама $AC = 9\,\mathrm{cm}$ и $BC = 12\,\mathrm{cm}$ је основа пирамиде $SABC$ једнаких бочних ивица $SA = SB = SC = 19{,}5\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину пирамиде $SABC$.

Време за израду задатака – 90 минута

20. јуни 1992.

82. (1.) Вредност израза

$$\frac{1-\frac{2}{5}\cdot 1{,}25+3:\frac{6}{5}}{\left(\frac{13}{5}-\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot\frac{10}{7}}-\frac{1+4:\left(2-\frac{2}{5}\right)}{7-2:\left(1-\frac{2}{3}\right)}$$

је 3,6% неког броја. Одредити тај број.

83. (2.) Отац је 30 година старији од сина, а 25 година од ћерке. Колико година има свако од њих ако је отац три пута старији од оба детета заједно?

84. (3.) Решити неједначину $\sqrt{\dfrac{x^2+4x+4}{9-6x+x^2}}<2$.

85. (4.) Нека је задат број $N = 10101\ldots0101$ (наизменично се ређају јединице и нуле).

а) Одредити број N који има најмањи број нула, тако да је N дељив са 9. (Образложити одговор!)

б) Одредити број N који има најмањи број нула, тако да је N дељив са 99. (Образложити одговор!)

86. (5.) Које од следећих реченица су тачне, а које нетачне (одговорити са ДА или НЕ):

а) Ако је m цео број такав да је m^2 дељив са 3, онда је и m дељив са 3.

б) Ако је n цео број такав да је n^2 дељив са 4, онда је и n дељив са 4.

в) Ако су a и b реални бројеви такви да је $a \leqslant b$, онда је и $a^2 \leqslant b^2$.

г) Ако су x и y позитивни реални бројеви такви да је $x \leqslant y$, онда је $\dfrac{1}{x} \geqslant \dfrac{1}{y}$.

д) Ако су u и v реални бројеви различити од нуле такви да је $u \leqslant v$, онда је $\dfrac{1}{u} \geqslant \dfrac{1}{v}$.

87. (6.) а) Одредити x тако да вредности израза $a(x) = 2x$ и $b(x) = 14 - \frac{3}{2}x$ буду дужине катета, а вредност израза $c(x) = \frac{5}{2}x - 2$ дужина хипотенузе неког правоуглог троугла.

б) У добијеном правоуглом троуглу одредити дужине полупречника описаног и уписаног круга.

88. (7.) Правоугли троугао ABC чија је хипотенуза $c = 25\,\mathrm{cm}$, а катета $a = 15\,\mathrm{cm}$ ротира око праве која садржи теме правог угла и паралелна је хипотенузи. Израчунати површину и запремину тако добијеног тела.

19. јуни 1993.

Тест се састоји од 12 задатка. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 5 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 15 поена. Погрешан одговор доноси −10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се −2 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

89. (1.) Вредност израза $\dfrac{(0{,}5)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+3\cdot 0{,}5\cdot(-0{,}25)}{13\frac{1}{3}+(1\frac{1}{3}):0{,}5}$ је:

A) $-\dfrac{3}{128}$; B) $\dfrac{1}{64}$; C) $\dfrac{1}{128}$; D) $\dfrac{1}{120}$; E) $\dfrac{3}{140}$.

90. (2.) Израз $\dfrac{(2a-1)^2}{6}-a^2-\dfrac{(2-a)(a+1)}{3}$ идентички је једнак изразу:

A) $-a-\dfrac{1}{2}$; B) $-6a-3$; C) $\dfrac{-5-4a}{6}$; D) $-\dfrac{1}{2}$; E) $\dfrac{-4a^2-6a+5}{a^2}$.

91. (3.) Који од следећих четвороуглова има тачно једну осу симетрије?

A) трапез; B) квадрат; C) правоугаоник; D) ромб; E) делтоид.

92. (4.) Дат је квадрат $ABCD$ површине P. Његова страница најпре је смањена за 20%, а затим је страница добијеног квадрата повећана за 20%. На овај начин добија се квадрат $A_1B_1C_1D_1$ површине P_1. Тада је:

A) $P_1 = P$; B) $P_1 = 0{,}96\,P$; C) $P_1 = 0{,}96^2P$; D) $P_1 = \dfrac{P}{0{,}96}$; E) $P_1 = \dfrac{P}{0{,}96^2}$.

93. (5.) Основица једнакокраког троугла има дужину $10\,\mathrm{cm}$, а крак $13\,\mathrm{cm}$. Полупречник описаног круга тог троугла има дужину:

A) $8\,\mathrm{cm}$; B) $\dfrac{29}{4}\,\mathrm{cm}$; C) $5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$; D) $\dfrac{169}{24}\,\mathrm{cm}$; E) $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}$.

94. (6.) Која од следећих једнакости важи за све реалне бројеве a?

A) $-a^2 = (-a)^2$; B) $-a^3 = (-a)^3$; C) $\sqrt{(-a)^4} = -a^2$; D) $\sqrt{a^2} = a$; E) $\sqrt{(-a)^2} = -a$.

95. (7.) Скуп решења неједначине $\dfrac{x-3}{2x-5} \leqslant 1$ је

A) $[2,+\infty)$; B) $(-\infty,2]$; C) $(-\infty,2]\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$; D) $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$; E) $\left[2,\dfrac{5}{2}\right)$.

96. (8.) Ако је површина троугла ABC једнака $12\,\mathrm{cm}^2$, онда је површина троугла $A_1B_1C_1$ који је сличан троуглу ABC и има два пута дуже висине једнака:

A) $24\,\mathrm{cm}^2$; B) $48\,\mathrm{cm}^2$; C) $18\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; D) $96\,\mathrm{cm}^2$; E) $24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

97. (9.) Ромб површине $15\,\mathrm{cm}^2$ ротира око једне своје странице. Површина тако добијеног тела је:

A) $60\pi\,\mathrm{cm}^2$; B) $30\pi\,\mathrm{cm}^2$; C) $(60+15\sqrt{3})\pi\,\mathrm{cm}^2$; D) $(60+\frac{15}{2}\sqrt{3})\pi\,\mathrm{cm}^2$; E) $90\pi\,\mathrm{cm}^2$.

98. (10.) Колико има троцифрених бројева дељивих са 11, чији је збир цифара једнак 10?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 6.

99. (11.) Основа пирамиде је квадрат. Једна бочна ивица нормална је на раван основе, а најдужа бочна ивица има дужину $8\,\mathrm{cm}$ и гради са равни основе угао од 45°. Тада је запремина пирамиде:

A) $\dfrac{288}{3}\,\mathrm{cm}^3$; B) $\dfrac{64\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$; C) $\dfrac{128\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3$; D) $\dfrac{64}{3}\,\mathrm{cm}^3$; E) $\dfrac{128}{3}\,\mathrm{cm}^3$.

100. (12.) Казаљке сата показују 9 сати, тј. мала (сатна) казаљка је на броју 9, а велика (минутна) је на броју 12. Казаљке ће се први пут поклопити после:

A) $49\dfrac{1}{11}$ минута; B) $49\dfrac{1}{13}$ минута; C) $48\dfrac{3}{4}$ минута; D) 48 минута; E) 49 минута.

Време за израду задатака је 90 минута.

18. јуни 1994.

Тест се састоји од 12 задатка. Време за рад је 90 минута. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 5 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 15 поена. Погрешан одговор доноси −10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се −2 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

101. (1.) Центар круга описаног око правоуглог троугла је:

A) тежиште троугла; B) пресек симетрала унутрашњих углова троугла; C) средиште хипотенузе троугла; D) пресек висина троугла; E) тачка која дели хипотенузу у односу 2 : 1.

102. (2.) Дате су једначине:

$$\text{(I)}\ \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = 0; \quad \text{(II)}\ |x| = 0; \quad \text{(III)}\ x-1 = 0; \quad \text{(IV)}\ \frac{(x-1)^2}{(x-1)} = 0.$$

Тачно је тврђење:

A) еквивалентне су само једначине (III) и (IV); B) еквивалентне су само једначине (I) и (II); C) еквивалентне су једначине (I) и (II), а такође (III) и (IV); D) еквивалентне су само једначине (I) и (III); E) нема еквивалентних једначина међу њима.

103. (3.) Вредност израза $\dfrac{2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cdot(2\frac{1}{5} - 3\frac{3}{4} : 3{,}75)}{\sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{8} : 0{,}125}} : \sqrt{0{,}0025}$ је:

A) $\dfrac{63}{2}$; B) 63; C) $\dfrac{181}{2}$; D) $\dfrac{181}{4}$; E) 315.

104. (4.) Вредност израза

$$\frac{5}{4}a^2 - 3(a-b)(a+b) + \frac{(a+b)^2}{2} - \frac{14b^2-5a^2}{4}$$

за $a = \dfrac{46}{15}$ и $b = \dfrac{15}{2}$ једнака је:

A) 23; B) 92; C) $\dfrac{1058}{45}$; D) 0; E) $276 + \dfrac{4232}{75}$.

105. (5.) Цена једне књиге је најпре повећана за 50%, а затим снижена за 50%. Цена друге књиге снижена је за 50%, а затим повећана за 50%. На крају је разлика њихових цена била 6 динара. Првобитна разлика цена је:

A) 8 динара; B) 7 динара; C) 6 динара; D) 5 динара; E) 4,5 динара.

106. (6.) У равни α су дате две различите тачке A и B. Колико у равни α постоји тачака C таквих да је троугао ABC једнакокраки и правоугли?

A) 0; B) 2; C) 4; D) 6; E) 8.

107. (7.) Нека су x, y, z цифре (x, y, $z \in \{0,1,2,\ldots,9\}$) такве да је број $\overline{x2y3z4}$ дељив са 72. Оваквих бројева има:

A) 34; B) 41; C) 33; D) 32; E) 26.

108. (8.) Правоугли трапез чије су основице $a = 20\,\mathrm{cm}$ и $b = 15\,\mathrm{cm}$ а краћи крак $c = 12\,\mathrm{cm}$ ротира око краће основице. Површина добијеног тела је:

A) $660\pi\,\mathrm{cm}^2$; B) $924\pi\,\mathrm{cm}^2$; C) $468\pi\,\mathrm{cm}^2$; D) $768\pi\,\mathrm{cm}^2$; E) $780\pi\,\mathrm{cm}^2$.

109. (9.) Да би ослободио заробљену Принцезу Царевић треба да прође кроз десет капија једног замка. На свакој капији одузимају му половину златника које поседује у том тренутку и један златник. После проласка кроз десету капију остао му је још један златник. Колико је Царевић имао златника пре проласка кроз прву капију?

A) мање од 1000; B) између 1000 и 2000; C) између 2000 и 3000; D) између 3000 и 4000; E) више од 4000.

110. (10.) Аутобус је возио из Београда за Панчево просечном брзином $30\,\mathrm{km/h}$, а затим се вратио назад. Којом просечном брзином се враћао ако је просечна брзина на читавом путу износила $35\,\mathrm{km/h}$?

A) $38\,\mathrm{km/h}$; B) $40\,\mathrm{km/h}$; C) $42\,\mathrm{km/h}$; D) $45\,\mathrm{km/h}$; E) $48\,\mathrm{km/h}$.

111. (11.) Скуп решења неједначине $\dfrac{x^2-1}{(x-1)(x-2)} < 2$ је:

A) $(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$; B) $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(5,+\infty)$; C) $(5,+\infty)$; D) $(-\infty,2)$; E) $(-\infty,1)\cup(1,2)$.

112. (12.) У дату праву купу полупречника основе r и висине $H = r\sqrt{2}$ уписана је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ тако да основа $ABCD$ припада основи, а темена A_1, B_1, C_1 и D_1 припадају омотачу купе. Однос запремина купе и коцке је:

A) $4\pi : 3$; B) $2\pi : 1$; C) $4\pi : 1$; D) $2\pi : 3$; E) $3\pi : 4$.

17. јуни 1995.

Тест се састоји од 12 задатка. Време за рад је 120 минута. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 6 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 14 поена. Погрешан одговор доноси -10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се -2 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

113. (1.) Нека су у произвољном троуглу ABC тачке H, T, O и S редом ортоцентар, тежиште, центар описаног круга и центар уписаног круга. Тачан је исказ:

A) Све тачке H, T, O и S припадају унутрашњости троугла; B) Ни једна од тачака H, T, O и S не припада унутрашњости троугла; C) Тачке T и S припадају унутрашњости троугла; D) Тачке H и O припадају унутрашњости троугла; E) Тачке H, T и S припадају унутрашњости троугла.

114. (2.) Нека су x и y цифре такве да је број $\overline{17x6y95}$ дељив бројем 45. Оваквих бројева има:

A) 11; B) 9; C) 7; D) 18; E) 22.

115. (3.) Нека су AA' и BB' висине троугла ABC и H ортоцентар тог троугла. Ако је $BH = 15\,\mathrm{cm}$, $HB' = 6\,\mathrm{cm}$ и $HA' = 9\,\mathrm{cm}$, тада је дужина AH једнака:

A) $10\,\mathrm{cm}$; B) $22{,}5\,\mathrm{cm}$; C) $3{,}6\,\mathrm{cm}$; D) $15\,\mathrm{cm}$; E) $12\,\mathrm{cm}$.

116. (4.) Дати су бројеви:

$$a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}, \quad b = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}, \quad c = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}.$$

Тада је:

A) $a < b < c$; B) $b < a < c$; C) $c < a < b$; D) $b < c < a$; E) $c < b < a$.

117. (5.) Вредност бројног израза $2^{3000} \cdot 3^{2000}$ је:

A) 6^{5000}; B) 72^{1000}; C) 72^{5000}; D) $6^{6000000}$; E) $5^{6000000}$.

118. (6.) Баш-Челик се бори против Змаја који има 1995 глава. Једним ударцем мача Баш-Челик одсеца Змају или 2, или 3, или 4 главе, али тада Змају израсту, редом, или 1, или 2, или 3 главе. Борба се одвија све док Баш-Челик Змају не одсече све главе, укључујући и оне које су израсле после претходних удараца. Најмањи број удараца мачем Баш-Челика је:

A) 499; B) 1994; C) 1993; D) 1992; E) 1991.

119. (7.) За колико процената се смањи време путовања на извесном путу ако се брзина повећа за једну четвртину?

A) 25%; B) 24%; C) 32%; D) 20%; E) 18%.

120. (8.) Резервоар може да се напуни водом за 8 сати када су отворене све три доводне цеви. Кроз другу цев утиче $\frac{2}{3}$, а кроз трећу $\frac{5}{6}$ оне количине воде која утиче кроз прву цев. Ако би се резервоар пунио само кроз прве две цеви, напунио би се за:

A) 15 сати; B) 12 сати; C) $11\frac{1}{3}$ сати; D) 14 сати; E) $11\frac{2}{3}$ сати.

121. (9.) У круг површине $\pi\,\mathrm{cm}^2$ уписан је правилни многоугао чији је унутрашњи угао $135°$. Површина тог многоугла је:

A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; B) $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; C) $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; D) $\frac{2}{3}\sqrt{8}\,\mathrm{cm}^2$; E) $4\,\mathrm{cm}^2$.

122. (10.) Колико целих бројева x задовољава неједначину

$$\frac{|x|}{x^2-x} > \frac{1}{3}\,?$$

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) више од 4.

123. (11.) Основа пирамиде је правоугли троугао са катетама $a = 35\,\mathrm{cm}$ и $b = 12\,\mathrm{cm}$. Свака бочна страна пирамиде нагнута је према равни основе под углом од $60°$. Тада је површина ове пирамиде:

A) $450\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; B) $1260\,\mathrm{cm}^2$; C) $630\,\mathrm{cm}^2$; D) $450\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; E) $945\,\mathrm{cm}^2$.

124. (12.) Нека је ABC троугао такав да је $\angle BCA = 30°$, $\angle ABC = 15°$ и $AC = 3\,\mathrm{cm}$ и нека је D тачка странице BC таква да је $\angle DAB = 90°$. Тада је дужина дужи BD:

A) $5\,\mathrm{cm}$; B) $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; C) $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$; D) $8\,\mathrm{cm}$; E) $6\,\mathrm{cm}$.

15. јуни 1996.

Тест се састоји од 12 задатка. Време за рад је 120 минута. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 6 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 14 поена. Погрешан одговор доноси -10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се -2 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

125. (1.) Вредност израза $\dfrac{\sqrt{4+\frac{9}{4}-\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{25}}}}}{2+\frac{3}{2}-\frac{1}{\frac{1}{5}}}$ је:

A) $\frac{23}{85}$; B) 1; C) $-\frac{5}{3}$; D) $\frac{5}{3}$; E) $-\frac{23}{85}$.

126. (2.) Дати су четвороуглови: квадрат, ромб, правоугаоник, једнакокраки трапез и делтоид. Колико од ових пет четвороуглова су централно симетрични (имају центар симетрије)?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

127. (3.) Нека је n природан и a реалан број, $a \neq 0$, $a \neq 1$. Тада је израз

$$\frac{a^{3n+2} - 2\cdot a^{3n+1} + a^{3n}}{a^{3n} - a^{3n-1}}$$

једнак изразу:

A) 0; B) $a^2 - a$; C) a^2; D) $\frac{1}{a}$; E) $\frac{1}{a^2}$.

128. (4.) Странице парцеле облика троугла на плану, који је рађен у размери $1:1000$, су $7\,\mathrm{cm}$, $24\,\mathrm{cm}$ и $25\,\mathrm{cm}$. Површина (у хектарима) парцеле у природној величини је:

A) $0{,}084\,\mathrm{ha}$; B) $8{,}4\,\mathrm{ha}$; C) $84\,\mathrm{ha}$; D) $0{,}84\,\mathrm{ha}$; E) $840\,\mathrm{ha}$.

129. (5.) Колико постоји целих бројева x таквих да важи $\dfrac{x^2-x}{x^2+2x} \leqslant \dfrac{2}{5}$?

A) мање од два; B) више од четири; C) два; D) три; E) четири.

130. (6.) Дата је коцка запремине V. Њена ивица најпре је смањена за 10%, а затим је ивица добијене коцке повећана за 10%. На овај начин добијена је коцка запремине V_1. Тада је:

A) $V_1 = 0{,}99^3V$; B) $V_1 = \dfrac{V}{0{,}99^3}$; C) $V_1 = V$; D) $V_1 = 0{,}99V$; E) $V_1 = 0{,}99^2V$.

131. (7.) Броју 517 са десне стране дописане су две цифре тако да је добијени петоцифрени број дељив са 6, 7 и 9. Збир дописаних цифара је:

A) 14; B) 12; C) 13; D) 11; E) 15.

132. (8.) Колико решења има једначина $x + |x| + |x-1| = 2$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

133. (9.) Нека је O центар уписаног круга правоуглог трапеза $ABCD$ (BC – дужи крак, AB и CD – основице). Ако је $OC = 5\,\mathrm{cm}$ и $OB = 12\,\mathrm{cm}$, полупречник круга уписаног у трапез је:

A) $\sqrt{60}\,\mathrm{cm}$; B) $\frac{17}{4}\,\mathrm{cm}$; C) $4{,}5\,\mathrm{cm}$; D) $\frac{60}{13}\,\mathrm{cm}$; E) $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

134. (10.) Две сељанке, Ката и Ната, донеле су на пијацу укупно 300 комада јаја. Једна од њих је имала више јаја од друге, али су обе од продаје зарадиле једнаке суме новца. У повратку Ката је рекла:

„Да си ми дала своја јаја, ја бих зарадила 45 динара више него што сам зарадила“.

На то је Ната одговорила:

„Да си ти мени дала своја јаја, ја бих зарадила 20 динара више него што сам зарадила“.

Број јаја које су Ката и Ната имале је:

A) 138 и 162; B) 120 и 180; C) 132 и 168; D) 126 и 174; E) 135 и 165.

135. (11.) У полулопту уписана је коцка тако да доња основа коцке припада основи полулопте, а темена горње основе коцке припадају површи полулопте. Однос запремина полулопте и коцке је:

A) $5\pi : 3$; B) $\pi\sqrt{6} : 1$; C) $5\pi : 6$; D) $\pi\sqrt{5} : 2$; E) $\pi\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

136. (12.) Теме A угла α је изван датог круга. Краци овог угла одређују на кругу два лука који су унутар угла и у размери су $3 : 10$. Већи од тих лукова одговара централном углу од 40°. Колико степени има угао α?

A) 20°; B) 15°; C) 14°; D) 13°; E) 12°.

На тесту су најбоље урађени били седми задатак (82,1% тачних одговора), први (75,2%) и шести (74,6%), а најслабије — дванаести (14,9%) и десети (23,9%).

14. јуни 1997.

Тест се састоји од 12 задатка. Време за рад је 120 минута. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 6 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 14 поена. Погрешан одговор доноси −10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се −1 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

137. (1.) Вредност израза $\left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}+2\right) : \left(\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2\right)$ за $a = 14$ и $b = 6$ је:

A) $\dfrac{4}{25}$; B) 6,25; C) 1; D) $\dfrac{8}{3}$; E) $\left(\dfrac{7}{3}\right)^2$.

138. (2.) У равни α су дате три неколинеарне тачке. Колико постоји тачака M у равни α таквих да три дате тачке и тачка M буду темена паралелограма?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

139. (3.) Дати су искази: За сваки реални број a и све природне бројеве m и n важи:

(I) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
(II) $a^m \cdot a^n = a^{m \cdot n}$;
(III) $(a^m)^r = a^{m \cdot n}$;
(IV) $(a^m)^n = a^{m^n}$.

Тачни су искази:

A) сви; B) ниједан; C) само (I) и (III); D) само (II) и (IV); E) само (IV).

140. (4.) Нека је $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ правилна једнакоивична шестострана призма ивице a. Површина четвороугла ABD_1E_1 је:

A) $2a^2$; B) $3a^2$; C) $a^2\sqrt{3}$; D) a^2; E) $2a^2\sqrt{2}$.

141. (5.) Површина четвороугла ограниченог графицима функција $y = -2x+2$ и $y = -\frac{3}{4}x + 3$ и координатним осама (у првом квадранту) једнака је:

A) $\dfrac{15}{2}$; B) 6; C) 5; D) 4; E) $\dfrac{7}{2}$.

142. (6.) Дужине катета правоуглог троугла су 30 cm и 40 cm. Површина круга уписаног у тај троугао је:

A) $81\pi\,\mathrm{cm}^2$; B) $\dfrac{289}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$; C) $100\pi\,\mathrm{cm}^2$; D) $\dfrac{441}{4}\pi\,\mathrm{cm}^2$; E) $121\pi\,\mathrm{cm}^2$.

143. (7.) Унутрашњи угао правилног m-тоугла односи се према унутрашњем углу правилног n-тоугла као $5 : 4$. Парова (m, n) за које ово важи има:

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) 7.

144. (8.) За нумерисање страница једне књиге употребљено је 1998 цифара. Ако је n број страница ове књиге, тада је:

A) $n < 698$; B) $698 \leqslant n < 700$; C) $700 \leqslant n < 702$; D) $702 \leqslant n < 704$; E) $n \geqslant 704$.

145. (9.) У троуглу ABC ($BC > CA$) разлика углова $\angle CAB$ и $\angle ABC$ је 30°. Ако је D тачка странице BC таква да је $CD = CA$, угао BAD једнак је:

A) $22^\circ 30'$; B) 18°; C) 17°; D) 16°; E) 15°.

146. (10.) Колико постоји целих бројева x таквих да важи:

$$\frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{(x-2)(x-3)} \geqslant 1\,?$$

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

147. (11.) Мајмуни деле кокосове орахе. Први мајмун је узео три ораха и десети део остатка; други мајмун – шест ораха и десети део преосталих ораха; трећи мајмун – девет ораха и десети део преосталих ораха итд …, све док сви ораси нису били подељени. Испоставило се да су сви мајмуни добили исти број ораха. Број мајмуна је:

A) мањи од 5; B) 5; C) већи до 5 али мањи од 9; D) 9; E) већи од 9.

148. (12.) Основа пирамиде је паралелограм чије су странице 10 cm и 18 cm а површина (основе) је $90\,\mathrm{cm}^2$. Висина пирамиде је 6 cm, а њено подножје је пресек дијагонала основе. Површина омотача пирамиде је:

A) $192\,\mathrm{cm}^2$; B) $2(9\sqrt{61} + 5\sqrt{117})\,\mathrm{cm}^2$; C) $18\sqrt{61}\,\mathrm{cm}^2$; D) $196\,\mathrm{cm}^2$; E) $224\,\mathrm{cm}^2$.

На тесту су најбоље урађени трећи задатак (98,2% тачних одговора), први (89,4%) и шести задатак (79,8%), а најславије урађени су — седми (23,5%), дванаести (26,3%) и једанаести (36,9%).

13. јуни 1998.

Тест се састоји од 12 задатка. Време за рад је 120 минута. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 6 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 14 поена. Погрешан одговор доноси −10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се −2 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

149. (1.) Ако је

$$x = \frac{\left(17\frac{1}{2} - 8\frac{1}{4} : \frac{11}{10}\right) \cdot \left(11\frac{2}{3} : 2\frac{2}{9} + 3\frac{1}{2}\right)}{\left(1\frac{29}{40} : 2\frac{3}{10} - \frac{3}{7}\right) \cdot \left(14\frac{2}{3} - 51\frac{1}{5} : 4\right)},$$

тада x припада скупу

A) $(-\infty, -100)$; B) $[-100, 0)$; C) $[0, 100)$; D) $[100, 200)$; E) $[200, +\infty)$.

150. (2.) Колико најмање куглица треба извадити (без гледања) из кутије у којој се налази 7 црвених и 5 плавих куглица да бисмо били сигурни да ће међу њима бити бар две црвене и бар три плаве?

A) 7; B) 10; C) 5; D) 12; E) 9.

151. (3.) Нека је $ABCD$ квадрат странице 6 cm. Тачка E припада страници AB, а тачка F страници BC квадрата. Ако је $AE = 4\,\text{cm}$ и $BF = 2\,\text{cm}$, тада је површина троугла EFD једнака:

A) $8\,\text{cm}^2$; B) $18\,\text{cm}^2$; C) $12\,\text{cm}^2$; D) $10\,\text{cm}^2$; E) $\frac{21}{2}\,\text{cm}^2$.

152. (4.) Цена неке робе у једној продавници повећана је за 60%. За колико процената треба снизити ту нову цену да би се вратила на првобитни ниво?

A) 37,5%; B) 40%; C) 50%; D) 60%; E) 52,5%.

153. (5.) Природни бројеви, почевши од 1, редом су написани један за другим без раздвајања. Која је цифра на 1998. месту?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) једна од цифара 4, 5, 6, 7, 8 или 9.

154. (6.) Квадрат $ABCD$ странице a ротира око странице BC. На тај начин добија се тело запремине V_1. Када исти квадрат ротира око дијагонале AC добија се тело запремине V_2. Однос $V_2 : V_1$ је:

A) $\sqrt{2} : 6$; B) $\sqrt{2} : 5$; C) $1 : \sqrt{2}$; D) $1 : 2$; E) $\sqrt{2} : 3$.

155. (7.) Растојање координатног почетка O правоуглог координатног система Oxy од праве p задате једначином $4x + 3y = 12$ је:

A) 2,4; B) 2,5; C) 3,5; D) 3,6; E) 4.

156. (8.) Милан са сином и Зоран са сином су били у риболову. Милан је уловио три пута више риба него његов син, а Зоран је уловио пет пута више риба него његов син. Сви заједно су уловили 63 рибе. Ако је број риба који је уловио најмлађи члан ове риболовачке дружине једнак n, онда је:

A) $0 \leqslant n < 3$; B) $3 \leqslant n < 5$; C) $5 \leqslant n < 7$; D) $7 \leqslant n < 9$; E) $9 \leqslant n < 63$.

157. (9.) Нека је D средиште хипотенузе AB правоуглог троугла ABC (код кога је $CA > CB$) и нека су E и F пресечне тачке правих BC и CA са нормалом на хипотенузу AB у тачки D. Ако је $DE = 12\,\text{cm}$ и $DF = 3\,\text{cm}$, тада је дужина хипотенузе AB:

A) $8\sqrt{3}\,\text{cm}$; B) $9\,\text{cm}$; C) $27\,\text{cm}$; D) $15\,\text{cm}$; E) $12\,\text{cm}$.

158. (10.) Целих бројева x за које важи неједнакост $\frac{1}{|13 - x|} > \frac{1}{6}$ има:

A) мање од 9; B) 9; C) 10; D) 11; E) више од 11.

159. (11.) Целобројних вредности параметра k за које је решење једначине $k(x - k) = x + 7$ природан број има:

A) 2; B) 4; C) 6; D) 8; E) више од 8.

160. (12.) Основа пирамиде је квадрат странице $2\sqrt{3}\,\text{cm}$, а висина пирамиде је 3 cm и она садржи средиште једне од ивица основе. Полупречник сфере описане око ове пирамиде је:

A) 3 cm; B) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$; C) $\sqrt{7}\,\text{cm}$; D) $3\sqrt{2}\,\text{cm}$; E) $\frac{3}{2}\sqrt{5}\,\text{cm}$.

Најбоље урађени задаци на тесту су: трећи (94,5% тачних одговора), четврти (87,1%) и седми (75,1%), а најслабије — дванаести (20,4%), пети (33,8%) и девети (34,3%).

12. јуни 1999.

Тест се састоји од 12 задатка. Време за рад је 120 минута. У сваком задатку понуђено је пет одговора (A, B, C, D, E) од којих је само један тачан. У случају да кандидат не уме да реши задатак треба да заокружи слово N. Задаци 1–3 вреде по 6 поена, задаци 4–6 вреде по 8 поена, задаци 7–9 вреде по 12 поена, а задаци 10–12 вреде по 14 поена. Погрешан одговор доноси −10% од броја поена за тачан одговор. У случају заокруживања више од једног, или незаокруживања ниједног одговора добија се −1 поена. Заокруживање одговора N доноси 0 поена.

161. (1.) Која од следећих једнакости:
(I) $-a^2 = (-a)^2$; (II) $-a^3 = (-a)^3$; (III) $-a^2 = (-a)^3$; (IV) $(-a)^2 = -a^3$; (V) $|-a|^2 = |(-a)^2|$
важи за све реалне бројеве a?

A) све; B) ниједна; C) само (II); D) само (I), (II) и (V); E) само (II) и (V).

162. (2.) Решење једначине $\left(1{,}7 : \left(1\frac{2}{3} \cdot x - 3{,}75\right)\right) : \frac{8}{25} = 1\frac{5}{12}$ припада интервалу:

A) $(-\infty, -5]$; B) $(-5, 0]$; C) $(0, 5]$; D) $(5, 10]$; E) $(10, +\infty)$.

163. (3.) Квадар чије ивице су дужина 4 cm, 6 cm и 9 cm састављен је од коцкица ивице 1 cm. Колико је таквих коцкица уклоњено са квадра скидањем целог спољашњег слоја дебљине једне коцкице?

A) 132; B) 196; C) 96; D) 160; E) 82.

164. (4.) Број решења једначине $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 2$ је:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

165. (5.) Правилни многоугао има укупно 170 дијагонала. Његов унутрашњи угао има:

A) 156°; B) 160°; C) 162°; D) 168°; E) 170°.

166. (6.) Од три ученика осмог разреда, два ученика седмог разреда и једног ученика шестог разреда треба изабрати неколико ученика, али тако да буде изабран бар по један ученик сваког разреда. То је могуће учинити на:

A) 3 начина; B) 10 начина; C) 12 начина; D) 18 начина; E) више од 18 начина.

167. (7.) На страницама KL и LM троугла KLM дате су, редом, тачке A и B тако да је $KA : AL = 1 : 1$ и $LB : BM = 8 : 1$. Однос површина троуглова ALB и KLM је:

A) $4:9$; B) $3:8$; C) $5:9$; D) $\sqrt{3}:4$; E) $3:7$.

168. (8.) У троугао ABC код кога је страница $BC = 12\,\text{cm}$ и одговарајућа висина $AD = 9\,\text{cm}$ уписан је полукруг тако да је пречник полукруга EF паралелан страници BC ($E \in AB$, $F \in AC$) и тај полукруг додирује страницу BC. Дужина полупречника полукруга је:

A) 3 cm; B) 3,6 cm; C) 4 cm; D) 4,2 cm; E) 5,4 cm.

169. (9.) Познато је да је вредност дијаманта пропорционална квадрату његове масе. Приликом брушења неког дијаманта маса му је смањена тако да му је вредност смањена за 25%. Ако је маса дијаманта смањена за p процената, тада је:

A) $p \leqslant 5$; B) $5 < p \leqslant 13$; C) $13 < p \leqslant 20$; D) $20 < p \leqslant 30$; E) $p > 30$.

170. (10.) У правилној тространој пирамиди површина бочне стране је $75\,\text{cm}^2$, а одстојање центра основе пирамиде од равни бочне стране је 8 cm. Запремина пирамиде је:

A) $600\,\text{cm}^3$; B) $300\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; C) $625\,\text{cm}^3$; D) $575\,\text{cm}^3$; E) $1800\,\text{cm}^3$.

171. (11.) Брод путује низводно од Новог Сада до Београда 5 сати, а узводно од Београда до Новог Сада 7 сати. Колико путују сплавови од Новог Сада до Београда?

A) 20 сати; B) 25 сати; C) 30 сати; D) 35 сати; E) 40 сати.

172. (12.) Цифре x и y су различите и такве да је $\overline{xx} \cdot \overline{yx} \cdot \overline{xyx} = \overline{xyxxyx}$. Разлика $y - x$ је једнака:

A) -1; B) 8; C) -3; D) 7; E) 5.

Најбоље урађени задаци на тесту су први (86,6% тачних одговора), други (80,8%) и четврти (79,1%), а најслабије урађени су — девети (34,3%), десети (39,5%) и осми (44,8%).

ПРИПРЕМНИ ЗАДАЦИ

1. Трансформације алгебарских израза

173. Израчунати:

а) $\dfrac{1-\frac{2}{5}\cdot 1\frac{1}{4}+3:1\frac{1}{5}}{\left(\frac{13}{5}-2\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdot 1\frac{3}{7}}-\dfrac{1+\frac{4}{2-\frac{3}{5}}}{7-\frac{2}{1-\frac{2}{3}}}$;

б) $\dfrac{\left(2\frac{4}{15}+6\frac{2}{3}-3\frac{7}{10}\right):6\frac{13}{24}}{\left(3\frac{1}{2}+5\frac{5}{6}-4\frac{3}{4}\right):3\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{10}}$;

в) $\dfrac{\left(9\frac{1}{4}-7\frac{2}{5}\right):7\frac{2}{5}+3\frac{1}{2}}{\left(3\frac{1}{8}+2\frac{13}{20}-5\frac{1}{5}\right):4\frac{3}{5}}+\dfrac{12\cdot 3\frac{1}{12}}{6+1\frac{2}{5}}$.

174. Одредити x ако је:

а) $\dfrac{x}{10{,}5\cdot 0{,}24-15{,}15:7{,}5}=\dfrac{9\left(1\frac{11}{20}-0{,}945:0{,}9\right)}{1\frac{3}{40}-4\frac{3}{8}:7}$;

б) $\dfrac{15{,}2\cdot 0{,}25-48{,}51:14{,}7}{x}=\dfrac{\left(\frac{13}{44}-\frac{2}{11}-\frac{5}{66}:2\frac{1}{2}\right)\cdot 1\frac{1}{5}}{3{,}2+0{,}8\left(5\frac{1}{2}-3{,}25\right)}$.

175. Упростити изразе:

а) $1-\dfrac{a-3}{5}+\dfrac{2a-1}{2}-\dfrac{3a-4}{10}$;

б) $\dfrac{5b-\frac{3}{2}}{7}-\dfrac{4b-2}{2}+2b+\dfrac{3-10b}{14}$.

176. Ако је $\dfrac{3}{a}=\dfrac{4}{b}=\dfrac{12}{c}=13$, израчунати вредност израза:

а) $(3-a)a+(4-b)b+(12-c)c$; б) $(3+a)a+(4+b)b+(12+c)c$.

177. Одредити два узастопна природна броја који су дати изразима $x=2(n-3)(n+1)$, $y=(n-2)(2n-1)$.

178. Наћи све реалне бројеве x и y за које важи:

а) $5x^2+5y^2+8xy+2y-2x+2=0$; б) $x^2-6x+y-4\sqrt{y}+13=0$;
в) $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

179. Ако је $x^2+\dfrac{1}{x^2}=23$, колико је $x+\dfrac{1}{x}$?

180. Нека су a, b, c дужине страница неког троугла. Доказати да је вредност израза $(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$ негативна.

181. Наћи вредност израза:

а) $5\sqrt{2}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}-\sqrt{98}$; б) $3\sqrt{27}-2\sqrt{48}+\sqrt{75}+6\sqrt{12}$.

182. Израчунати вредност израза:

а) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; б) $(\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}})^2$.

183. Израчунати вредност збира

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}.$$

184. Упростити изразе:

а) $\dfrac{3^{3n+3}\cdot 3^{n-1}}{3^{4n-1}}$ $(n\in\mathrm{N})$; б) $\left(\dfrac{(2a^3)^2}{2a^4b^3}\right)^3$ $(a\neq 0,\ b\neq 0)$;

в) $\sqrt{\dfrac{x^4\cdot(x^4)^3}{x^8}}$ $(x>0)$; г) $\dfrac{(-1)^3}{3}-\dfrac{(-1)^4}{4}-\dfrac{(-1)^3}{4}$;

д) $5a^4\cdot 3a^2-(3a^3)^2$; ђ) $2a^7\cdot 5a-(2a^4)^2-3a^6\cdot 2a^2$.

185. Упростити изразе ($a\neq 0$, $x,y\in\mathrm{N}$):

а) $\dfrac{a^{2x}\cdot a^y\cdot a^{x+5y}}{a\cdot a^{x+y}\cdot a^{2x+4y}}$; б) $\dfrac{a^{2x+y}+a^{x+2y}+a^{x+y+2}}{a^{2x-y}+a^x+a^{x-y+2}}$.

186. а) Доказати да је број $A=3^{n+2}\cdot 2^{2n+3}+3^{n+3}\cdot 4^{n+2}$ дељив са 7 за све $n\in\mathrm{N}$.

б) Доказати да је број $B=5^{2n}\cdot 7^{2n+1}\cdot 11^{2n}+25^n\cdot 7^{2n}\cdot 11^{2n+1}-5^{2n+1}\cdot 49^n\cdot 121^n$ дељив са 13 за све $n\in\mathrm{N}$.

2. Линеарне једначине и примене

Решити једначине (задаци 187–192):

187. а) $x+(x-1)+(x-2)+\cdots+(-1999)=2000$;

б) $(-1999)+(-1998)+(-1997)+\cdots+x=-5994$.

188. а) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)(x-5)}{x+1}=0$; б) $\dfrac{(x+1)^2(x-2)^2}{x-2}=0$;

в) $\dfrac{(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)}{x+|x|}=0$.

189. а) $$\frac{x-994}{6}+\frac{x-995}{5}+\frac{x-996}{4}+\frac{x-997}{3}+\frac{x-998}{2}=$$
$$=\frac{x-6}{994}+\frac{x-5}{995}+\frac{x-4}{996}+\frac{x-3}{997}+\frac{x-2}{998};$$

б) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}$.

190. а) $|2x-7|+x=5$; б) $|3x-1|+2x=4$.

191. а) $|x+4|+\sqrt{x^2-4x+4}=14$;

б) $\sqrt{1-2x+x^2}-|2x-3|-4x+5=-3$;

в) $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}=6$;

г) $\big||x|-1\big|+\big||x|+2\big|=3$.

192. $\left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1-x}{x}\right|+\left|\frac{2-x}{x}\right|=\frac{4}{3}$.

193. Цифра јединица једног двоцифреног броја је 4. Ако се тај број смањи за 9, добија се број написан истим цифрама у обрнутом поретку. Који је то број?

194. Жена пере судове два пута брже од свога мужа. Ако су заједно опрали судове за 4 h, колико је свакоме од њих потребно за тај посао?

195. После снижења цена за 20%, за 4000 динара може се купити један производ више него што се могао купити за 4500 динара. Колика је била цена тог производа пре снижења?

196. Читајући сваког дана (осим последњег) исти број страница, Петар је прочитао књигу од 312 страница. Да је читао дневно по 7 страница више, књигу би прочитао тачно 14 дана раније него у случају да је сваког дана читао по 7 страница мање. Колико је страница Петар читао сваког дана (осим последњег)?

197. Раставити број 60 на два сабирка тако да већи сабирак подељен мањим даје количник 2 и остатак 3.

198. У извесну количину 80%-ног алкохола додато је 15 l воде и добијен је 60%-ни алкохол. Колика је била првобитна количина раствора?

199. Одредити колико литара воде температуре 12° треба помешати са 5 l воде температуре 70° да би се добила мешавина температуре 37°.

200. Бициклиста прелази растојање између два града за 10 сати. Ако би возио 10 km/h брже, пут би прешао за два сата мање. Колика је удаљеност између ова два града?

201. Да би донела један орах у гнездо веверици је потребно 24 минута (рачунајући од момента изласка из гнезда до момента повратка у гнездо). Колико је удаљено стабло ораха од гнезда ако веверица без ораха прелази 5 m/s, а са орахом 3 m/s?

202. Један пешак путује из места A у место B 55 часова, а други из места B у место A 66 часова. Ако оба крену истовремено, један другом у сусрет, после колико часова ће се срести?

203. Старији брат пешачи од куће до школе 15 минута, а млађи 20 минута. После колико минута ће старији брат стићи млађег, ако је млађи пошао 2,5 минута раније?

204. Воз је ушао у тунел за 12 секунди. Док је последњи вагон изашао из тунела, прошло је још пола минута. Колика је дужина воза и којом се брзином он кретао ако је дужина тунела 300 m?

205. Брод је пловећи низ реку ишао брзином 15 km/h. На истој релацији је пловећи узводно ишао брзином 10 km/h. Која је средња брзина брода?

206. Прву половину извесног пута аутомобил прелази просечном брзином од 80 km/h, а следећу четвртину брзином од 60 km/h. Којом брзином треба да пређе остатак пута да би просечна брзина на целом путу била 80 km/h?

207. Растојање између градова A и B воз је прешао за 23 сата. Половину пута прешао је брзином од 80 km/h, трећину пута брзином 60 km/h и преостали део пута брзином од 40 km/h. Колико је растојање између A и B?

208. Једна група радника заврши неки посао за 10, а друга за 15 дана. На послу је ангажована трећина прве групе и један део друге групе, толики да се посао може завршити за 12 дана. Колики је то део друге групе?

209. Базен се једном славином пуни за 6 сати, а другом за 8 сати. Пун базен сè једном одводном цеви празни за 4 сата. Ако се истовремено отворе обе славине и одводна цев, који део базена ће се напунити за два сата?

3. Планиметрија — први део (подударност, Питагорина теорема)

210. У оштроуглом троуглу ABC ($BC > AC$) дата је висина CE. Симетрала спољашњег угла троугла код темена C сече праву AB у тачки D тако да је $CD = 2CE$. Израчунати разлику $\angle A - \angle B$.

211. У једнакокраком троуглу симетрала угла на основици и висина конструисана из истог темена граде угао од 30°. Израчунати углове тог троугла.

212. Израчунати угао који гради симетрала угла BAC троугла ABC са симетралом спољашњег угла код темена C, ако је $\angle ABC = 30°$.

213. У правоуглом троуглу ABC на хипотенузи AB дате су тачке M и N тако да је $AM = AC$ и $BN = BC$. Израчунати угао MCN.

214. Нека је S центар круга уписаног у правоугли троугао ABC са правим углом код темена A. Израчунати углове троугла ако је разлика углова ASB и ASC једнака 20°.

215. На датом кругу уочене су три тачке које деле кружну линију на три дисјунктна лука у односу $3:4:5$. У уоченим тачкама конструисане су тангенте на круг. Колики су углови тако добијеног троугла?

216. Нека је H ортоцентар троугла ABC. Ако је $AB = CH$, наћи угао ACB.

217. Нека је D произвољна тачка хипотенузе AB правоуглог троугла ABC. Права одређена висинама троугла из темена C и права која садржи тачку D и паралелна је катети AC секу се у тачки E. Доказати да је $CD \perp BE$.

218. Симетрала оштрог угла код темена A паралелограма $ABCD$ сече продужетак странице BC у тачки E, при чему је $CE = 3\,\mathrm{cm}$. Израчунати дужине страница паралелограма ако му је обим $50\,\mathrm{cm}$.

219. Код једног правилног n-тоугла разлика између унутрашњег и спољашњег угла је $120°$. Наћи n.

220. Ако се број страница правилног многоугла повећа за два, његов унутрашњи угао се повећа за $9°$. Колики је број страница многоугла?

221. Тетива PQ датог круга једнака је његовом полупречнику. Израчунати угао који граде тангенте на дати круг у тачкама P и Q.

222. Око једнакостраничног троугла странице $12\,\mathrm{cm}$ описан је круг k. Наћи дужину полупречника круга који додирује две странице тог троугла и круг k унутрашњим додиром.

223. Израчунати катете правоуглог троугла чији је један унутрашњи угао $22°30'$, а хипотенуза $2\,\mathrm{cm}$.

224. Дужине страница троугла су три узастопна природна броја већа од 3. За колико се разликују дужине одсечака на које висина дели средњу по величини страницу?

225. У квадрату $ABCD$ тачка M је средиште странице AB, а N тачка странице AD таква да важи $AN = 2ND$. Одредити обим и површину квадрата $ABCD$ ако је $MN = 1\,\mathrm{cm}$.

226. Странице паралелограма су a и b, а оштар угао $60°$. Одредити дужине дијагонала.

227. У унутрашњости угла од $60°$ дата је тачка A. Ако је растојање тачке A од кракова угла $4\,\mathrm{cm}$, односно $6\,\mathrm{cm}$, наћи растојање тачке A од темена угла.

4. Планиметрија — други део (површина фигура у равни)

228. Једна катета правоуглог троугла је дужине $15\,\mathrm{cm}$, а полупречник круга уписаног у тај троугао је $3\,\mathrm{cm}$. Наћи површину троугла.

229. Над страницама правоуглог једнакокраког троугла, ван троугла, конструисани су квадрати. Колика је површина троугла чија су темена средишта тих квадрата, ако је катета датог троугла дужине a?

230. а) Странице троугла ABC су продужене тако да је $AB = BX$, $BC = CZ$ и $CA = AY$. Ако је површина троугла XYZ $1176\,\mathrm{cm}^2$, одредити површину троугла ABC.

б) Нека је $ABCD$ конвексни четвороугао. Тачке M, N, P и Q су такве да су тачке B, C, D и A редом средишта дужи AM, BN, CP и DQ. Израчунати површину четвороугла $MNPQ$ ако је површина четвороугла $ABCD$ $1\,\mathrm{cm}^2$.

231. Нека су h_a, h_b, h_c дужине висина, r – полупречник уписаног круга, s – полуобим и P – површина произвољног троугла. Доказати:

а) $P = r \cdot s$ б) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$.

232. Тежиште T троугла ABC припада кругу конструисаном над страницом $AB = 12\,\mathrm{cm}$ као пречником. Израчунати површину торугла ABC ако је $\angle TAB = 30°$.

233. а) Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O. Доказати да је производ површина троуглова OAB и OCD једнак производу површина троуглова OBC и ODA.

б) Ако свака дијагонала четвороугла $ABCD$ полови његову површину, доказати да је $ABCD$ паралелограм.

234. Троугао је својим тежишним дужима подељен на шест дисјунктних троуглова једнаких површина. Доказати.

235. У круг полупречника $5\,\mathrm{cm}$ уписан је правоугаоник обима $28\,\mathrm{cm}$. Колика је површина тог правоугаоника?

236. Висине паралелограма односе се као $2:3$, његов обим је $40\,\mathrm{cm}$, а оштар угао $30°$. Израчунати површину паралелограма.

237. Израчунати површину паралелограма чије су висине $h_1 = 3\,\mathrm{cm}$ и $h_2 = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и угао између њих $60°$.

238. Странице паралелограма су $a = 5\,\mathrm{cm}$ и $b = 2\,\mathrm{cm}$. У ком односу је површина подељена симетралом једног унутрашњег угла паралелограма?

239. Одредити површину једнакокраког трапеза, дужину дијагонале и угао између дијагонале и основице тог трапеза, ако су основице трапеза $a = 26\,\mathrm{cm}$ и $b = 4\,\mathrm{cm}$, а крак $c = 14\,\mathrm{cm}$.

240. Угао на дужој основици AB једнакокраког трапеза је $75°$, а та основица је два пута дужа од основице CD. Дужина крака је $10\,\mathrm{cm}$. Колика је површина овог трапеза?

241. У трапезу $ABCD$ угао код темена B је $60°$, а дијагонала AC је нормална на страницу BC и полови угао код темена A. Ако је обим трапеза $20\,\mathrm{cm}$, израчунати његову површину.

242. Израчунати површину једнакокраког трапеза $ABCD$ чија дијагонала $d = 2\,\text{cm}$ образује са основицом угао од $45°$.

243. Нека је E средиште крака AD трапеза $ABCD$ ($AB \parallel CD$) површине P. Изразити, преко P, површину троугла EBC.

244. а) Висина једнакокраког трапеза чије су дијагонале узајамно нормалне је дужине h. Одредити површину трапеза.

б) Висина једнакокраког трапеза је h, а површина h^2. Под којим углом се секу дијагонале трапеза?

245. Краћа основица правоуглог трапеза у који је уписан круг полупречника r, једнака је $\frac{3}{2}r$. Наћи дужине свих страница овог ~~троугла~~. трапеза.

246. У једнакокраки трапез површине $20\,\text{cm}^2$ уписан је круг полупречника $r = 2\,\text{cm}$. Израчунати дужине страница трапеза.

247. Ако су M, N, P и Q средишта страница конвексног четвороугла $ABCD$, наћи однос површина четвороуглова $ABCD$ и $MNPQ$.

248. Над страницама квадрата странице $a = 10\,\text{cm}$ са спољашње стране су конструисани једнакостранични троуглови. Одредити обим и површину четвороугла чија су темена она темена једнакостраничних троуглова која не припадају квадрату.

249. Над страницама једнакостраничног троугла странице $a = 10\,\text{cm}$ са спољашње стране конструисани су квадрати. Она темена квадрата која не припадају троуглу међусобно су спојена. Израчунати обим и површину добијеног шестоугла.

250. Странице троугла су $a = 5\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$, $c = 7\,\text{cm}$. Круг додирује странице a и b, а центар му је на страници c. Израчунати површину круга.

251. Дати су лукови $l_1 = 6\,\text{cm}$, $l_2 = 4\,\text{cm}$ и ширина $d = 3\,\text{cm}$ исечка кружног прстена. Израчунати његову површину.

5. Размере, пропорције, проценти

252. Од датих пропорција образовати продужену пропорцију:

а) $a : b = 3 : 4$, $b : c = 6 : 5$, $c : d = 2 : 3$;

б) $a : b = 2 : 3$, $b : c = 6 : 7$, $c : d = 3 : 11$;

в) $a : b = 3 : 4$, $c : b = 5 : 6$, $d : a = 7 : 6$;

г) $a : b = 1\frac{1}{3} : 5\frac{1}{2}$, $b : c = 2\frac{1}{5} : 3\frac{1}{2}$, $c : d = 7\frac{1}{2} : 4\frac{1}{4}$.

253. За превоз 800 kg јабука, 1200 kg грожђа и 750 kg крушака плаћено је 1100 динара. Ако се превоз плаћа сразмерно маси, колики део трошкова сноси свака врста воћа?

254. Своту од 81 000 динара поделити у размери $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} : 2$.

255. а) Од 10 kg предива изатка се 18 m штофа. Колико ће се метара таквог штофа добити од 35 kg предива?

б) Шест продаваца заврши инвентарисање у продавници за четири дана. За колико дана би осам продаваца завршило тај посао?

256. Од 15 kg бакра излије се 10 m жице пречника 1,2 cm. Колико се метара жице пречника 1,5 cm добија од 50 kg бакра?

257. Дванаест радника радећи дневно по 8 h за 25 дана прераде 25 t меса. Колико радника треба да за 18 дана радећи дневно по 10 h преради 30 t меса?

258. 40 радника заврши неки посао за 20 дана радећи дневно по 6 h и прими укупно 19 200 динара. Колико дана треба да ради 50 радника ако раде по 8 h дневно па да приме укупно 16 000 динара?

259. Петнаест радника заврше један посао за 24 часа. После 10 часова рада посао напусте три радника. Колико још часова треба да раде преостали радници да би завршили остатак посла?

260. Четири једнака трактора могу да поору неко земљиште за 36 часова. После 12 часова рада један трактор се покварио. За колико часова ће бити пооран остатак земљишта?

261. Посао започну 24 радника и треба да га заврше за 24 дана радећи 6 h дневно. После 5 дана рада наређено је да посао треба да се заврши за 10 наредних дана и зато се радно време повећа на 8 h дневно. Колико радника још треба узети да би посао био завршен на време?

262. У току вожње, у 12 h, возач је имао гуми-дефект на свом аутомобилу. После задржавања од 15 минута, пут је наставио брзином за 20% већом од планиране. Када је надокнадио губитак времена?

263. На једном градилишту број радника је повећан за трећину. За колико процената од предвиђеног времена ће се посао раније завршити?

264. Један број је умањен за 80%. Колики проценат умањеника, а колики умањиоца представља разлика?

265. Дељеник је повећан за 20%, а делилац је смањен за 20%. За колико процената се повећао количник?

266. Прелазећи у лед, вода повећава своју запремину за $9\frac{1}{11}\%$. За колико процената се смањи запремина неког комада леда када се он истопи?

267. После снижења цене за 20%, за износ од 120 динара се може купити један метар платна више него што се пре снижења могло купити за 135 динара. Колика је била цена тог платна пре снижења?

268. Колико воде треба додати у 200 g 20%-ног раствора соли да би се добио 5%-ни раствор?

269. Због упијања влаге маса извесне количине памука се повећа за 3,5%. Колико је воде памук упио ако је маса влажног памука 124,2 kg?

270. Влажност свеже, тек покошене траве је 60%. а сена 20%. Колико ће се добити сена од једне тоне свеже траве?

6. Дељивост у скупу целих бројева

271. а) Доказати да је број $n^3 + 2n$ дељив са три за све природне бројеве n.
б) Доказати да ни за један природан број n број $n^2 + 1$ није дељив са три.
в) Доказати да не постоје природни бројеви n и m такви да важи $n^2 - 3m^2 = 14$.

272. Одредити прост број p такав да је број $8p^2 + 1$ такође прост.

273. Одредити све просте бројеве p такве да је и број: а) $p^2 + 1999$, б) $p^3 + 1999$ прост.

274. Одредити све просте бројеве p и q тако да је $p^2 - 2q^2 = 1$.

275. Доказати да је број $7^{2000} - 1$ дељив са 10.

276. Доказати да је број $43^{3003} - 37^{1001}$ дељив са 10.

277. Са колико нула се завршава декадни запис броја $9^{99} + 1$?

278. Постоји ли природан број n такав да је број $n^2 + n + 1$ дељив са 5?

279. Доказати да следеће једначине немају решења у скупу целих бројева:
а) $x^2 - 5y = 10z + 3$; б) $2x^2 + 5y = 1001$;
в) $2x^2 + 5y^2 = 111\,111$; г) $3x^2 + 5y^2 = 4444$;
д) $x^4 + 2y^4 = 44\,444$; ђ) $3^x + 6^y = 41^z$ $(x, y, z \in \mathrm{N})$.

280. Дати су разломци $\frac{35}{99}$ и $\frac{28}{121}$. Наћи најмањи од свих позитивних рационалних бројева такав да кад се подели сваким од датих разломака количник буде природан број.

281. Наћи најмањи природни број који помножен са 450 даје: а) квадрат; б) куб природног броја.

282. Нека су x и y природни бројеви и $21xy^2$ и $15xy$ квадрати природних бројева. Наћи најмању вредност збира $x + y$.

283. Збир двоцифреног броја $\overline{ab}$ и броја $\overline{ba}$ је потпун квадрат. Колико има оваквих бројева?

284. Производ шест узастопних природних бројева је седмоцифрени број 216*16*. Одредити непознате цифре замењене звездицама.

285. Производ једног двоцифреног и једног троцифреног броја записује се само помоћу неколико цифара 4. Одредити о којим бројевима се ради.

286. Производ природних бројева x и y је троцифрен број са једнаким цифрама, а њихов збир је двоцифрен број, такође са једнаким цифрама. Наћи све такве x и y.

287. Одредити највећи троцифрени број који при дељењу са 43 даје остатак једнак количнику.

288. Природан број n подељен са 6 даје остатак 4, а подељен са 15 даје остатак 7. Колики је остатак при дељењу броја n са 30?

289. Једна збирка задатака из математике је у књижари коштала 50 динара, али је по тој цени продато само неколико примерака. Када је књижара снизила цену, све преостале збирке продате су за 3193 динара (нова цена је цео број динара). Колико је било снижење цене?

290. После много година срели су се стари пријатељи, професори математике, Алгебрић и Геометријевић. Алгебрић се похвалио да има три сина. Производ њихових година је 72, а збир њихових година једнак је броју трамваја који је управо пролазио поред њих. Геометријевић на то рече да из те две чињенице не може да одреди колико година имају Алгебрићеви синови. „Да, тако је“, рече Алгебрић, — „али ја се надам да ће се мој најстарији син за неколико година уписати у Математичку гимназију.“ Колико година имају Алгебрићеви синови?

290. Наћи све природне бројеве x и y тако да је:
а) $2(x^2 + y^2) = 5(xy + 1)$; б) $x^2 + 3x + 24 = y^2$.

291. Ако је m цео број, доказати да је цео и број:
а) $A = \dfrac{m^3}{3} + \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m}{6}$; б) $B = \dfrac{m^2}{2} - \dfrac{2m}{3} + \dfrac{m^3}{6}$;
в) $C = \dfrac{m^5 - 5m^3 + 4m}{120}$.

292. Доказати да је разлика квадрата два непарна цела броја дељив са 8.

294. Наћи све природне бројеве n такве да разломак $\dfrac{7n+5}{3n+2}$ може да се скрати.

295. Доказати да број $n^2 - n + 2$ није дељив са 49 ни за један природан број n.

7. Стереометрија — први део (тачка, права, раван; призма, пирамида)

296. Да ли су тачне реченице:
1° постоји права паралелна са две дате мимоилазне праве;
2° ако су α и β две паралелне равни, тада је свака права a равни α паралелна са равни β;

3° сваке две праве које су паралелне једној равни, паралелне су и међу собом;

4° сваке две равни које су паралелне једној правој, паралелне су и међу собом;

5° сваке две равни које су паралелне трећој равни, паралелне су и међу собом?

297. а) Одредити скуп свих тачака у простору које имају једнако одстојање од сва три темена датог троугла.

б) Одредити у датој равни α тачку која је на једнаком одстојању од сва три темена датог троугла ABC (који није у равни α).

298. Ван равни датог правог угла pOq дата је тачка M, која је од темена O удаљена $21\,\mathrm{cm}$, а од кракова Op и Oq по $15\,\mathrm{cm}$. Израчунати одстојање тачке M од равни угла pOq.

299. У равни α дат је правоугаоник $ABCD$, а тачка S је ван те равни тако да је права SA нормална на α. Доказати да су сви троуглови SAB, SAD, SBC и SDC правоугли.

300. Запремина квадра чије се све ивице разликују за по $3\,\mathrm{cm}$ је мања за $63\,\mathrm{cm}^3$ од запремине коцке чија је ивица једнака средњој по дужини ивици квадра. Наћи површину најмање стране квадра.

301. Основа тростране призме је правоугли троугао коме је једна катета $12\,\mathrm{cm}$, а друга за $6\,\mathrm{cm}$ краћа од хипотенузе. Највећа бочна страна призме је квадрат. Колика је запремина призме?

302. Израчунати дужине ивица квадра код кога су површине неподударних страна $54\,\mathrm{cm}^2$, $96\,\mathrm{cm}^2$ и $144\,\mathrm{cm}^2$.

303. Правилна четворострана призма $ABCDA'B'C'D'$ основне ивице $8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ и висине $6\,\mathrm{cm}$ пресечена је једном равни која садржи тачке A, C и D'. Одредити површину пресека равни и призме.

304. Основа тростране призме је правоугли троугао. Теме правог угла доње основе и темена оштрих углова горње основе представљају темена једнакостраничног троугла. Израчунати површину и запремину призме ако јој је најкраћа ивица дужине a.

305. Правилна четворострана призма основне ивице $10\,\mathrm{cm}$ и бочне ивице $20\,\mathrm{cm}$ пресечена је једном равни која садржи основну ивицу те призме и са основом образује диедар чији је угао $60°$. Израчунати површину мањег одсеченог дела призме.

306. Основа призме је трапез $ABCD$ чија је дужа основица $a = 21\,\mathrm{cm}$, а дијагонале $d_1 = AC = 20\,\mathrm{cm}$ и $d_2 = BD = 15\,\mathrm{cm}$ се секу под правим углом. Израчунати запремину призме ако је њена висина једнака краћој основици.

307. У базен облика квадра основе $1{,}5\,\mathrm{m} \times 4\,\mathrm{m}$ и дубине $2\,\mathrm{m}$ насуто је $4{,}5\,\mathrm{m}^3$ воде. За колико се подигне ниво воде ако: а) у базен спустимо металну коцку ивице $1\,\mathrm{m}$; б) се на дно базена спусте још две такве коцке?

308. Основа праве четворостране призме висине $10\,\mathrm{cm}$ је паралелограм чије су странице $11\,\mathrm{cm}$ и $23\,\mathrm{cm}$, а однос дијагонала основе $2:3$. Наћи површине дијагоналних пресека призме.

309. Дијагонални пресек правилне четворостране пирамиде је правоугли троугао. Изразити површину и запремину ове пирамиде у функцији основне ивице a.

310. Основа пирамиде је квадрат странице $20\,\mathrm{cm}$, а висина пирамиде ($H = 21\,\mathrm{cm}$) има подножје у једном темену основе. Колика је најдужа ивица пирамиде? Колика је површина пирамиде?

311. Основа пирамиде је једнакокраки трапез са основицама дужине $16\,\mathrm{cm}$ и $8\,\mathrm{cm}$ и висином $9\,\mathrm{cm}$. Подножје висине пирамиде је пресек дијагонала основе, а краћа бочна ивица је $13\,\mathrm{cm}$. Израчунати запремину пирамиде.

312. Израчунати запремину правилне тростране пирамиде чија је основна ивица $a = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, а површина омотача два пута већа од површине основе.

313. Нека је O средиште висине SD правилног тетраедра $ABCS$. Колики је угао BOC?

314. Основа пирамиде је једнакостранични троугао странице $a = 2\,\mathrm{cm}$, а једна бочна страна је такође једнакостранични троугао и нормална је на раван основе. Израчунати површину ове пирамиде.

315. Дата је правилна шестострана пирамида код које је површина основе три пута мања од површине омотача. Ако је висина пирамиде $4\,\mathrm{cm}$, наћи површину те пирамиде.

316. Основна ивица правилне шестостране пирамиде је a. Површина омотача је два пута већа од површине основе пирамиде.

а) Колика је запремина пирамиде?

б) Колики је нагибни угао бочне стране према основи пирамиде?

317. Дата је коцка чије је једно теме тачка A. Одредити однос запремина пирамиде чије су три ивице оне ивице коцке које садрже тачку A и преосталог дела коцке.

318. Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Ако је површина пирамиде $ABCDA_1$ једнака $1\,\mathrm{cm}^2$, наћи површину коцке.

319. Основа пирамиде је троугао са страницама дужине $13\,\mathrm{cm}$, $14\,\mathrm{cm}$ и $15\,\mathrm{cm}$. Све бочне стране нагнуте су према равни основе под углом од $60°$. Израчунати површину пирамиде.

320. Основа четворостране пирамиде је ромб чији је оштар угао $60°$, а краћа дијагонала $4\,\mathrm{cm}$. Наћи површину пирамиде ако све бочне стране заклапају исти угао од $45°$ са основом.

321. Површина правилног октаедра једнака је површини коцке. Како се односе њихове запремине?

8. Планиметрија — трећи део (сличност)

322. Да ли су два троугла слична ако:

а) један има углове од 40° и 80°, а други од 40° и 60°;

б) један има углове од 50° и 60°, а други од 50° и 80°;

в) један од троуглова има угао од 70° и две странице дужине $5\,\mathrm{cm}$, а други има угао од 40° и две странице дужине $3\,\mathrm{cm}$?

323. Нека је круг k описан око троугла ABC, t тангента круга k у тачки A и D тачка у којој права кроз B паралелна са t сече AC. Ако је $AC = 9\,\mathrm{cm}$ и $AD = 4\,\mathrm{cm}$, израчунати AB.

324. Ако су a, b, c странице, h_a висина која одговара страници BC и R полупречник описаног круга троугла ABC, доказати да важи:

а) $bc = 2Rh_a$; б) $R = \dfrac{abc}{4P}$

(P - површина троугла ABC).

325. Израчунати површину једнакокраког троугла ABC чија је основица $a = 30\,\mathrm{cm}$ и полупречник уписаног круга $r = 10\,\mathrm{cm}$.

326. а) Симетрала угла C троугла ABC сече страницу AB у тачки M. Доказати да је $AM : MB = AC : CB$.

б) Симетрала угла на основици једнакокраког троугла дели наспрамни крак на одсечке од $6\,\mathrm{cm}$ и $9\,\mathrm{cm}$. Одредити површину тог троугла.

в) Странице једнакокраког троугла су $BC = a$ и $AB = AC = b$. Симетрале углова на основици секу наспрамне краке у тачкама M и N. Доказати да је $MN = \dfrac{ab}{a+b}$.

г) Нека је T средиште странице BC троугла ABC и E и F тачке на страницама AB, односно AC, такве да су TE и TF симетрале углова ATB и ATC, редом. Доказати да је $EF \parallel BC$.

327. Дужине катета правоуглог троугла ABC су $AC = 5\,\mathrm{cm}$ и $BC = 12\,\mathrm{cm}$. Ако је D пресечна тачка симетрале угла код темена A и странице BC и E подножје нормале из D на AB, израчунати дужину дужи DE.

328. У троугао ABC чија је страница $BC = 30\,\mathrm{cm}$ и одговарајућа висина $10\,\mathrm{cm}$ уписан је једнакокрако-правоугли троугао DEF тако да му је хипотенуза DF паралелна страници BC, а теме E правог угла припада страници BC. Наћи дужину странице DF.

329. Дат је круг $k(O,r)$ и ван њега тачка M из које су конструисане две сечице s_1 и s_2. Сечица s_1 сече дати круг у тачкама A и B (при чему је M–A–B) и не садржи тачку O, а сечица s_2 сече круг у тачкама C и D и садржи тачку O (при чему је M–C–O–D). Доказати да су троуглови MBD и MCA слични.

330. У правоуглом троуглу ABC дужине катета су $AC = 6\,\mathrm{cm}$ и $BC = 12\,\mathrm{cm}$. Ако је D тачка катете BC таква да је $\angle ADC = 90^\circ - \angle ABC$, наћи дужине дужи CD и BD.

331. Катете правоуглог троугла ABC су $AC = 16\,\mathrm{cm}$ и $BC = 12\,\mathrm{cm}$. Са центром B конструисан је круг k полупречника BC, а затим тангента круга k паралелна хипотенузи AB (тангента и троугао су на разним странама хипотенузе). Та тангента сече праву CB у тачки D. Наћи дужину дужи BC.

332. На страници AC троугла ABC дата је тачка E таква да је $\angle EDA = \angle ABC$, где је D средиште дужи BC. Права кроз E, паралелна правој BC, сече праву AD у тачки F. Ако је $FA = 3\,\mathrm{cm}$ и $FD = 12\,\mathrm{cm}$, наћи дужину дужи EF.

333. Ако је у троуглу ABC угао A два пута већи од угла B и $AC = 2\,\mathrm{cm}$, $AB = 3\,\mathrm{cm}$, наћи дужину странице BC.

334. У једнакокраки троугао ABC ($AC = BC$) уписан је круг који додирује странице троугла BC, CA, AB редом у тачкама P, Q, R. Нека је E пресечна тачка круга и дужи AP. Доказати да права QE полови дуж AR.

335. Нека је E средиште странице BC квадрата $ABCD$ странице $2\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$ и M подножје нормале из D на AE. Израчунати дужину DM.

336. На страници AB паралелограма $ABCD$ површине $24\,\mathrm{cm}^2$ дата је тачка M тако да је $AB = 3AM$. Ако је N пресечна тачка правих AC и DM, наћи површину троугла AMN.

337. Наћи дијагоналу и крак једнакокраког трапеза $ABCD$ чије су основице $AB = 20\,\mathrm{cm}$ и $CD = 12\,\mathrm{cm}$ ако центар описаног круга око трапеза припада дужој основици.

338. Основице трапеза су a и b ($a > b$), а висина h. Одредити одстојање тачке пресека дијагонала од дуже основице трапеза.

339. Основице трапеза су $AB = 8\,\mathrm{cm}$ и $CD = 4\,\mathrm{cm}$. Нека је $N \in BC$ тачка таква да је површина троугла ABN четири пута мања од површине трапеза. Ако је тачка M пресек правих AN и CD, израчунати дужину CM.

340. Нека је O пресек дијагонала трапеза $ABCD$ ($AB \parallel CD$). Ако су P_1 и P_2 површине троуглова ABO и COD, наћи површину трапеза.

341. Основице једнакокраког трапеза $ABCD$ су $AB = 12\,\mathrm{cm}$ и $CD = 3\,\mathrm{cm}$. Дужи SC и SD, где је S средиште дужи AB, секу дијагонале BD и AC у тачкама P и Q. Наћи дужину дужи PQ.

9. Системи линеарних једначина и примене

342. Два броја се разликују за 11, а њихови квадрати за 1104. Који су то бројеви?

343. Збир два разломка чији су имениоци 10 и 15 је $11/6$. Ако се бројилац сваког од тих разломака повећа за 1, они ће постати једнаки. Који су то разломци?

344. Ако би се од Жаркове висине одузела њена десетина и додала Дарковој висини, Дарко би био за деветину своје висине виши него што је био, а 17 cm виши од Жарка. Колико је висок Жарко, а колико Дарко?

345. У први разред једне гимназије уписани су ученици у осам одељења и то: у прво, друго и треће одељење укупно 93 ученика, у друго, треће и четврто — 96, у треће, четврто и пето — 96, у четврто, пето и шесто — 99, у пето, шесто и седмо — 100, у шесто, седмо и осмо — 99, у седмо, осмо и прво — 97 и у осмо, прво и друго — 94 ученика. Колико је ученика уписано у свако одељење?

346. Наћи пет реалних бројева чији су збирови по два једнаки: 0, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14. 17.

347. Два ученика, Аца и Бранко, станују у згради A, односно B, на супротним крајевима једне улице. Аца је кренуо ка згради B, а Бранко ка згради A. Кренули су у истом тренутку, кретали су се сталним брзинама и по доласку на циљ одмах кренули назад према својој згради. Први пут су се срели 300 m од Ацине зграде, а други пут 400 m од Бранкове зграде.

а) Колика је дужина улице?

б) Ко се кретао брже, Аца или Бранко?

348. Купљено је неколико једнаких књига и неколико једнаких албума. За књиге је укупно плаћено 1024 динара, а за албуме 56 динара, а купљено је 6 књига више него албума. Колико је купљено књига ако је цена једне књиге цео број и за 100 динара је виша од цене једног албума?

349. Четири цеви напуне базен за 4 часа; прва, друга и четврта цев напуне базен за 6 часова, а друга, трећа и четврта цев за 5 часова. За које време би базен напуниле само прва и трећа цев?

350. Младен и Никола, радећи заједно, заврше један посао за два дана. Ако би Младен радио два пута спорије, а Никола три пута брже, посао би завршили за дан и по. За које време би свако од њих сам завршио цео посао?

351. Пет радника обављају један посао. Први, други и трећи радећи заједно заврше читав посао за 7,5 h; први, трећи и пети за 5 h; први, трећи и четврти за 6 h; други, четврти и пети за 4 h. За које време би посао завршили свих пет радника радећи заједно?

352. Две свеће различитих дужина и дебљина запаљене су истовремено. Дужа свећа би сасвим сагорела за 3.5 h, а краћа за 5 h. Пошто су гореле по 2 h, дужине су им једнаке. За колико процената је дужа свећа у почетку била дужа од краће?

353. Одредити целе бројеве a и b такве да је број $1+\sqrt{3}$ решење једначине $3x^3+ax^2+bx+12=0$.

354. Наћи све парове (n,m) целих бројева за које важи $3n^2+2nm+3=m^2+10$.

355. За сетву је узорано 300 ha. Да је било још три трактора, рад би био завршен 6 дана раније. Колико је било трактора ако један трактор дневно узоре 15 ha?

356. Путници A и B пођу један другом у сусрет и сретну се после 4 h. Да су обојица прелазили на сат по пола километра више, срели би се после $3\frac{3}{5}$ h. А ако би једновремено кренули у истом смеру, A иза B, тек после 6 h би се одстојање између њих смањило за једну шестину. Колика је брзина сваког путника? Колика је била раздаљина између њих на почетку?

357. Решити систем једначина

$$x^2+2y+1=0, \qquad y^2+2z+1=0, \qquad z^2+2x+1=0.$$

10. Неједначине

358. Решити неједначину $\dfrac{x+1}{5}-\dfrac{x-3}{3}\leqslant\dfrac{2x-2}{5}-\dfrac{3-x}{2}$.

359. Решити систем неједначина:

а) $(x-1)(2-x)+(x-2)^2<5,\ \dfrac{x+2}{3}-\dfrac{3(x-1)}{6}\leqslant\dfrac{7}{6}$;

б) $\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{5-x}{3}-8\left(\dfrac{4-x}{7}-\dfrac{2-x}{10}\right)\geqslant 5x-\dfrac{x-\frac{2}{3}}{7}$,

$6x-7>5x-1,\ 3x+6>8x-4$.

Решити неједначине (задаци **360–365**):

360. а) $|x|<\dfrac{x}{3}+1$; б) $x-3|x|>1$;

в) $\sqrt{x^2-2x+1}<999$; г) $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-8x+16}\leqslant 19$.

361. а) $\dfrac{5x-1}{x-3}<0$; б) $\dfrac{2-x}{x+3}\geqslant 0$; в) $\dfrac{3x-4}{5x+2}>0$;

г) $(x-1)(x+2)<0$; д) $(3x+1)(2x-1)\geqslant 0$.

362. а) $\dfrac{2x-7}{x+2}\geqslant 1$; б) $\dfrac{2x-1}{x-3}\leqslant 1$; в) $\dfrac{3x+1}{\frac{1}{2}-x}\geqslant 2$.

363. а) $\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}<0$; б) $\dfrac{3x^2-x-20}{x^2-2x-8}<2$; в) $\dfrac{x^2-9}{x^2-7x+12}<8$.

364. а) $\dfrac{|4-x|}{2x-5}\geqslant 2$; б) $\dfrac{2|x|-3}{|x|-4}\leqslant 1$;

в) $\dfrac{100}{1+|x-1|}>1$; г) $\dfrac{2x+3}{|x-1|}<\dfrac{9}{2}$.

365. а) $\dfrac{|x-2|}{x^2+3x-10}\geqslant 1$; б) $\dfrac{|x-1|}{x^2-x}>\dfrac{1}{5}$.

366. Одредити све природне бројеве n за које важи:

а) $1+2+3+\cdots+n<n^2-2n$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}+\dfrac{1}{n(n+1)}>\dfrac{999}{1000}$.

367. Који услов треба да испуни разломак $\dfrac{a}{b}$, a,b – цели бројеви, да би био већи од разломка $\dfrac{a+6}{b+2}$?

368. Девет једнаких разгледница стаје 11 динара и нешто пара, а 13 истих таквих разгледница стаје 15 динара и нешто пара. Колико тачно стаје једна разгледница?

369. Милан слаже своје марке у нови албум. Ако на сваку страницу стави по 20 марака, албум му неће бити довољан, а ако стави по 23 марке, бар једна страница ће остати празна. Ако би неко Милану поклонио исти такав албум са по 21 марком на свакој страници, он би имао укупно 500 марака. Колико има страница у албуму?

370. Студент медицине је у току петогодишњих студија положио укупно 31 испит. На свакој години студија, почевши од друге, положио је више испита него на претходној. На петој години положио је три пута више испита него на првој. Колико је испита положио на четвртој години?

11. Стереометрија — други део (ваљак, купа, лопта)

371. Наћи однос површине омотача и површине основе купе код које је изводница три пута дужа од пречника основе.

372. Једнакостранични троугао ABC странице $a=2\,\mathrm{cm}$ ротира око праве која је нормална на основицу AB троугла и садржи теме A. Израчунати запремину добијеног обртног тела.

373. Једнакостранични троугао странице a ротира око праве која садржи једно његово теме и паралелна је наспрамној страници троугла. Израчунати површину и запремину добијеног обртног тела.

374. У купу полупречника основе $4\,\mathrm{cm}$ и висине $6\,\mathrm{cm}$ уписана је коцка тако да јој једна страна припада основи купе. Израчунати дужину ивице те коцке.

375. Наћи однос запремина два тела настала ротацијом датог паралелограма око две његове суседне странице (дужина a и b).

376. У круг је уписан једнакостранични троугао. Одредити однос запремина тела насталих ротацијом круга и троугла око праве која садржи теме троугла и центар круга.

377. У купу изводнице $s=8\,\mathrm{cm}$ и нагибног угла изводнице према равни основе од 60° уписана је полулопта, тако да велики круг полулопте припада основи купе, а површ полулопте додирује омотач купе. Наћи дужину полупречника полулопте.

378. Посуда облика једнакостраничног ваљка ($H=2r$), који има пречник основе $10\,\mathrm{cm}$, испуњена је водом до $\dfrac{11}{12}$ висине. Колики је полупречник највеће лопте која се може потопити у воду, а да не дође до преливања?

379. У правилну четворострану пирамиду уписана је лопта. Одстојање центра лопте од врха пирамиде је $2\,\mathrm{cm}$, а нагибни углови бочних страна пирамиде према равни основе су 60°. Наћи запремину пирамиде.

380. У правилну четворострану пирамиду основне ивице $6\,\mathrm{cm}$ и висине $4\,\mathrm{cm}$ уписана је лопта. Наћи површину и запремину лопте, као и одстојање врха пирамиде од најближе тачке на лопти.

381. У лопти полупречника $8\,\mathrm{cm}$ уписана је купа. Центар лопте налази се у унутрашњости купе на одстојању $7\,\mathrm{cm}$ од основе купе. Наћи површину купе.

382. Површина купе је два пута већа од површине лопте уписане у ту купу. Наћи однос њихових запремина.

383. Лопта полупречника $24\,\mathrm{cm}$ пресечена је са исте стране центра двема паралелним равнима. Колико је растојање између тих равни ако су површине кругова који се добијају у пресеку са лоптом $560\pi\,\mathrm{cm}^2$ и $540\pi\,\mathrm{cm}^2$?

384. Четири једнаке лопте полупречника r леже на равном столу и међусобно се додирују. Пета лопта истог полупречника постављена је на прве четири тако да их све додирује. Наћи одстојање најудаљеније тачке пете лопте од равни стола.

385. Свака од четири кугле, које леже на равном столу (и додирују сто), додирује остале три кугле. Три кугле имају полупречник r. Колики је полупречник четврте кугле?

386. Странице троугла ABC су a, b и c. Наћи полупречнике сфера које додирују раван троугла ABC у тачкама A, B, C и које се додирују међусобно.

387. Израчунати полупречник лопте која додирује основу ABC и ивице SA, SB и SC правилног тетраедра $SABC$ ивице $\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$.

12. Разни задаци

388. Један златар је имао 36 златних плочица и одлучио је да од сваке плочице направи по један украс. Када је направио првих 6 украса, приметио је да од отпадака може да излије тачно једну нову плочицу. Колико је укупно украса успео да направи?

389. Колико има четвороцифрених бројева чије су све цифре непарне?

390. Колико има петоцифрених бројева формираних од цифара 0, 1, 3, 5, 7 и 9 тако да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља?

391. На кошаркашком првенству учествује 16 екипа. На колико начина се могу поделити златна, сребрна и бронзана медаља?

392. Колико има трословних речи које се могу прочитати и у ћирилици и у латиници, али различито?

393. Колико има природних бројева мањих од 10 000 који се могу написати помоћу цифара 0, 1 и 2 ако се свака цифра може појавити у броју највише два пута?

394. У кутији се налази 100 куглица: 28 црвених, 20 зелених, 12 жутих, 20 плавих, 10 белих и 10 црних. Колико најмање куглица треба извући из кутије да би међу њима сигурно било 15 куглица исте боје?

395. У кутији се налази 20 жутих, 30 црвених и 50 плавих куглица. Колико се куглица најмање мора извући да би сигурно биле извучене бар две куглице:

а) разних боја; б) исте боје; в) жуте боје?

396. Одржан је шаховски меч између две екипе шахиста A и B. По пропозицијама сваки шахиста једне екипе одигра по једну партију са сваким шахистом друге. Показало се да је број одиграних партија четири пута већи од броја свих учесника из обе екипе. Колико је шахиста наступило за екипу A, у којој је било мање шахиста него у екипи B?

397. На писменој вежби из математике 30 ученика једног одељења добили су оцене 2, 3, 4 или 5. Збир добијених оцена је 93, при чему је тројки било више него петица и мање него четворки. Осим тога, број четворки је био дељив са 10, а број петица паран. Одредити колико којих оцена су добили ученици тог одељења.

398. Доказати да не постоји природан број n тако да важи:

а) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = 20\,032\,003$;

б) $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2 = 666\,666$.

399. а) Одредити све реалне бројеве a и b за које важи $\sqrt{a+b} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$.

б) Одредити све целе бројеве m и n за које важи $\sqrt{m+\sqrt{m}} = n$.

400. Наћи све природне бројеве a, b, c такве да је $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$.

401. Упоредити разломке $A = \frac{10^{999}+1}{10^{1000}+1}$ и $B = \frac{10^{1000}+1}{10^{1001}+1}$.

402. Наћи најмању врдност израза $f(x) = |x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$.

403. Дата је права $3x-4ay-12a^2 = 0$ $(a \neq 0)$. Одредити a тако да је површина фигуре коју ограничава дата права са координатним осама једнака 48.

404. Дате су функције $y = -\frac{3}{2}mx - 3m$ и $y = -\frac{5}{4}mx + 5$, где је m решење једначине

$$\frac{m+1}{5} + \frac{2m-3}{15} + 1 = m - \frac{m-2}{6}.$$

Израчунати обим и површину фигуре ограничене графицима датих функција и координатним осама у првом квадранту координатног система.

405. Нацртати скуп свих тачака у равни xOy за које важи $|x|+|y-1| = 2$, а затим израчунати површину фигуре ограничене том линијом.

406. Наћи $f(x)$ ако је, за свако $x \in \mathbf{R}$:

а) $f\left(\frac{x}{2}-1\right) = 2x+3$; б) $f(-x+4) = \frac{x}{2}+1$; в) $f(3x-2) = 5x-7$.

407. Одредити $f(x)$ ако је $2f(x)+f(-x) = 2x-3$, за свако $x \in \mathbf{R}$.

408. Бранислав Нушић је 1883. године напунио онолико година колики је збир цифара његове године рођења. Које године (XIX века) је рођен Бранислав Нушић?

409. Дванаест хлебова подељено је на 12 лица. Сваки мушкарац добио је по два хлеба, жена — по пола хлеба, а дете по четвртину хлеба. Колико је било мушкараца, колико жена, а колико деце?

410. На колико начина се 38 динара може поделити на два брата, тако да старији добија само новчанице од 5 динара, а млађи само новчанице од 2 динара?

411. У пекари је било 100 хлебова укупне масе 100 kg, при чему је маса неких 5 kg, неких 3 kg, а трећих $\frac{1}{2}$ kg. Колико је било којих хлебова?

412. Наћи све троцифрене природне бројеве који су 25 пута већи од збира својих цифара.

413. Два играча наизменично узимају куглице из две кутије. Када дође на ред, играч узима из једне од кутија произвољан број куглица (бар једну). Победник је онај који последњи узме куглицу. Како треба да игра први такмичар да би победио ако у првој кутији има 19, а у другој 99 куглица?

414. Наћи целобројна решења система једначина

$$xyzu - x = 1111,$$
$$xyzu - y = 111,$$
$$xyzu - z = 11,$$
$$xyzu - u = 1.$$

415. Одредити 1999 узастопних целих бројева чији је збир 1999.

416. Наћи највећу вредност израза и вредност променљиве x за коју се добија та максимална вредност:

а) $-x^2 + 4x + 5$; б) $-x^2 - 3x + 1$;

в) $\dfrac{1}{x^2 - 6x + 10}$; г) $\dfrac{1}{1 + x + x^2}$.

417. Одредити минималну вредност следећих израза и вредност променљиве x за коју се добија та минимална вредност:

а) $f(x) = x^2 + 22$; б) $f(x) = x^2 - 7x + 100$;

в) $f(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 9}$; г) $f(x) = 3 + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

418. За које вредности променљивих x и y разломак $r = \dfrac{3x^2 + 3y^2 - 12x + 17}{x^2 + y^2 - 4x + 5}$ има највећу вредност и колика је та вредност?

419. Одредити двоцифрени број који подељен збиром својих цифара даје највећи количник.

420. Од свих правоуглих троуглова чији је збир катета 10 cm, одредити онај код кога је дужина хипотенузе најмања.

421. Наћи све двоцифрене бројева који су за 13 већи од збира квадрата својих цифара.

422. Доказати да не постоји правоугли троугао чије су катете природни бројеви, а хипотенуза дужине $\sqrt{1999}$.

423. Колико има неподударних правоуглих троуглова чије су све три странице природни бројеви и код којих су мерни бројеви обима и површине једнаки?

424. Одредити природне бројеве $x < y < z$ такве да важи $2^x + 2^y + 2^z = 2336$.

425. Наћи све целе бројева a, b, c за које важи $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$.

ТЕСТОВИ

У овом делу збирке дато је двадесетпет тестова који својом формом и садржином одговарају тестовима за пријемни испит у Математичкој гимназији у Београду. Ученици су у могућности да сами оцене свој рад тако што ће у сваком од ових тестова:

задатке 1–3 бодовати са 6 поена,
задатке 4–6 бодовати са 8 поена,
задатке 7–9 бодовати са 12 поена,
задатке 10–12 бодовати са 14 поена.

За погрешно решење треба одузети 10% броја поена за тачан одговор тог задатка. Сваки тест максимално доноси 120 поена. Одличним се могу сматрати резултати од преко 100 поена, а врло добрим од 80 до 100 поена.

Тест I

426. (1.) Нека је O центар описаног, а S уписаног круга троугла ABC. Посматрајмо исказе:

(I) Површине троуглова ABS, BCS и CAS су једнаке.

(II) Обими троуглова ABO, BCO и CAO су једнаки.

(III) Тачке O и S се поклапају ако и само је троугао ABC једнакостраничан.

Тачни су:

А) само (I); В) само (II); С) само (III); D) само (I) и (III); Е) само (II) и (III).

427. (2.) Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$. Тада је израз

$$\frac{a^{2n+3} - a^{2n+2} + a^{2n+1}}{a^{3n+2} - a^{3n+1} + a^{3n}}$$

једнак изразу

А) $\dfrac{1}{a^{n-1}}$; В) $\dfrac{1}{a^{n+1}}$; С) $\dfrac{1}{a^{3n-3}}$; D) $\dfrac{a^{2n+1} - a}{a^{3n} - a}$; Е) $\dfrac{1}{a}$.

428. (3.) Колико има парних петоцифрених бројева?

А) 450 000; В) 5 000; С) 4 500; D) 50 000; Е) 45 000.

429. (4.) Права p која је паралелна страници BC троугла ABC сече дужи AB и AC редом у тачкама D и E. Права q, која садржи тачку C и паралелна је правој BE сече праву AB у тачки F. Ако је $AD = 6\,\mathrm{cm}$, $AF = 8\,\mathrm{cm}$, тада је AB дужине

A) $5\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; B) $7\,\mathrm{cm}$; C) $5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$; D) $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$; E) $\frac{48}{7}\,\mathrm{cm}$.

430. (5.) Једначина $\big||x-1|-4\big| = 5$ има:

A) једно решење; B) два решења; C) три решења; D) четири решења; E) више од четири решења.

431. (6.) На једном градилишту број радника повећан је за трећину. За колико процената од предвиђеног времена ће се посао раније завршити?

A) 25%; B) 30%; C) $33\frac{1}{3}$%; D) 40%; E) 24%.

432. (7.) Основа праве призме је једнакокраки трапез $ABCD$ са ивицама $AB = CD = 13\,\mathrm{cm}$, $BC = 4\,\mathrm{cm}$ и $AD = 14\,\mathrm{cm}$. Ако је површина пресека ACA_1C_1 $150\,\mathrm{cm}^2$, тада је површина омотача призме:

A) $656\,\mathrm{cm}^2$; B) $440\,\mathrm{cm}^2$; C) $616\,\mathrm{cm}^2$; D) $220\,\mathrm{cm}^2$; E) $532\,\mathrm{cm}^2$.

433. (8.) Нека је n природан број такав да је збир $1+2+3+\cdots+n$ троцифрен број чије су све цифре једнаке. Тада је збир цифара броја n једнак:

A) 8; B) 9; C) 10; D) 11; E) 12.

434. (9.) Нека је у троуглу ABC, $AB = AC$ и угао код темена A већи од 30°. Нека је D тачка на страници BC таква да је $\angle BAD = 30^\circ$ и нека је E тачка на страници AC таква да је $AE = AD$. Угао EDC једнак је:

A) 10°; B) 12°; C) 15°; D) 18°; E) 30°.

435. (10.) Када се природни број n подели са 3 добија се остатак 2, а када се подели са 37 остатак 22. Колики је остатак при дељењу броја n са 111?

A) 66; B) 61; C) 44; D) 26; E) 59.

436. (11.) Када се омотач купе развије у равни, добија се четвртина круга полупречника $4\sqrt{5}$. Тада је запремина те купе:

A) $\frac{100\pi}{\sqrt{3}}$; B) $\frac{25\pi\sqrt{2}}{3}$; C) $\frac{320\pi\sqrt{5}}{3}$; D) $\frac{25\pi\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{50\pi\sqrt{3}}{3}$.

437. (12.) Скуп решења неједначине $\frac{|x-2|}{x^2+3x-10} \geqslant 1$ је

A) $[-4,5)$; B) $[-6,-5)\cup[-4,5)$; C) $[-6,-5)$; D) $[-6,-5)\cup(-5,-4)$; E) празан скуп.

Тест II

438. (1.) Дат је израз $(a-1)^2 - 4(a+1)^2 - 6(a+1)(a-1)$. После сређивања добија се израз:

A) $-9a^2+6a+11$; B) $-a^2+6a+11$; C) $-9a^2-10a+11$; D) $-9a^2-10a+3$; E) $3a^2-10a-9$.

439. (2.) Дате су реченице: p: $(-2x)^2 = -4x^2$; q: $5-3x^2 = 2x^2$; r: $(-x^2)^3 = -x^6$ и s: $(-x^3)(-x^4) = x^7$. За свако x тачне су реченице:

A) p и r; B) p и s; C) q; D) r и s; E) ниједна од њих.

440. (3.) Центар описаног круга у произвољном троуглу је тачка:

A) пресека висина; B) пресека тежишних дужи; C) пресека симетрала страница троугла; D) пресека симетрала углова троугла; E) средиште најдуже странице троугла.

441. (4.) Нека је $\mathbf{N}$ скуп природних бројева, $A = \{2n \mid n \in \mathbf{N}\}$, $B = \{3n \mid n \in \mathbf{N}\}$ и $C = \{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Ако је $X = (A\cap C)\cup B$, $Y = A\cap(C\cup B)$, тада је:

A) $X = B$, $Y = C$; B) $X = C$, $Y = B$; C) $X = Y$; D) $X = \emptyset$, $Y = C$; E) $X = A$, $Y = B$.

442. (5.) Вредност израза $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{2^2}$ једнака је:

A) 0; B) 4; C) -4; D) ± 4; E) 8.

443. (6.) Дате су реченице:

(I) Две фигуре једнаких површина су подударне.

(II) Две подударне фигуре имају једнаке површине.

(III) Свака два правилна шестоугла су слична.

(IV) Свака два слична шестоугла су правилна.

Тачне су реченице:

A) I и IV; B) II; C) I и II; D) III; E) II и III.

444. (7.) Скуп решења неједначине $\frac{2x-5}{x+3} \geqslant 1$ је:

A) $(-\infty,-3)\cup[8,+\infty)$; B) $[8,+\infty)$; C) $(-\infty,-3)\cup(8,+\infty)$; D) $(-\infty,-3]$; E) $(-3,8)$.

445. (8.) Једна од следећих реченица је тачна:

A) Два четвороугла са једнаким угловима су слични. B) Висине сличних троуглова су пропорционалне. C) Сви правоугли трапези су међусобно слични. D) Површине сличних троуглова пропорционалне су страницама. E) Сви међусобно слични петоуглови слични су правилном петоуглу.

446. (9.) Површина правилне четворостране пирамиде чија је основна ивица $a = 6\,\mathrm{cm}$, а висина за $1\,\mathrm{cm}$ краћа од висине бочне стране је:

A) $96\,\mathrm{cm}^2$; B) $48\,\mathrm{cm}^2$; C) $132\,\mathrm{cm}^2$; D) $32+12\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; E) $98\,\mathrm{cm}^2$.

447. (10.) Једначина $\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}=0$:

A) има решења $x_1=2$, $x_2=3$; B) има само решење $x_1=2$; C) има само решење $x_1=3$; D) има за решење сваки број за који је $x\neq 2$ и $x\neq 3$; E) нема решења.

448. (11.) Која од следећих неједнакости важи за све реалне бројеве x?

A) $x^3\geqslant x$; B) $x^2\geqslant x$; C) $x^2-x+1\geqslant 0$; D) $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$; E) $\sqrt{x}\geqslant 0$.

449. (12.) Страница квадрата $ABCD$ је 10 cm. На страницама квадрата одређене су тачке M, N, K и L тако да је $AN=BL=CK=DM$, $AN>BN$ ($M\in AD$, $K\in CD$, $L\in BC$, $N\in AB$). Ако је површина четвороугла $MNLK$ једнака $58\,\mathrm{cm}^2$, тада је разлика дужи $AN-BN$ једнака:

A) 1 cm; B) 2 cm; C) 2,5 cm; D) 3 cm; E) 4 cm.

Тест III

450. (1.) График функције $y=kx+n$ садржи тачке $A(1,0)$ и $B(0,-2)$. Разлика $k-n$ једнака је:

A) 2; B) −2; C) 4; D) 0; E) −1.

451. (2.) Која фигура се добија у пресеку коцке једном равни, која садржи две паралелне дијагонале наспрамних страна коцке?

A) Квадрат; B) правоугаоник; C) трапез са нормалним дијагоналама; D) једнакокраки троугао; E) ромб.

452. (3.) Збир десет узастопних природних бројева је 315. Тада је збир цифара највећег од тих бројева једнак:

A) 11; B) 7; C) 10; D) 8; E) 9.

453. (4.) Нека је P тачка на страници MN правоугаоника $KLMN$ таква да је $PM=\dfrac{1}{3}NM$. Ако је површина троугла PML једнака 8, тада је површина правоугаоника $KLMN$:

A) 48; B) 24; C) 96; D) 72; E) 36.

454. (5.) За реалне бројеве a и b важе неједнакости: $1<a<5$ и $1<b<5$. Посматрају се искази:

$$\text{(I) } a-b>b-a;\quad \text{(II) } a-b<b-a;\quad \text{(III) } a-b=b-a.$$

Који од следећих исказа је тачан за све a и b?

A) само (I); B) само (II); C) (I) или (III); D) ниједан; E) сви.

455. (6.) У исти круг су уписани квадрат и једнакостранични троугао. Однос површина тог квадрата и троугла је:

A) $\dfrac{16}{3\sqrt{3}}$; B) $\dfrac{8}{3\sqrt{3}}$; C) $\dfrac{32}{3\sqrt{3}}$; D) $\dfrac{3}{2}$; E) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

456. (7.) Последња цифра броја $333^{333}+222^{222}$ је:

A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) 9.

457. (8.) У кутији се налазе јабуке. Прво се из кутије узме половина свих јабука и још половина једне јабуке, затим се од остатка узме половина и још пола јабуке и, најзад, од последњег остатка узме половина и још пола јабуке. После овог у кутији је остала још 31 јабука. Нека је у кутији у почетку било x јабука. Тада је:

A) $x<100$; B) $100\leqslant x<150$; C) $150\leqslant x<200$; D) $200\leqslant x<250$; E) $x\geqslant 250$.

458. (9.) Осни пресек праве купе је једнакостранични трбугао. У ту купу уписана је лопта. Однос запремина лопте и купе је:

A) $1:2$; B) $4:9$; C) $1:\sqrt{3}$; D) $2:3\sqrt{3}$; E) $\sqrt{3}:4$.

459. (10.) Колико има четвороцифрених бројева који у свом запису имају само цифре 0, 2, 4, 6 и 8?

A) 625; B) 4500; C) 600; D) 500; E) 375.

460. (11.) Колико има природних бројева n таквих да је број

$$a=n(n+1)(n+2)+2^n$$

дељив са 1995?

A) Ниједан; B) тачно један; C) тачно два; D) тачно три; E) више од три.

461. (12.) У производу

$$\overline{xx}\cdot\overline{yz}\cdot\overline{xyz}=\overline{xyzxyz}$$

x, y и z означавају различите цифре. Тада је $x-y+z$ једнако:

A) 10; B) 9; C) 12; D) −13; E) −7.

Тест IV

462. (1.) Израз $2a^2+3a^2-5(a-b)(a+b)$ идентички је једнак изразу:

A) $10ab+5b^2$; B) $-5b^2$; C) $5b^2$; D) $10a^2-5b^2$; E) $10a^2+5b^2$.

463. (2.) Ако је $\dfrac{1}{x}=\sqrt{0{,}09}$, тада је:

A) $x<0$; B) $0<x<1$; C) $1<x<3$; D) $3<x<4$; E) $x>4$.

464. (3.) Ако се полупречник круга повећа за 50%, површина тог круга се повећа за:

A) 125%; B) 50%; C) 100%; D) 225%; E) 25%.

465. (4.) Нека је O центар уписаног круга троугла ABC. Ако је $\angle ACB=70^\circ$, тада је $\angle AOB$ једнак:

A) 55°; B) 70°; C) 110°; D) 125°; E) 140°.

466. (5.) Вредност израза $1-\left(\frac{3}{2}-0{,}25\right):\left(1\frac{1}{4}-1{,}125\right)$ је

A) $-\frac{27}{32}$; B) $-\frac{1}{32}$; C) -2; D) 11; E) -9.

467. (6.) Збир катета правоуглог троугла је 32 cm. Ако се краћа катета увећа за 4 cm, а дужа умањи за 5 cm, површина троугла се не мења. Разлика катета тог троугла износи:

A) 7 cm; B) 8 cm; C) 8,5 cm; D) 9 cm; E) 10 cm.

468. (7.) Колико има целих бројева a таквих да је број $\frac{a^3+1}{a-1}$ цео?

A) Ниједан; B) један; C) четири; D) пет; E) бесконачно много.

469. (8.) Дати су искази:

(I) $\{0\}\in\emptyset$; (II) $\{0\}\subset\emptyset$; (III) $\emptyset\subset\emptyset$; (IV) $\emptyset\in\{\emptyset\}$.

Тачни су искази:

A) Ниједан; B) сви; C) III и IV; D) I, III и IV; E) II и III.

470. (9.) Гуска и по снесе јаје и по за дан и по. За колико дана 5 гусака снесе 20 јаја?

A) 3; B) 4; C) 5; D) 6; E) више од 6.

471. (10.) Из тачке M ван датог круга k конструисана је тангентна дуж MA и права m која сече круг k у тачкама B и C, тако да је права m нормална на тангенту MA. Ако је $MA=12\,\text{cm}$, $BC=10\,\text{cm}$, полупречник круга k је:

A) 13 cm; B) 15 cm; C) 16 cm; D) $10\sqrt{3}$ cm; E) $\frac{19\sqrt{3}}{2}$ cm.

472. (11.) Четири човека обављају један посао. Ако први, други и трећи раде заједно, завршиће посао за 6 часова; ако први, други и четврти раде заједно — завршиће посао за 7,5 часова, а трећи и четврти — за 10 часова. За колико часова заврше посао ако раде сви заједно?

A) 4; B) 4,5; C) 5,5; D) $4\frac{2}{3}$; E) 5.

473. (12.) Ако је површина купе два пута већа од површине лопте уписане у ту купу, однос запремина купе и лопте је:

A) $\sqrt{3}:1$; B) $2:1$; C) $3:1$; D) $3:2$; E) $3\sqrt{2}:2$.

Тест V

474. (1.) Нека су P, Q, R средишта страница AB, BC, CA троугла ABC. Ако је O обим троугла ABC, тада је обим троугла PQR:

A) $\frac{1}{2}O$; B) $\frac{2}{3}O$; C) $\frac{1}{3}O$; D) $\frac{1}{6}O$; E) $\frac{1}{4}O$.

475. (2.) За колико је $(x+3)(x-5)$ веће од $(x-6)(x+4)$?

A) За -9; B) за $-4x-9$; C) за 9; D) за $2x^2+9$; E) за 39.

476. (3.) Вредност израза $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt{32}$ је:

A) $29\sqrt{2}$; B) $8\sqrt{8}$; C) $52\sqrt{2}$; D) $19\sqrt{2}$; E) 0.

477. (4.) Ако је d дужина дијагонале стране коцке, а D дужина дијагонале коцке, тада је:

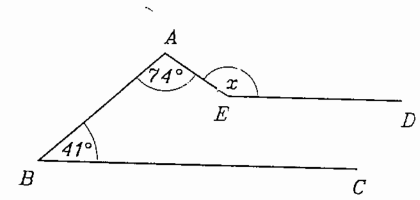
A) $D=d\sqrt{2}$; B) $D=\frac{d\sqrt{3}}{2}$; C) $D=\frac{d\sqrt{6}}{6}$; D) $D=\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; E) $D=\frac{d\sqrt{6}}{2}$.

478. (5.) Решења неједначине $\frac{1}{x}<1$ су сви реални бројеви x за које важи:

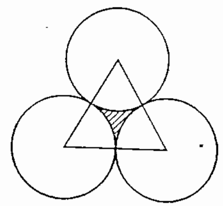
A) $x>1$; B) $-\infty<x<0$ или $x>1$; C) $0<x<1$; D) $-\infty<x<0$ или $0<x<1$; E) $-\infty<x<-1$ или $x>1$.

479. (6.) Ако је $ED\parallel BC$, тада је угао x на слици једнак:

A) 110°; B) 115°; C) 125°; D) 130°; E) 135°.



Сл. уз зад. 479



Сл. уз зад. 492

480. (7.) Суве шљиве садрже 12% воде, а свеже 90%. Колико килограма шљива треба сушити да би се добило 2,5 kg сувих?

A) 21,4 kg; B) 22 kg; C) 22,66 kg; D) 23 kg; E) 24 kg.

481. (8.) Једначина $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2$ има:

A) тачно два решења; B) тачно једно позитивно решење; C) бесконачно много решења; D) тачно три решења; E) нема решења.

482. (9.) Ако је $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$, $x\neq 2$, тада је $f(f(x))$ једнако:

A) $-\frac{5x}{3}$; B) $\frac{x-2}{2x+1}$; C) $\frac{4x^2+4x+1}{x^2-4x+4}$; D) $\frac{4x^2+4x+1}{x-2}$; E) x.

483. (10.) На столу су књиге које треба спаковати. Ако бисмо их паковали по 4, 5 или 6, сваки пут би остала по једна књига, а ако их пакујемо по 7, све би биле спаковане. Нека је N најмањи могућ број књига на столу. Тада је збир цифара броја N једнак:

A) 4; B) 10; C) 7; D) 8; E) 5.

484. (11.) Колико има природних бројева n, $n > 1$, таквих да је број $\dfrac{n(n+1)}{2} - 1$ прост?

A) Тачно један; B) тачно два; C) тачно три; D) тачно четири; E) бесконачно много.

485. (12.) Висина правилног тетраедра ивице a је:

A) $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; B) $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$; C) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$; D) $\dfrac{a\sqrt{6}}{3}$; E) $\dfrac{a}{2}$.

Тест VI

486. (1.) Вредност израза $2^{3a} \cdot 3^{2a}$ је:

A) 64^a; B) 6^{6a^2}; C) 5^{5a}; D) 72^a; E) 6^{5a}.

487. (2.) Збир решења једначине $|3x+2| + 2x = 12$ је:

A) -12; B) 0; C) 6; D) -6; E) 12.

488. (3.) Вредност израза $\dfrac{1}{\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot \frac{12}{5}\right)^2}$ је:

A) 1; B) 0,49; C) $\dfrac{10}{7}$; D) $\left(\dfrac{175}{348}\right)^2$; E) $\dfrac{400}{361}$.

489. (4.) Површина једног полукруга је $8\pi\,\mathrm{cm}^2$. Пречник тог полукруга је:

A) 4 cm; B) $\dfrac{4}{\pi}$ cm; C) 16 cm; D) 4π cm; E) 8 cm.

490. (5.) Израз $3 - \dfrac{2a-1}{2} + \dfrac{a-4}{3} - 5 \cdot \dfrac{a-2}{6}$ идентички је једнак изразу:

A) $-\dfrac{9a+23}{6}$; B) $-9a+23$; C) $\dfrac{-9a+23}{6}$; D) $\dfrac{-34a+73}{6}$; E) $\dfrac{-9a+17}{6}$.

491. (6.) Нека је d дужина краће дијагонале правилног шестоугла. Тада је површина тог шестоугла:

A) $\dfrac{d^2\sqrt{3}}{2}$; B) $\dfrac{3}{8}d^2\sqrt{3}$; C) $2d^2\sqrt{3}$; D) $\dfrac{3}{2}d^2\sqrt{3}$; E) $\dfrac{d^2}{2}$.

492. (7.) Три круга полупречника $r = 1$ cm додирују се као на слици. Површина осенченог „криволинијског“ троугла је:

A) $\dfrac{\pi - \sqrt{3}}{2}$; B) $\pi - \sqrt{3}$; C) $\pi - \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; D) $\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{2}$; E) $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

493. (8.) Колико правилни шестоугао има оса симетрије?

A) Две; B) четири; C) шест; D) осам; E) дванаест.

494. (9.) Ако је $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 2x$, онда је $f(2)$ једнако:

A) -2; B) -4; C) 2; D) 4; E) 0.

495. (10.) Колико различитих делилаца (у скупу природних бројева) има број 120?

A) 3; B) 5; C) 12; D) 16; E) 24.

496. (11.) Површина правилног осмоугла уписаног у круг полупречника $r = 4$ cm је:

A) $24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; B) $64\,\mathrm{cm}^2$; C) $64\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; D) $32\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; E) $32\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

497. (12.) Када ће се први пут после 12 h поклопити сатна и минутна казаљка сата?

A) 13 h; B) $13\frac{1}{11}$ h; C) $13\frac{1}{12}$ h; D) $13\frac{1}{13}$ h; E) $13\frac{1}{15}$ h.

Тест VII

498. (1.) Вредност израза $(10 - 5\pi) - (8 - 4\pi)$ једнака је:

A) π; B) $2 - \pi$; C) $2 - 9\pi$; D) $18 - \pi$; E) 2π.

499. (2.) Центар уписаног круга троугла је пресек:

A) симетрала страница троугла; B) симетрала унутрашњих углова троугла; C) висина троугла; D) тежишних дужи троугла; E) ниједна од ових тачака.

500. (3.) Једначина: $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1)x(x+1)} = 0$ има:

A) 5 решења; B) 4 решења; C) 3 решења; D) 2 решења; E) једно решење.

501. (4.) Најкраће странице два слична многоугла су 3 cm и 4 cm, а збир обима тих многоуглова је 420 cm. Колики је обим мањег многоугла?

A) 30 cm; B) $52\frac{1}{2}$ cm; C) 70 cm; D) 180 cm; E) 240 cm.

502. (5.) Нека је C средиште дужи AB, D средиште дужи BC, E средиште дужи BD и F средиште дужи BE. Ако је $AB = 16$ cm, тада је CF једнако:

A) 4 cm; B) 6 cm; C) 7 cm; D) 8 cm; E) 8,5 cm.

503. (6.) Ако се полупречник лопте повећа за 1 cm, њена површина се повећа за $8\pi\,\mathrm{cm}^2$. При томе се запремина лопте (у cm^3) повећа за:

A) 4π; B) $\dfrac{17}{6}\pi$; C) 16π; D) $\sqrt{2^9}\pi$; E) $\dfrac{13}{3}\pi$.

504. (7.) Вредност израза

$$\frac{1}{(\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{(-1)^2})^2}\cdot\frac{3+4{,}20:0{,}1}{\left(1:\frac{3}{10}-2\frac{1}{3}\right)\cdot 0{,}3125}$$

једнака је:

A) -16; B) 64; C) 6; D) 16; E) 48.

505. (8.) У правоуглом троуглу тачка додира уписане кружнице и хипотенузе дели хипотенузу на одсечке дужина 5 cm и 12 cm. Збир дужина катета је:

A) 23 cm; B) 24 cm; C) 25 cm; D) $16\sqrt{2}$ cm; E) 22 cm.

506. (9.) Једначина $\sqrt{x^2-6x+9}+2\sqrt{x^2+2x+1}=7$:

A) нема решења; B) има тачно једно решење; C) има тачно два решења; D) има тачно три решења; E) има бесконачно много решења.

507. (10.) Ако је $A=\dfrac{2^x+\frac{1}{2^x}}{2}$, $B=\dfrac{2^x-\frac{1}{2^x}}{2}$, $x\in\mathbf{N}$, тада је A^2-B^2 једнако:

A) 1; B) 0; C) $2^{2x}+\dfrac{1}{2^{2x}}$; D) -1; E) $2^{2x}-\dfrac{1}{2^{2x}}$.

508. (11.) Купа висине $H=12$ cm уписана је у лопту полупречника $r=8$ cm. Површина омотача те купе је:

A) $64\sqrt{3}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$; B) $32\sqrt{3}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$; C) $96\pi\,\mathrm{cm}^2$; D) $108\pi\,\mathrm{cm}^2$; E) $32\sqrt{6}\,\pi\,\mathrm{cm}^2$.

509. (12.) Последња цифра броја 7^{777} је:

A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) 9.

Тест VIII

510. (1.) Вредност израза a^2-b^2 за $a=-3$, $b=-\dfrac{1}{3}$ је:

A) $\dfrac{82}{9}$; B) $-\dfrac{80}{9}$; C) $\dfrac{80}{9}$; D) $-\dfrac{82}{9}$; E) 1.

511. (2.) Израз $\dfrac{1{,}2\cdot 5+4}{\frac{1}{7}+\frac{6}{7}\cdot 5}$ једнак је изразу

A) $\dfrac{70}{31}$; B) $\dfrac{310}{7}$; C) 2; D) 1; E) $\dfrac{31}{70}$.

512. (3.) Дата су тврђења:

(1): Периферијски угао круга два пута је већи од одговарајућег централног угла.

(2): Квадрат има четири осе симетрије.

(3): Висине сваког троугла секу се у тежишту тог троугла.

(4): У сваком троуглу разлика две странице је мања од треће.

Тачна су тврђења:

A) Само (1) и (2); B) (1), (2) и (3); C) само (2) и (4); D) (4); E) (1), (2) и (4).

513. (4.) Уместо $\dfrac{5}{9}$ неке своте новца, Иван је узео $\dfrac{11}{18}$ те своте. На овај начин Иван је узео:

A) 10% више; B) 10% мање; C) 12% више; D) 22,5% више; E) 12% мање.

514. (5.) Површина круга полупречника 3 cm подељена је двема концентричним кружним линијама на три једнака дела. Збир полупречника те две кружне линије је:

A) 5 cm; B) $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ cm; C) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ cm; D) $\dfrac{3}{2}+\sqrt{6}$ cm; E) 6 cm.

515. (6.) Која од следећих једнакости је тачна за све целе бројеве x?

A) $\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}-\sqrt{x}}=-\sqrt{2}$; B) $2^x-2^x\cdot 2=0$; C) $\sqrt{x^2-8x+16}=x-4$; D) $\dfrac{x^2}{x}=x$; E) $\dfrac{4^x}{2^x}=2^x$.

516. (7.) Решења неједначине $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-8x+16}>7$ су сви реални бројеви који припадају скупу:

A) $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$; B) $(5,+\infty)$; C) $(0,+\infty)$; D) $(-\infty,-2)$; E) $(-2,5)$.

517. (8.) Последња цифра броја 7777^{1993} је:

A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) 9.

518. (9.) Запремина купе је $\dfrac{8}{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$. Ако је површина омотача купе три пута већа од површине основе, тада је висина купе:

A) $H=4$ cm; B) $H=2\sqrt{2}$ cm; C) $H=\sqrt{2}$ cm; D) $H=4\sqrt{2}$ cm; E) $H=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ cm.

519. (10.) У једнакостранични троугао странице $a=3+2\sqrt{3}$ уписан је квадрат тако да му два темена припадају основици, а друга два крацима троугла. Површина тог квадрата је:

A) $21+12\sqrt{3}$; B) $\dfrac{1}{2}(21+12\sqrt{3})$; C) 9; D) $6\sqrt{3}$; E) $\dfrac{1}{3}(3+2\sqrt{3})^2$.

520. (11.) Ивица коцке је $a=2$ cm. Сваку дијагоналу коцке продужимо на обе стране за по 1 cm. Тако добијених осам тачака су темена нове коцке. Запремина те нове коцке је:

A) $8\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3\mathrm{cm}^3$; B) $32\,\mathrm{cm}^3$; C) $64\,\mathrm{cm}^3$; D) $8\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{3}\right)^3\mathrm{cm}^3$; E) $8\,\mathrm{cm}^3$.

521. (12.) Два радника, радећи истовремено, заврше један посао за пет дана. Ако би први радио два пута брже, а други два пута спорије, завршили би посао за четири дана. Само први радник би цео посао завршио за:

A) 9 дана; B) 10 дана; C) 11 дана; D) 12 дана; E) 15 дана.

Тест IX

522. (1.) Вредност израза $24:(-3)-(-50)\cdot(-2)+(-48):(-3)$ је:

A) 108; B) −92; C) −124; D) 92; E) 124.

523. (2.) Дужине дијагонала ромба су $d_1 = 1{,}6\,\mathrm{cm}$ и $d_2 = 3\,\mathrm{cm}$. Обим тог ромба је

A) 2,4 cm; B) 6,8 cm; C) 4,6 cm; D) $4{,}8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; E) 4,8 cm.

524. (3.) Дати су бројеви $x = 0{,}5$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0{,}50$, $u = \sqrt{2}$, $w = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Тачан је исказ:

A) $x = y = z < w < u$; B) $x = y < z < w < u$; C) $w < y \leqslant x = z < u$; D) $y = x < w < z < u$; E) $x \leqslant y \leqslant z \leqslant u \leqslant w$.

525. (4.) Израз $\frac{5x-1}{4} - \frac{5x+1}{3} - \frac{3x-13}{6}$ идентички је једнак изразу:

A) $\frac{-11x+27}{12}$; B) $\frac{-11x-33}{12}$; C) $\frac{-11x+19}{12}$; D) $19-11x$; E) $-11x-33$.

526. (5.) У круг пречника 4 cm уписан је једнакостранични троугао. Површина тог троугла је:

A) $3\,\mathrm{cm}^2$; B) $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; C) $\frac{3}{4}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}^2$; E) $3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

527. (6.) Површина једног круга је $81\pi\,\mathrm{cm}^2$. Централном углу од 20° тог круга одговара лук дужине:

A) 1 cm; B) 2π cm; C) π cm; D) $\frac{\pi}{2}$ cm; E) 4π cm.

528. (7.) Највећа вредност израза $\frac{1}{x^2-4x+5}$ је:

A) 1; B) 2; C) $\frac{1}{5}$; D) $\frac{1}{2}$; E) 0.

529. (8.) Цена једног производа снижена је за 50%. За колико процената треба нову цену подићи да би се добила првобитна?

A) 100%; B) 50%; C) 25%; D) 66,66%; E) 75%.

530. (9.) Једначина $|x-1| + |x+2| = 1$ има

A) тачно једно решење; B) тачно два решења; C) тачно три решења; D) бесконачно много решења; E) нема решења.

531. (10.) Решења неједначине $\frac{x-1}{2x-6} < 1$ су сви реални бројеви x за које важи:

A) $x > 5$; B) $x \in (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$; C) $x < 3$; D) $3 < x < 5$; E) $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

532. (11.) На колико начина се износ од 270 динара може исплатити новчаницама од 10, 20 и 50 динара?

A) 14; B) 22; C) 36; D) 48; E) 60.

533. (12.) Површина једнакокраког трапеза висине 5 cm чија је дијагонала 13 cm износи

A) $\frac{65}{4}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; B) $65\,\mathrm{cm}^2$; C) $40\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; D) $60\,\mathrm{cm}^2$; E) $\frac{169}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Тест X

534. (1.) Израз $6a^3 \cdot 3a^2 - 5a \cdot a^4$ идентички је једнак изразу:

A) $18a^6 - 5a^4$; B) 13; C) $13a^5$; D) $18a^6 - 5a^5$; E) $13a^6$.

535. (2.) Израз $\frac{p-q}{q-p}$ $(p \neq q)$ идентички је једнак изразу:

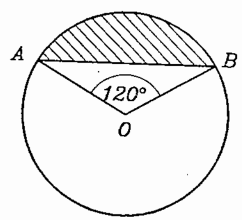
A) 1; B) −1; C) $\frac{p-q}{p+q}$; D) $\frac{q+p}{q-p}$; E) 0.

536. (3.) Углови једног четвороугла се односе као $1:2:3:4$. Тада је тај четвороугао:

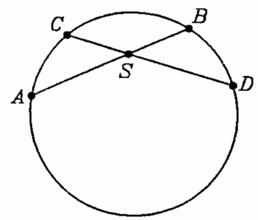
A) делтоид; B) трапез; C) паралелограм; D) конкавни четвороугао; E) тетивни четвороугао.

537. (4.) Збир дужина свих ивица правилне једнакоивичне тростране пирамиде је 12 cm. Површина пирамиде је:

A) $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; B) $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; C) $4\,\mathrm{cm}^2$; D) $12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; E) $16\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.



Сл. уз зад. 538



Сл. уз зад. 540

538. (5.) Ако је $AB = 6$, површина фигуре осенчене на слици је:

A) $\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$; B) $4\pi - 3\sqrt{3}$; C) $3\pi - \frac{9}{4}\sqrt{3}$; D) $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$; E) $\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3}$.

539. (6.) Ако је $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, тада је $f(3)$ једнако:

A) 6,25; B) 7,35; C) 4; D) 9; E) 5,15.

540. (7.) Дужина дужи SD на слици је ($AS = 4$, $SB = 9$, $CS = 3$):

A) $\frac{4}{3}$; B) $\frac{8}{3}$; C) 6; D) 10; E) 12.

541. (8.) Основа четворостране пирамиде је правоугаоник страница 18 cm и 10 cm. Висина пирамиде је $H = 12$ cm, а подножје висине је пресек дијагонала основе. Површина пирамиде је:

A) $580\,\text{cm}^2$; B) $600\,\text{cm}^2$; C) $564\,\text{cm}^2$; D) $544\,\text{cm}^2$; E) $1032\,\text{cm}^2$.

542. (9.) Иван је добио новац да заједно са тројицом другова купе фудбал, тако што ће цену поделити на једнаке делове. У међувремену се појавио и Марко, па су сада цену фудбала поделили на пет једнаких делова. Колико процената добијеног новца је Иван на овај начин уштедео?

A) 20%; B) 10%; C) 5%; D) 15%; E) 8%.

543. (10.) Графици функција $y = x + 1$ и $y = 3x - 9$ и делови x-осе и y-осе одређују у првом квадранту координатног система четвороугао. Површина тог четвороугла је:

A) $\frac{23}{2}$; B) 23; C) 15; D) 12; E) $\frac{25}{2}$.

544. (11.) Тетиве AB и AC круга k су једнаке, а тетива AD сече BC у тачки E. Ако је $AC = 12$ и $AE = 8$, тада је AD једнако:

A) 16; B) $12\sqrt{2}$; C) 17; D) 18; E) $12\sqrt{3}$.

545. (12.) Колико има једнакокраких троуглова чије су странице целобројне, а обим једнак 30 cm?

A) 7; B) 10; C) 14; D) 5; E) 1.

Тест XI

546. (1.) Нека је

$$A = \frac{(3{,}4 - 1{,}275)\cdot\frac{16}{17}}{\frac{5}{18}\cdot\left(1\frac{7}{85} + 6\frac{2}{17}\right)} + 0{,}5\cdot\left(2 + \frac{12{,}5}{5{,}75 + \frac{1}{2}}\right).$$

Тада је:

A) $A \leqslant 0$; B) $0 < A \leqslant 2$; C) $2 < A \leqslant 3$; D) $3 < A \leqslant 5$; E) $A > 5$.

547. (2.) Дати су изрази $a = 3\sqrt{5}$ и $b = 5\sqrt{3}$. Тачан је исказ:

A) $a < b$; B) $a^2 = b^2$; C) $a > b$; D) $a^2 - b^2 = 30$; E) $a - b = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

548. (3.) У полукруг полупречника r уписан је највећи могући једнакостранични троугао тако да му је основица на пречнику, а врх на луку полукруга. Тада је однос површина полукруга и троугла једнак:

A) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$; B) $\frac{2\pi}{3}$; C) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$; E) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$.

549. (4.) У школском оркестру девојчица има више од 40% а мање од 50%. Колико најмање чланова може бити у оркестру?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 9; E) 11.

550. (5.) Основа правилне четворостране пирамиде је квадрат око кога је описан круг полупречника 2, а бочне стране су једнакостранични троуглови. Површина те пирамиде је:

A) $8 + 4\sqrt{3}$; B) $4 + 8\sqrt{3}$; C) $4(1+\sqrt{3})$; D) $8(1+\sqrt{3})$; E) $8 + 6\sqrt{3}$.

551. (6.) Дате су једначине:

$$\text{(I) } (\sqrt{x+1})^2 = 2; \qquad \text{(II) } x + 1 = 2;$$
$$\text{(III) } \sqrt{(x+1)^2} = 2; \qquad \text{(IV) } |x+1| = 2.$$

Тачан је исказ:

A) Све једначине су међусобно еквивалентне.

B) Еквивалентне су прва, трећа и четврта, а није им еквивалентна друга једначина.

C) Међусобно су еквивалентне само трећа и четврта једначина.

D) Међусобно су еквивалентне прва и друга, а такође и међусобно трећа и четврта једначина, али прва и трећа нису еквивалентне.

E) Међу датим једначинама нема еквивалентних.

552. (7.) Колико има природних бројева n за које је израз $\frac{n^2 - n - 12}{n - 3}$ такође природан број?

A) Мање од 5; B) 5; C) 6; D) 8; E) бесконачно много.

553. (8.) Која је стота цифра иза децималног зареза броја $\sqrt{0{,}\underbrace{99\ldots99}_{100}}$?

A) 0; B) 1; C) 3; D) 8; E) 9.

554. (9.) Димензије квадра су 2 cm, 3 cm и 6 cm. Нека је a дужина ивице (у центиметрима) такве коцке да се запремине ова два тела односе као и њихове површине. Тачан је исказ:

A) $a \leqslant 2$; B) $2 < a \leqslant 3$; C) $3 < a \leqslant 4$; D) $4 < a \leqslant 5$; E) $a > 5$.

555. (10.) Иван и Марко заједно имају 44 године. Иван има два пута више година него што је имао Марко када је Ивану било упола толико година колико ће имати Марко када Иван буде имао три пута више година него што је имао Марко. Збир цифара Иванових година је:

A) 6; B) 7; C) 8; D) 9; E) 10.

556. (11.) Колико има петоцифрених бројева, дељивих са 15, написаних цифрама 0, 1, 2, 3, 4, 5 тако да се цифре не понављају?

A) 108; B) 72; C) 33; D) 132; E) 66.

557. (12.) У правоуглом трапезу $ABCD$ код кога се дијагонале AC и BD секу под правим углом, основице су $AB = 9\,\mathrm{cm}$ и $CD = 4\,\mathrm{cm}$. Висина овог трапеза има дужину:

A) $6{,}5\,\mathrm{cm}$; B) $6\,\mathrm{cm}$; C) $4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$; D) $\frac{72}{13}\,\mathrm{cm}$; E) $4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$.

Тест XII

558. (1.) Решење једначине $x-(2x-(3x-(4x-5)))=1$ је број

A) 0; B) 2; C) $\frac{3}{4}$; D) 3; E) 1.

559. (2.) Колико има четвороцифрених природних бројева са различитим цифрама написаних цифрама 2, 4, 6, 8?

A) 24; B) 12; C) 10; D) 48; E) 18.

560. (3.) У школи има 50 наставника. Њих 29 пије кафу, 28 пије чај, а њих 16 и кафу и чај. Колико их има који не пију ни кафу ни чај?

A) 8; B) 11; C) 12; D) 13; E) 9.

561. (4.) Израз $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}$ једнак је изразу $2x$ ако и само ако је:

A) $x \geqslant 1$; B) $x \leqslant -1$; C) $-1 \leqslant x \leqslant 1$; D) $x \in \mathbf{R}$; E) ни за једно $x \in \mathbf{R}$.

562. (5.) Дужина квадра смањи се за 10%, ширина за 20%, а висина за 30%. За колико процената се смањила запремина?

A) 20%; B) 49,6%; C) 60%; D) 50,4%; E) 48,4%.

563. (6.) У кругу су дате две међусобно нормалне тетиве. Свака од њих дели ону другу на дужи дужина $3\,\mathrm{cm}$ и $7\,\mathrm{cm}$. Одстојање средишта круга од пресечне тачке ових тетива је:

A) $2\,\mathrm{cm}$; B) $2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; C) $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$; D) $\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$; E) $3\,\mathrm{cm}$.

564. (7.) Дата је коцка ивице a, чије је једно теме тачка A. Површина пирамиде чији је врх A, а ивице су оне три ивице коцке које полазе из тачке A је:

A) $3a^2$; B) $2a^2$; C) $\frac{3a^2}{2}$; D) $\frac{a^2}{2}(3+\sqrt{3})$; E) $\frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+3)$.

565. (8.) Базен се пуни трима цевима. Прва цев напуни базен за 6 часова, друга за 8, а трећа за 12 часова. Ако истовремено пуне базен све три цеви, за колико часова ће се испунити $\frac{3}{4}$ базена?

A) 1h; B) $1\frac{1}{2}$ h; C) $1\frac{3}{4}$ h; D) 2h; E) више од 2 часа.

566. (9.) Два супротна унутрашња угла четвороугла су $\alpha = 50^\circ$ и $\gamma = 110^\circ$. Оштар угао који граде симетрале друга два угла тог четвороугла је:

A) 20°; B) 24°; C) 30°; D) 32°; E) 36°.

567. (10.) Дужина једне катете правоуглог троугла је $21\,\mathrm{cm}$, а дужине друге катете и хипотенузе су цели бројеви. Оваквих троуглова има:

A) ниједан; B) један; C) два; D) три; E) више од три.

568. (11.) Воз дуг 110 метара, крећући се брзином од $\frac{25}{3}\,\mathrm{m/s}$, сустиже пешака у 9^{10} h и пролази га за време од 15 секунди. У 9^{16} h воз је сусрео другог пешака и мимоишао се са њим за 12 секунди. Пешаци су се срели између:

A) 9^{15} h и 9^{25} h; B) 9^{25} h и 9^{30} h; C) 9^{30} h и 9^{35} h; D) 9^{35} h и 9^{40} h; E) после 9^{40} h.

569. (12.) Три једнаке лопте полупречника r леже на равном столу и међусобно се додирују. Четврта лопта истог полупречника постављена је на прве три тако да их све додирује. Одстојање најудаљеније тачке четврте лопте од равни стола је:

A) $4r$; B) $3r$; C) $3{,}5r$; D) $r(2+\sqrt{3})$; E) $2r\left(1+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Тест XIII

570. (1.) Растојање пресечне тачке правих $x+y-2=5$ и $x-y=1$ од координатног почетка је:

A) 7; B) 5; C) 3; D) 2; E) 1.

571. (2.) Цена неке робе је снижена за 10%, а затим још за 15%. Колико процената је снижена првобитна цена након ова два снижења?

A) 25%; B) 23%; C) 22,5%; D) 23,5%; E) 24%.

572. (3.) Квадрат и једнакостранични троугао имају једнаке обиме. Висина троугла је $3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Површина квадрата (у cm^2) је:

A) $\frac{27}{4}$; B) 20; C) 10; D) 16; E) $\frac{81}{4}$.

573. (4.) За нумерацију страница једне књиге употребљене су 2322 цифре. Колико та књига има страница?

A) 690; B) 710; C) 790; D) 800; E) 810.

574. (5.) Именилац једног разломка је за пет већи од бројиоца. Ако се бројиоцу дода 14, а имениоцу одузме 1, добија се разломак који је једнак реципрочној вредности првог разломка. Збир бројиоца и имениоца првог разломка је:

A) 10; B) 11; C) 12; D) 13; E) 14.

575. (6.) Вредност израза $\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{4}{5}}$ једнака је:

A) $\frac{\sqrt{5}}{10}$; B) $-\frac{\sqrt{5}}{10}$; C) 1; D) $\frac{\sqrt{-5}}{10}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

576. (7.) Квадрат странице a ротира око једне своје дијагонале. Површина добијеног тела је:

A) $a^2\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$; B) $a^2\pi\sqrt{2}$; C) $2a^2\pi\sqrt{2}$; D) $a^2\pi(1+\sqrt{2})$; E) $\frac{a^2\pi\sqrt{2}}{2}$.

577. (8.) Хипотенуза правоуглог троугла је 40 cm. Из средишта хипотенузе конструисана је нормала на хипотенузу до пресека са дужом катетом. Дужина ове нормале је 15 cm. Разлика дужина катета овог троугла је:

A) 8 cm; B) 7 cm; C) 7,5 cm; D) 9 cm; E) 10 cm.

578. (9.) Шестоцифрен број почиње цифром 1. Ако ту цифру пребацимо са првог на последње место, добићемо број који је три пута већи од полазног. Збир цифара полазног броја је:

A) 23; B) 24; C) 25; D) 26; E) 27.

579. (10.) Површина основе ABC тростране пирамиде $SABC$ код које је $SA = SB = SC = 1$, $\angle ASB = 60°$, $\angle ASC = 90°$, $\angle BSC = 120°$ је:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}^2$; B) $1\,\text{cm}^2$; C) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}^2$; D) $\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; E) $\frac{\sqrt{3}}{4}\,\text{cm}^2$.

580. (11.) Нину, Марију, Ивана и Марка треба распоредити на четири нумерисана седишта једне клупе тако да никоје две особе истог пола не седе једна до друге. То се може учинити на следећи број начина:

A) 2; B) 4; C) 8; D) 16; E) 24.

581. (12.) Колико целобројних решења има неједначина

$$\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{x^2-8x+16}\leqslant 7\,?$$

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

Тест XIV

582. (1.) Израз $\sqrt{4+\frac{9}{4}}-\sqrt{\frac{1}{1/25}}$ има вредност:

A) $-\frac{3}{2}$; B) $-\frac{5}{2}$; C) $\frac{21}{10}$; D) $\frac{15}{2}$; E) 0.

583. (2.) Колико има бројева облика $\overline{2a5b}$ (a, b – цифре) дељивих са 9?

A) 8; B) 9; C) 10; D) 11; E) 12.

584. (3.) Нека је $ABCD$ једнакокраки трапез ($AB \parallel CD$). Тачан је исказ:

A) $AB = CD$; B) дијагонале AC и BD су међусобно нормалне; C) дијагонале AC и BD су међусобно једнаке; D) $AB > CD$; E) у трапез $ABCD$ се може уписати круг.

585. (4.) Однос површина основе и омотача једнакостраничне купе (тј. купе код које је изводница једнака пречнику основе) је:

A) $2:1$; B) $1:2$; C) $1:3$; D) $1:\sqrt{2}$; E) $1:2\sqrt{2}$.

586. (5.) Како се промени запремина квадра ако му се дужина повећа за 10%, ширина смањи за 10%, а висина се не мења?

A) Повећа се за 1%; B) смањи се за 1%; C) не мења се; D) повећа се за више од 2%; E) смањи се за више од 2%.

587. (6.) Израз $2^{n-1}+2^n+2^{n+1}$ ($n \in \mathrm{N}$) идентички је једнак изразу:

A) $3\cdot 2^n$; B) $7\cdot 2^{n-1}$; C) 2^{3n}; D) $3\cdot 2^{3n}$; E) $2^{n+2}-1$.

588. (7.) У троуглу ABC странице су: $a = 12\,\text{cm}$ и $b = 6\,\text{cm}$, а угао захваћен тим страницама је 120°. Ако симетрала датог угла ACB сече страницу AB у тачки D, дужина дужи CD је:

A) 4 cm; B) $3\sqrt{3}$ cm; C) $6\sqrt{3}$ cm; D) $\frac{9}{2}$ cm; E) $\frac{9}{4}\sqrt{3}$ cm.

589. (8.) Скуп решења неједначине $\frac{2}{x-4} > 1$ је:

A) $(-\infty, 6)$; B) $(-\infty,4)\cup(4,6)$; C) $(-\infty,4)\cup(6,+\infty)$; D) $(4,6)$; E) $(4,+\infty)$.

590. (9.) Колико има петоцифрених бројева код којих је производ цифара 4?

A) Мање од 10; B) 11; C) 12; D) 13; E) више од 13.

591. (10.) Тетива једног круга је дужине $2a$, а висина одговарајућег кружног одсечка је h. Пречник тог круга је:

A) $\frac{a^2+h^2}{h}$; B) $2\sqrt{ah}$; C) $a+h$; D) $\sqrt{a^2+h^2}$; E) $2\sqrt{a^2+h^2}$.

592. (11.) Колико има уређених парова (x, y) целих бројева за које важи $3x^2+5=y^2$?

A) Бесконачно много; B) три; C) два; D) један; E) ниједан.

593. (12.) Шестина од укупне количине неке робе продата је са зарадом од 20%, а половина укупне количине исте робе продата је са губитком од 10%. Са колико процената зараде треба продати остатак робе да би се покрио губитак?

A) 3%; B) 4%; C) 5%; D) 8%; E) 10%.

Тест XV

594. (1.) Ако је $\frac{3}{a}=\frac{4}{b}=\frac{12}{c}=13$, тада је $a^2+b^2+c^2$ једнако:

A) 12; B) 14; C) 1; D) $\frac{15}{13}$; E) ниједан од претходних резултата.

595. (2.) Вредност израза $5^{2^5}:5^{5^2}$ је:

A) 1; B) 5^5; C) 5^2; D) 5^7; E) 5^{2^2}.

596. (3.) Правилна пирамида је пирамида код које:

A) основа је правилни многоугао;

B) подножје висине је центар описаног круга основе;

C) основа је правилан многоугао и све бочне ивице су једнаке основним ивицама;

D) основа пирамиде је многоугао чије су све странице једнаке;

E) основа пирамиде је правилан многоугао и подножје висине је средиште тог многоугла.

597. (4.) Око круга је описан и у круг је уписан правилни шестоугао. Ако је полупречник тог круга r, тада је разлика површина тих шестоуглова:

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}r^2$; B) $\sqrt{3}r^2$; C) $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$; D) $r^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; E) $r^2\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

598. (5.) Омотач купе развијен у равни чини кружни исечак са централним углом 120° полупречника $r_1=1{,}5$. Запремина те купе је:

A) $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$; B) $\frac{\pi\sqrt{2}}{12}$; C) $\frac{9\pi\sqrt{2}}{4}$; D) $\frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$; E) $\frac{\pi\sqrt{2}}{9}$.

599. (6.) Вредност параметра m за коју су решења једначина

$$\frac{x+3}{x-1}=m \quad \text{и} \quad m(1-x)=2(x+2)$$

једнака припада интервалу:

A) $(-\infty,-1]$; B) $(-1,0]$; C) $(0,1]$; D) $(1,2]$; E) $(2,+\infty)$.

600. (7.) Полупречник круга описаног око правилног 12-тоугла је $r=12\,\mathrm{cm}$. Површина тог дванаестоугла је:

A) $432\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; B) $864\,\mathrm{cm}^2$; C) $144\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$; D) $432\,\mathrm{cm}^2$; E) $288\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

601. (8.) У магацину је било 1000 kg јагода које садрже 92% воде. После извесног времена количина воде се смањила на 90%. Маса јагода је после овога:

A) 940 kg; B) 900 kg; C) 880 kg; D) 840 kg; E) 800 kg.

602. (9.) Вредност израза $\sqrt{\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)^2}$ је:

A) $-2\sqrt{2}$; B) $2\sqrt{2}$; C) 3; D) $3-2\sqrt{3}$; E) -3.

603. (10.) Колико има простих бројева p који се могу написати у облику n^4+4, где је n природан број?

A) Један; B) два; C) три; D) четири; E) више од четири.

604. (11.) Кроз теме B паралелограма $ABCD$ конструисана је права p која сече AC и AD у тачкама F и E тако да је $AE=\frac{1}{4}AD$. Однос дужи AF и AC је:

A) $1:4$; B) $1:5$; C) $1:2\sqrt{2}$; D) $1:6$; E) $1:8$.

605. (12.) Збир цифара најмањег шестоцифреног броја чије су цифре различите и који је дељив са 11 је:

A) 14; B) 16; C) 18; D) 20; E) 22.

Тест XVI

606. (1.) Нека је $\overline{172xy}$ број дељив са 45, при чему су x и y цифре. Оваквих бројева има:

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) више од 5.

607. (2.) Вредност израза $\frac{2^{n+3}\cdot 2^{3n+5}}{2^{4n+4}}$ је:

A) $2^{\frac{(n+3)(3n+5)}{4n+4}}$; B) $2^{(n+3)(3n+5)-(4n+4)}$; C) $2^{\frac{n+2}{n+1}}$; D) 2^{4n+2}; E) не зависи од n.

608. (3.) Ако је d дијагонала стране коцке, тада је запремина коцке:

A) $\frac{d^3}{2}$; B) $2d^3$; C) $\frac{d^3}{\sqrt{2}}$; D) $\frac{d^3\sqrt{2}}{4}$; E) $\frac{d^3}{4}$.

609. (4.) Колико има троцифрених бројева чије су све цифре парне? (Нула је парна цифра.)

A) 100; B) 120; C) 125; D) 450; E) 250.

610. (5.) Просторна дијагонала правилне четворостране призме је према равни основе нагнута под углом 60°. Ако је дијагонала основе $d=3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, тада је површина призме:

A) $18(1+\sqrt{6})\,\mathrm{cm}^2$; B) $18+72\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$; C) $54\,\mathrm{cm}^2$; D) $36(1+\sqrt{6})\,\mathrm{cm}^2$; E) $18(1+2\sqrt{6})\,\mathrm{cm}^2$.

611. (6.) Два полупречника OA и OB круга граде угао од 60°. У тачки A конструисана је нормала AN на тангенту круга конструисану у тачки B. Ако је полупречник круга $r=6\,\mathrm{cm}$, тада је површина између нормале AN, тангенте BN и лука AB једнака (у cm^2):

A) $9\sqrt{3}-4\pi$; B) $\frac{2}{3}(8\sqrt{3}-3\pi)$; C) $\frac{5}{2}(9\sqrt{3}-4\pi)$; D) $\frac{3}{2}(15\sqrt{3}-4\pi)$; E) $\frac{3}{2}(9\sqrt{3}-4\pi)$.

612. (7.) Када се ивица коцке увећа за 1 cm, добија се нова коцка чија је површина за $78\,\text{cm}^2$ већа од површине прве коцке. За колико се разликују запремине ових коцки?

A) $135\,\text{cm}^3$; B) $91\,\text{cm}^3$; C) $101\,\text{cm}^3$; D) $89\,\text{cm}^3$; E) $127\,\text{cm}^3$.

613. (8.) 21 радник радећи дневно по 8 h за 6 дана изради 720 производа. За колико ће дана 28 радника радећи по 7 h дневно израдити 1260 производа?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) 9.

614. (9.) Колико треба узети литара 90%-ног алкохола и колико литара 60%-ног алокохола да би се добила смеша од 50 l 72%-ног алкохола?

A) 35 l и 15 l; B) 25 l и 25 l; C) 28 l и 22 l; D) 20 l и 30 l; E) 18 l и 32 l.

615. (10.) Укупна маса посуде напуњене водом је 2000 g (посуда заједно са водом). Ако одлијемо 20% воде, укупна маса се смањи на 88% првобитне масе. За масу m празне посуде важи:

A) $m < 700\,\text{g}$; B) $700\,\text{g} \leqslant m < 750\,\text{g}$; C) $750\,\text{g} \leqslant m < 800\,\text{g}$;
D) $800\,\text{g} \leqslant m < 850\,\text{g}$; E) $m \geqslant 850\,\text{g}$.

616. (11.) Колико има простих бројева p таквих да су и бројеви $p+20$ и $p+28$ прости?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од три.

617. (12.) Основа пирамиде је паралелограм чије су странице 5 cm и 4 cm, а једна дијагонала 3 cm. Подножје висине пирамиде је пресек дијагонала основе, а дужина висине је 2 cm. Површина ове пирамиде је:

A) $22+\sqrt{136}\,\text{cm}^2$; B) $17+\sqrt{136}\,\text{cm}^2$; C) $\frac{100}{3}\,\text{cm}^2$; D) $33\,\text{cm}^2$;
E) $12+15\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.

Тест XVII

618. (1.) Вредност израза $\frac{(a^2b^3)^2}{ab^4}\cdot\frac{a^3b}{(a^2b^4)^3}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, је:

A) $\frac{1}{a^2b^{58}}$; B) не зависи од a; C) не зависи од b; D) $\frac{a^6}{b^{42}}$; E) $\frac{1}{a^2b^{42}}$.

619. (2.) Дате су реченице:

(I) У сваку пирамиду се може уписати сфера.
(II) Око сваке пирамиде се може описати сфера.
(III) Ако се у пирамиду може уписати и око ње описати сфера, онда је пирамида правилна.

Тачне су реченице:

A) само (I); B) само (II); C) само (I) и (II); D) ниједна; E) само (III).

620. (3.) Вредност израза $(x+1)^2-\frac{(2x-1)^2}{4}$ за $x=-\frac{1}{4}$ је:

A) 0; B) 1; C) 4; D) -4; E) -1.

621. (4.) У правилну тространу призму уписана је лопта која додирује све стране призме. Однос површина лопте и призме је:

A) $2\pi\sqrt{3}:9$; B) $2\pi:9\sqrt{3}$; C) $8\pi:9\sqrt{3}$; D) $\pi\sqrt{3}:18$; E) $\pi:\sqrt{3}$.

622. (5.) Збир свих целобројних решења неједначине $|x| < -\frac{x}{2}+1$ је:

A) 1; B) -2; C) -1; D) 0; E) -3.

623. (6.) Колико целобројних решења има једначина $x^2=3y+2$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

624. (7.) Влажност пшенице је 16%. После сушења 2000 kg зрна је смањило масу за 200 kg. Влажност зрна после сушења је:

A) 5%; B) $5\frac{1}{3}\%$; C) 15%; D) 6%; E) $6\frac{2}{3}\%$.

625. (8.) Дати су бројеви: $a=\sqrt{2}+1$, $b=(\sqrt{3})^3$, $c=(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$, $d=\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$, $e=\sqrt{5}-\sqrt{3}$. Колико је међу њима рационалних?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

626. (9.) Правоугаони лист хартије димензија 16 cm и 12 cm пресавије се тако да се два супротна темена поклопе. Израчунати дужину дужи по којој је папир преклопљен.

A) 15 cm; B) 14 cm; C) 16 cm; D) $10\sqrt{2}\,\text{cm}$; E) $8\sqrt{3}\,\text{cm}$.

627. (10.) Од три ученика осмог, три ученика седмог и два ученика шестог разреда треба изабрати неколико ученика, али тако да буде изабран бар по један ученик сваког разреда. На колико начина се може извршити избор?

A) 384; B) 18; C) 324; D) 187; E) 147.

628. (11.) Колико има шестоцифрених природних бројева $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ за које важи

$$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}\cdot 4=\overline{a_6a_1a_2a_3a_4a_5}\ ?$$

A) ниједан; B) један; C) два; D) три; E) више од три.

629. (12.) Нека је AB тетива датог круга полупречника 5 cm и D подножје нормале из A на тангенту круга у тачки B. Тада је $\frac{AB^2}{AD}$ једнако:

A) $5\sqrt{2}\,\text{cm}$; B) 10 cm; C) $5\sqrt{3}\,\text{cm}$; D) $5(1+\sqrt{2})\,\text{cm}$; E) 7,5 cm.

Тест XVIII

630. (1.) Цена књиге снижена је за 20%, а затим за 10% и сада износи 108 динара. Колика је цена била пре првог снижења?

A) 150; B) 155; C) $154\frac{2}{7}$; D) 160; E) 145 динара.

631. (2.) Један пољопривредник може да окопа њиву за 27 дана. Ако му помогне његова жена, онда ће ту њиву заједно окопати за 18 дана. Колико је дана потребно његовој жени да сама окопа њиву?

A) 9; B) 42; C) 54; D) 27; E) 63.

632. (3.) Вредност израза $3\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{75}-\sqrt{108}$ је:

A) $-2\sqrt{3}$; B) $2\sqrt{3}$; C) $-4\sqrt{3}$; D) 0; E) $9\sqrt{3}-\sqrt{183}$.

633. (4.) Површина оног дела круга полупречника r који се налази ван у њега уписаног једнакостраничног троугла је:

A) $(\pi-3)r^2$; B) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)r^2$; C) $\left(2\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)r^2$; D) $\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)r^2$; E) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)r^2$.

634. (5.) Спољашњи углови троугла односе се као $5:6:7$. Тада је средњи по величини унутрашњи угао тог троугла једнак:

A) 75°; B) 70°; C) 60°; D) 55°; E) 50°.

635. (6.) Аутомобил прелази раздаљину између два града за 10 сати. Ако би возио 20 km/h спорије, пут би прешао за 5 сати више. Удаљеност тих градова је:

A) 560 km; B) 600 km; C) 480 km; D) 700 km; E) 640 km.

636. (7.) Спољашњи угао код темена C једнакокраког троугла ABC ($AC=BC$) је 80°. Угао између висине и симетрале угла које полазе из темена A је:

A) 24°; B) 25°; C) 30°; D) 40°; E) 50°.

637. (8.) Колико има бројева облика $\overline{x5225y}$ (x, y – цифре) дељивих са 33 ?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) више од 4.

638. (9.) У једнакокраком троуглу центар уписаног круга дели висину која одговара основици у размери $5:3$. Ако је крак 40 cm, дужина основице тог троугла је:

A) 48 cm; B) 40 cm; C) 64 cm; D) 24 cm; E) 50 cm.

639. (10.) Једну ливаду попасе 40 крава за 50 дана. На истој ливади би 60 крава могло пасти 30 дана. Колико крава попасе ливаду за 75 дана?

A) 28; B) 30; C) 32; D) 25; E) 40.

640. (11.) Камион је возећи низбрдо ишао брзином 60 km/h. На истој релацији је возећи узбрдо ишао брзином 40 km/h. Којом је средњом брзином возио камион?

A) 46 km/h; B) 48 km/h; C) 50 km/h; D) 52 km/h; E) 54 km/h.

641. (12.) Дат је круг и ван њега тачка M. Кроз M конструисане су сечице s_1 и s_2 које секу дати круг у тачкама A и B, односно C и D, тако да је тачка A између тачака M и B, а C између M и D. Ако је $MA=3\,\mathrm{cm}$, $MB=8\,\mathrm{cm}$ и $MC=4\,\mathrm{cm}$, дужина дужи CD је:

A) 3 cm; B) $\sqrt{3}$ cm; C) $\frac{20}{3}$ cm; D) 2.5 cm; E) 2 cm.

Тест XIX

642. (1.) Вредност израза $(5+2\cdot 2^8+2^{48}:2^{18}):(5+2^{12}:2^3+(2^5)^6)$ је:

A) 5; B) 2; C) $\frac{1}{2}$; D) 1; E) 10.

643. (2.) Износ од 1650 динара подељен је на три дела тако да је други део 2/3 првог дела, а трећи 3/8 збира првог и другог дела. Тада је први део (у динарима):

A) 700; B) 680; C) 720; D) 750; E) 800.

644. (3.) У круг полупречника $r=3\,\mathrm{cm}$ уписан је правилан шестоугао, а затим је у шестоугао уписан круг. Површина кружног прстена између ова два круга је:

A) $\frac{9\pi}{4}\,\mathrm{cm}^2$; B) $\frac{9\pi}{2}\,\mathrm{cm}^2$; C) $\frac{27\pi}{4}\,\mathrm{cm}^2$; D) $\frac{63\pi}{4}\,\mathrm{cm}^2$; E) $\frac{27\pi}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

645. (4.) Базен се пуни кроз две цеви. Једна га сама напуни за 20 сати, а обе заједно за 12 сати. За колико сати се базен напуни ако га прва цев пуни, а друга празни?

A) 30; B) 45; C) 50; D) 54; E) 60.

646. (5.) Запремина квадра чија је једна дијагонала основе $d_1=6\,\mathrm{cm}$, угао који она гради са другом дијагоналом основе је 60°, а угао који она гради са дијагоналом квадра је 30°, износи:

A) $27\,\mathrm{cm}^3$; B) $54\,\mathrm{cm}^3$; C) $27\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$; D) $54\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3$; E) $108\,\mathrm{cm}^3$.

647. (6.) Колико целих бројева x задовољава систем неједначина

$$1-\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}>5x,\qquad \frac{x}{6}-\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<10\ ?$$

A) мање од 15; B) 15; C) 16; D) 17; E) више од 17.

648. (7.) Једна страница троугла је $c=56\,\mathrm{cm}$, одговарајућа висина $h_c=15\,\mathrm{cm}$ и тежишна дуж $t_c=17\,\mathrm{cm}$. Дужина најкраће странице тог троугла је (у cm):

A) 39; B) 24; C) $20\sqrt{2}$; D) 30; E) 25.

649. (8.) Једначина $\sqrt{4x^2-4x+1}-|3x-2|-3x+1=2$ има:

А) једно, негативно; B) једно, позитивно; C) два; D) три; E) четири решења.

650. (9.) У правоуглом троуглу тежишне дужи које одговарају катетама имају дужине $\sqrt{156}$ cm и $\sqrt{89}$ cm. Дужина хипотенузе тог троугла је:

А) 14 cm; B) $\sqrt{245}$ cm; C) $\frac{28}{3}$ cm; D) $\sqrt{290}$ cm; E) $8\sqrt{3}$ cm.

651. (10.) Дат је низ бројева: 1, 11, 111, 1111, 11111, … . Тачан је исказ:

А) у овом низу нема бројева који су потпуни квадрати;
B) у овом низу потпун квадрат је сваки једанаести члан;
C) у овом низу потпун квдрат је сваки двадесетдруги члан;
D) у овом низу потпун квадрат је сваки стодвадесетпрви члан;
E) у овом низу постоји тачно један број који је потпун квадрат.

652. (11.) У кружни исечак круга полупречника 6 cm уписан је круг који додирује полупречнике и лук тог исечка. Ако је тетива која одговара том исечку 4 cm, полупречник уписаног круга је:

А) 2 cm; B) $\sqrt{2}$ cm; C) $\sqrt{3}$ cm; D) 1.5 cm; E) $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ cm.

653. (12.) У праву купу висине 8 cm и изводнице 10 cm уписан је ваљак тако да је површина омотача тог ваљка једнака површини омотача купе изнад ваљка. Висина тог ваљка је:

А) 3 cm; B) $2\sqrt{2}$ cm; C) $\frac{40}{13}$ cm; D) $\frac{40}{9}$ cm; E) $\frac{20}{13}$ cm.

Тест XX

654. (1.) Ако је $x=\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$, онда:

А) $x\in(-\infty,0)$; B) $x\in[0,2)$; C) $x\in[2,3)$; D) $x\in[3,4)$; E) $x\in[4,+\infty)$.

655. (2.) Израз $\sqrt{\dfrac{x^2\cdot(x^3)^4}{x^4}}$ $(x>0)$ једнак је изразу:

А) $x^{\sqrt{10}}$; B) x^3; C) x; D) x^4; E) x^5.

656. (3.) Хипотенуза једнакокрако-правоуглог троугла је $c=3\sqrt{2}$ cm. Површина тог троугла (у cm^2) је:

А) $\frac{9}{2}$; B) 9; C) $\frac{9}{4}$; D) $\frac{9\sqrt{2}}{2}$; E) $\sqrt{3}$.

657. (4.) Ромб се састоји из два једнакостранична троугла. Ако је дужа дијагонала $d_1=\sqrt{48}$ cm, тада је краћа дијагонала ромба:

А) 8 cm; B) 4 cm; C) $2\sqrt{3}$ cm; D) $4\sqrt{3}$ cm; E) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm.

658. (5.) Број решења једначине $\sqrt{x^2+6x+9}+|x-3|=10$ је:

А) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) већи од 3.

659. (6.) Дати су искази:

(I) два подударна четвороугла имају исте површине;
(II) два троугла истих површина су подударни;
(III) два четвороугла истих страница су подударни.

Тачни су искази:

А) само (I); B) само (I) и (II); C) само (III); D) сви; E) ниједан.

660. (7.) Посматрамо количник два природна броја. Ако се дељеник увећа за 65, а делилац за 5, не мењају се ни количник, ни остатак. Количник је:

А) прост; B) дељив са 3; C) дељив са 5; D) дељив са 11; E) дељив са 7.

661. (8.) Катете правоуглог троугла су 6 cm и 8 cm. Полупречник уписаног круга је:

А) $\sqrt{3}$ cm; B) 4 cm; C) 2 cm; D) 3,5 cm; E) 2,5 cm.

662. (9.) Ако је $b\neq 0$ и $n\in\mathbb{N}$, израз $\dfrac{b^{7n+2}\cdot b^{3n}}{b^{4n}\cdot b^{6n}}$ једнак је изразу:

А) 0; B) 1; C) b; D) b^{11n}; E) b^2.

663. (10.) Растојање између градова M и N камион пређе за 45 минута дуже него аутобус. Ако је просечна брзина камиона 36 km/h, а аутобуса 48 km/h, растојање градова M и N је:

А) 120 km; B) 112 km; C) 110 km; D) 108 km; E) 100 km.

664. (11.) Колико има четвороцифрених природних бројева који су потпуни квадрати и код којих су прва и друга цифра једнаке, а такође и трећа и четврта цифра међусобно једнаке?

А) ниједан; B) један; C) два; D) три; E) више од три.

665. (12.) У ромб површине $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ уписан је круг површине $\frac{27}{4}\pi\,\text{cm}^2$. Оштар угао ромба је:

А) 15°; B) 30°; C) 36°; D) 45°; E) 60°.

Тест XXI

666. (1.) Вредност израза $\dfrac{2^n\cdot 5^n}{2^{2n}}$ $(n\in\mathbb{N})$ је:

А) $\left(\frac{5}{2}\right)^n$; B) $\frac{5^n}{4}$; C) 5^{2n}; D) 5^n; E) $\left(\frac{5}{8}\right)^n$.

667. (2.) Решење једначине $(x-4)^2-(x+3)^2=3(x-9)$ припада интервалу:

А) $(-\infty,-1]$; B) $(-1,0]$; C) $(0,1]$; D) $(1,5]$; E) $(5,+\infty)$.

668. (3.) Ако је $x = \dfrac{(-1)^4}{4} - \dfrac{(-1)^2}{2} - \dfrac{(-1)^3}{2}$, тада:

A) $x \in (-\infty, 0)$; B) $x \in [0,1]$; C) $x \in (1,2]$; D) $x \in (2,3)$; E) $x \in [3,+\infty)$.

669. (4.) Нека је E тачка на дијагонали AC правоугаоника $ABCD$ таква да је $BE \perp AC$ и BE дели прав угао код B у односу $3:1$. Тада је угао између дијагонале BD и праве BE једнак:

A) $30°$; B) $36°$; C) $45°$; D) $60°$; E) $65°$.

670. (5.) Ако је $x * y = \dfrac{xy}{2}$, онда је $7*(4*3)$:

A) 14; B) 18; C) 21; D) 28; E) 42.

671. (6.) Подножје висине која одговара хипотенузи правоуглог троугла дели хипотенузу на дужи 4 cm и 9 cm. Површина тог троугла (у cm^2) је:

A) $\dfrac{150}{2}$; B) $\dfrac{120}{7}$; C) $\dfrac{120\sqrt{2}}{7}$; D) $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$; E) 39.

672. (7.) Колико има простих бројева p таквих да су и бројеви $3p+1$ и $5p+1$ прости?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

673. (8.) Основа тростране пирамиде је једнакостранични троугао странице a, а све бочне стране граде са равни основе угао од $30°$. Површина те пирамиде је:

A) $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{4}$; B) $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$; C) $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+2)}{2}$; D) $\dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; E) $\dfrac{a^2(\sqrt{3}+2)}{4}$.

674. (9.) Колико воде треба додати у 200 g 20%-ног раствора соли да би се добио 5%-ни раствор?

A) $200\,cm^3$; B) $300\,cm^3$; C) $400\,cm^3$; D) $600\,cm^3$; E) $800\,cm^3$.

675. (10.) Колико има двоцифрених бројева који се могу представити као збир куба цифре јединица и квадрата цифре десетица?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

676. (11.) Једно теме коцке ивице $a = 2$ cm и центри трију страна коцке којима је то теме заједничко, темена су тростране пирамиде. Запремина те пирамиде је:

A) $\dfrac{1}{6}\,cm^3$; B) $\dfrac{1}{3}\,cm^3$; C) $\dfrac{3}{8}\,cm^3$; D) $\dfrac{1}{2}\,cm^3$; E) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\,cm^3$.

677. (12.) Основице трапеза $ABCD$ су $AB = 6$ cm и $CD = 4$ cm. Нека је O пресек дијагонала и E тачка пресека праве кроз O паралелне основицама трапеза и крака AD. Дуж OE има дужину:

A) 2,5 cm; B) $2\sqrt{6}$ cm; C) $\sqrt{6}$ cm; D) 3 cm; E) 2,4 cm.

Тест XXII

678. (1.) Ако је 3/4 броја a једнако 18, тада је 4/3 броја a једнако:

A) 18; B) 16; C) 64; D) 32; E) 8.

679. (2.) Вредност израза $(y+2)^2 - \dfrac{(2y-1)^2}{4}$ за $y = \dfrac{1}{20}$ припада интервалу:

A) $(-\infty,-2]$; B) $(-2,-1]$; C) $(-1,1]$; D) $(1,5]$; E) $(5,+\infty)$.

680. (3.) Око квадрата дијагонале $d = 6\sqrt{2}$ cm описан је круг и у квадрат је уписан круг. Површина кружног прстена одређеног описаним и уписаним кругом (у cm^2) је:

A) $4{,}5\pi$; B) 9π; C) 18π; D) $9\sqrt{2}\,\pi$; E) $4{,}5\sqrt{2}\,\pi$.

681. (4.) Омотач купе развијен у равни је кружни исечак полупречника 5 cm са централним углом $216°$. Запремина купе (у cm^3) је:

A) 24π; B) $10\sqrt{3}\,\pi$; C) $6\sqrt{3}\,\pi$; D) 9π; E) 12π.

682. (5.) Колико има бројева облика $\overline{x2332y}$ дељивих са 33?

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) више од 5.

683. (6.) Растојање пресечне тачке правих $4x - 3y = 0$, $y - x = 1$ од координатног почетка је:

A) 7; B) 1; C) 5; D) $\sqrt{12}$; E) $\dfrac{7}{2}$.

684. (7.) Површина правоуглог троугла чији су полупречници уписаног и описаног круга $r = 2$ cm и $R = 5$ cm (у cm^2) је:

A) 12; B) 20; C) 24; D) 36; E) 48.

685. (8.) У круг полупречника 6 cm уписан је једнакокраки троугао чији је угао при врху $30°$. Површина тог троугла (у cm^2) је:

A) $9(\sqrt{3}+2)$; B) $9\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; C) $18(\sqrt{3}+2)$; D) $18\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; E) 32.

686. (9.) Висине паралелограма се односе као $2:3$, његов обим је 40 cm, а оштар угао $30°$. Површина паралелограма (у cm^2) је:

A) 24; B) 48; C) $32\sqrt{2}$; D) $27\sqrt{3}$; E) 54.

687. (10.) У продавници је било 5 сандука са јабукама са масама: I–16 kg, II–33 kg, III–19 kg, IV–31 kg, V–20 kg. Два купца су купила четири сандука тако да је један узео два пута више јабука од другог. Који је сандук остао непродат?

A) I; B) II; C) III; D) IV; E) V.

688. (11.) Основа праве призме је правоугли троугао са хипотенузом $c = 4\,\text{cm}$ и оштрим углом од 60°. Кроз хипотенузу доње однове и теме правог угла горње основе постављена је раван која са равни основе гради угао од 45°. Запремина тростране пирамиде коју раван одсеца од призме (у cm^3) је:

A) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; B) 8; C) $\frac{1}{4}$; D) 6; E) 2.

689. (12.) Колико целих бројева задовољава неједначину $\frac{|3-x|}{2x-3} \geqslant 2$?

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) више од 3.

Тест XXIII

690. (1.) Странице правоугаоника разликују се за $5\,\text{cm}$. Ако се дужа страница смањи за $3\,\text{cm}$ и над њом формира квадрат, он ће имати површину једнаку површини полазног квадрата. Површина тог правоугаоника је:

A) $49\,\text{cm}^2$; B) $25\,\text{cm}^2$; C) $36\,\text{cm}^2$; D) $48\,\text{cm}^2$; E) $72\,\text{cm}^2$.

691. (2.) Нека је $a = \dfrac{\left(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}\right)\cdot 5\frac{5}{6}}{(21-1{,}25):2{,}5}$. Тада a припада интервалу:

A) $(-\infty,-5)$; B) $[-5,0)$; C) $[0,5)$; D) $[5,10)$; E) $[10,+\infty)$.

692. (3.) Ако је $a+b=7$ и $ab=-2$, онда је a^2+b^2 једнако:

A) 53; B) 45; C) 50; D) 31; E) 49.

693. (4.) Колико литара воде треба сипати у мешавину 40 l 60%-ног алкохола и 60 l 40%-ног алкохола да би се добио 25%-ни алкохол?

A) 46 l; B) 84 l; C) 90 l; D) 92 l; E) 96 l.

694. (5.) Углови троугла ABC су $\beta = 68^\circ$ и $\gamma = 42^\circ$. Угао који граде висина из темена A и симетрала угла код темена A је:

A) 14°; B) 12°; C) 13°; D) 26°; E) 24°.

695. (6.) Последња цифра броја $6^{1999}+7^{1999}+8^{1999}$ је:

A) 1; B) 3; C) 5; D) 7; E) 9.

696. (7.) Колико целих бројева x задовољава неједначину $\big||x|-2\big| \leqslant 50$?

A) 53; B) 104; C) 105; D) 103; E) 52.

697. (8.) За колико се разликују површине правилног 12-тоугла и правилног 6-тоугла ако су оба уписани у круг полупречника $r=\sqrt{6}\,\text{cm}$?

A) $9\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{cm}^2$; B) $9(2-\sqrt{3})\,\text{cm}^2$; C) $3\sqrt{3}(1-\sqrt{3})\,\text{cm}^2$; D) $3\sqrt{3}(2-\sqrt{3})\,\text{cm}^2$; E) $9\sqrt{3}(1-\sqrt{3})\,\text{cm}^2$.

698. (9.) Средиште горње основе коцке ивице $a = 6\,\text{cm}$ спојено је са средиштима ивица доње основе. Површина омотача добијене четворостране пирамиде је:

A) $54\,\text{cm}^2$; B) $18\sqrt{6}\,\text{cm}^2$; C) $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; D) $36\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; E) $108\,\text{cm}^2$.

699. (10.) Висина и тежишна дуж које одговарају хипотенузи правоуглог троугла односе се као $4:5$. Однос катета тог троугла је:

A) $1:2$; B) $2:3$; C) $3:4$; D) $4:5$; E) $5:6$.

700. (11.) Дечак чува своје марке у три албума. Петина је у првом, неколико (цео број) седмина у другом, а 303 марке у трећем албуму. Ако је n број марака које има дечак, тада је:

A) $n \leqslant 2000$; B) $2000 \leqslant n < 3000$; C) $3000 \leqslant n < 3500$; D) $3500 \leqslant n < 4000$; E) $n \geqslant 4000$.

701. (12.) Основа тростране пирамиде је правоугли троугао чија је висина која одговара хипотенузи $h=\sqrt{3}\,\text{cm}$. Бочне ивице пирамиде су једнаке, а углови, које граде бочне стране које одговарају катетама, са равни основе су $\alpha = 45^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Запремина пирамиде је:

A) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; B) $2\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}\,\text{cm}^3$; D) $2\,\text{cm}^3$; E) $4\,\text{cm}^3$.

Тест XXIV

702. (1.) Вредност израза $\frac{2}{3} - \frac{3}{8} : 0{,}8 + 0{,}5$ је:

A) $\frac{67}{96}$; B) $\frac{83}{96}$; C) $\frac{35}{156}$; D) $\frac{33}{96}$; E) $-\frac{67}{96}$.

703. (2.) Израз $2\sqrt{8}+5\sqrt{72}-7\sqrt{18}-\sqrt{50}$ једнак је изразу:

A) $\sqrt{2}$; B) $8\sqrt{2}$; C) $5\sqrt{2}$; D) $3\sqrt{2}$; E) 0.

704. (3.) Ако је P површина коцке, тада је запремина коцке једнака:

A) $\frac{1}{6}P\sqrt{P}$; B) $\frac{1}{3}P\sqrt{2P}$; C) $\frac{1}{6}P\sqrt{6P}$; D) $\frac{1}{36}P\sqrt{6P}$; E) $P\sqrt{P}$.

705. (4.) Нека је x троцифрен број, $x=\overline{abc}$ (a,b,c – цифре) такав да је четвороцифрен број $\overline{abc1}$ три пута већи од четвороцифреног броја $\overline{2abc}$. Збир цифара броја x је:

A) 17; B) 18; C) 20; D) 19; E) 22.

706. (5.) Број решења једначине $|2x+3| = 5+4x$ је:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) 4.

707. (6.) Основа праве призме је ромб. Ако је висина призме $H=\sqrt{3}\,\text{cm}$, а нагибни углови дијагонала призме према равни основе 45°, односно 30°, тада је површина омотача призме (у cm^2):

A) $\frac{15}{2}\sqrt{3}$; B) $8\sqrt{3}$; C) 12; D) 15; E) $9\sqrt{3}$.

708. (7.) Обим правоуглог троугла је 80 cm, а висина која одговара хипотенузи је 16 cm. Површина овог троугла је (у cm^2):

A) 240; B) $\frac{800}{3}$; C) 300; D) $150\sqrt{2}$; E) 280.

709. (8.) Основица BC једнакокраког троугла ABC једнака је половини крака. Ако је D подножје висине троугла из темена B, однос $AD : CD$ је:

A) $8:1$; B) $7:1$; C) $15:2$; D) $2\sqrt{3}:1$; E) $10:1$.

710. (9.) Сестра каже брату: „Ја сада имам два пута више година него што си ти имао када сам ја имала толико година колико ти имаш сада. А када ти будеш имао толико година колико ја имам сада, заједно ћемо имати 63 године." Колико је година сестра старија од брата?

A) 5; B) 6; C) 7; D) 8; E) више од 8.

711. (10.) У једној продавници воћа продаване су јабуке, крушке и шљиве. Количина шљива била је једнака трећини укупне количине воћа. У току дана продата је половина свих јабука, 2/3 крушака и све шљиве. Колико процената укупне количине воћа је продато ако је укупно остало упола мање воћа него што је на почетку било крушака?

A) 60%; B) 64%; C) 72%; D) 75%; E) 80%.

712. (11.) Основице правоуглог трапеза $ABCD$ су $AB = 25$ cm и $CD = 17$ cm, а дужи крак $BC = 10$ cm. У тачки E, средишту крака BC, конструисана је нормала на BC која сече праву AD у тачки F. Дужина дужи EF је:

A) 32 cm; B) 35 cm; C) $25\sqrt{2}$ cm; D) 40 cm; E) 42 cm.

713. (12.) Основа пирамиде је правоугли трапез чије су паралелне странице $a = 6$ cm и $b = 2$ cm. Ако су све бочне стране пирамиде нагнуте према равни основе под углом од $60°$, површина омотача пирамиде (у cm^2) је:

A) 48; B) $8\sqrt{3}$; C) $16\sqrt{3}$; D) 12; E) 24.

Тест XXV

714. (1.) Дати су искази ($a \in \mathbf{R}$):

(I) $(-2a)^2 = 4a^2$; (II) $(-2a)^2 = -4a^2$;
(III) $(-2a)^2 = 2a^2$; (IV) $|-2a^2| = 2a^2$.

Тачни су:

A) само I и IV; B) само I; C) само II и IV; D) сви; E) ниједан.

715. (2.) Ако је $M = \frac{7x+35}{2x+10}$ за $x = -\frac{19}{17}$, тада:

A) $M < 0$; B) $0 \leqslant M < 2$; C) $2 \leqslant M < 4$; D) $4 \leqslant M < 6$; E) $M > 6$.

716. (3.) Запремина квадра је $61\,440\,cm^3$, а његове ивице се односе као $3:5:8$. Најкраћа ивица овог квадра има дужину:

A) 12 cm; B) 15 cm; C) 18 cm; D) 21 cm; E) 24 cm.

717. (4.) Скуп решења неједначине $\frac{2x-3}{3x-3} \geqslant 1$ је:

A) $(-\infty, 0]$; B) $[0, +\infty)$; C) $(-\infty, 1)$; D) $(1, +\infty)$; E) $[0, 1)$.

718. (5.) Производ дужина полупречника уписаног и описаног круга једног једнакостраничног троугла је 8. Површина тог троугла је:

A) $4\sqrt{3}$; B) $9\sqrt{3}$; C) 36; D) $12\sqrt{3}$; E) 64.

719. (6.) Дато је 5 l мешавине воде и алкохола, са 35% воде. Колико литара алкохола треба додати да нова мешавина садржи 80% алкохола?

A) 3,5 l; B) 3,75 l; C) 4 l; D) 3,8 l; E) 4,15 l.

720. (7.) Кругови полупречника 18 cm и 8 cm додирују се споља у тачки T. Њихова заједничка унутрашња тангента сече спољашњу тангенту у тачки A. Дужина дужи AT је:

A) 12 cm; B) 13 cm; C) 12,5 cm; D) 15 cm; E) $9\sqrt{2}$ cm.

721. (8.) Колико има природних бројева који постају 12 пута мањи кад им се прецрта последња цифра?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) више од 4.

722. (9.) Ученик је купио три књиге. Да је прва књига била пет пута јефтинија, друга два пута јефтинија, а трећа два и по пута јефтинија, платио би их 32 динара; да је прва књига била два пута јефтинија, друга четири пута јефтинија, а трећа три пута јефтинија, платио би их 48 динара. Колико укупно коштају све три књиге?

A) мање од 90 дин; B) између 90 и 100 дин; C) између 100 и 110 дин; D) између 110 и 120 дин; E) више од 120 дин.

723. (10.) Један крак трапеза је 8 cm, а одстојање средишта другог крака од датог крака је 6 cm. Површина тог трапеза је:

A) $24\,cm^2$; B) $96\,cm^2$; C) $48\,cm^2$; D) $36\sqrt{2}\,cm^2$; E) $52\,cm^2$.

724. (11.) Нека су AB и CD два нормална пречника круга k са центром у тачки O и полупречника 2 cm, l круг над пречником OC и j круг који додирује кругове k и l и дуж AB (не у тачки O). Полупречник круга j је дужине:

A) $\frac{2}{3}$ cm; B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; C) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ cm; D) $\frac{1}{2}$ cm; E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm.

725. (12.) Равни бочних страна тростране пирамиде су међу собом нормалне, а дужине бочних ивица су 2 cm, 3 cm и 6 cm. У ову пирамиду је уписана коцка чије је једно теме врх пирамиде, наспрамно теме припада основи пирамиде и чије три стране припадају бочним странама пирамиде. Дужина ивице те коцке је:

A) $\sqrt{2}$ cm; B) $\frac{3}{2}$ cm; C) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ cm; D) 1 cm; E) 2 cm.

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

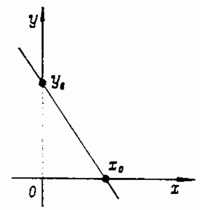
2. Изводница купе је $s = r = 6$, а обим основе купе је $2r_1\pi = r\pi$, одакле је $r_1 = \frac{r}{2} = 3$. Површина купе је

$$P = r_1^2\pi + r_1\pi s = \frac{3}{4}r^2\pi = 27\pi,$$

а запремина

$$V = \frac{1}{3}r_1^2\pi H = \frac{1}{3}\frac{r^2}{4}\pi \cdot \sqrt{s^2 - r_1^2} = \frac{\sqrt{3}}{24}r^3\pi = 9\pi\sqrt{3}.$$

3. Пресеци праве са координатним осама су — за $x = 0$: $y_0 = \frac{12}{a}$ и за $y = 0$: $x_0 = 4$. Површина троугла је $P = \frac{1}{2}|x_0y_0|$, одакле се налази (сл. 1) $\frac{1}{2}\left|\frac{12}{a}\cdot 4\right| = 6$, тј. $|a| = 4$ и $a_1 = -4$, $a_2 = 4$.



Сл. 1

4. а) Нетачно, на пример $3 - 5 \notin \mathrm{N}$.

б) Тачно.

в) Нетачно, јер је и $0^2 = 0$.

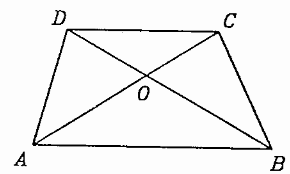
г) Нетачно — степеновањем левих и десних страна дате релације са 6 добијамо нетачну формулу $2^3 > 3^2$.

5. а) Не важи, на пример за $a = 0$, $b = 0$.

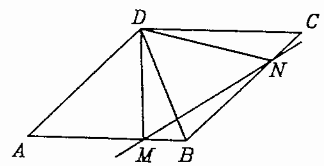
б) Тачна неједнакост, јер је еквивалентна са $a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$, тј. $(a - b)^2 \geqslant 0$.

в) Нетачно, јер не важи за $b = 0$.

6. Свака од пирамида $ABDA_1$, $DD_1C_1A_1$, $BB_1C_1A_1$ и BCC_1D има запремину једнаку шестини запремине коцке. Дакле, $V_{BC_1A_1D} = a^3 - 4\cdot\frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{3} = \frac{V}{3}$. Тачан одговор је г).



Сл. 2



Сл. 3

7. $P_{\triangle AOD} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle ABO} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle ABO} = P_{\triangle BOC}$ (сл. 2). (Троуглови ABD и ABC имају заједничку основицу и једнаке висине, па су им површине једнаке.)

8. Троуглови DMB и DCN су подударни ($DB = DC$, $BM = CN$, $\angle DBM = \angle DCN = 60°$), па је (сл. 3) $DM = DN$ и $\angle MDN = \angle NDC$. Како је $\angle BDC = 60°$, то је и $\angle MDN = 60°$.

9. Нека је цена робе била a динара. После поскупљења од 10% њена цена је била $a + 10\% a = 1{,}1a$, а после појефтињења $1{,}1a - 10\% \cdot 1{,}1a = 1{,}1a - 0{,}11a = 0{,}99a$. Дакле, цена је била нижа после појефтињења.

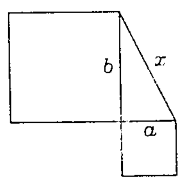
10. Последња цифра броја 9^n, $n \in \mathrm{N}$, је 9 или 1, у зависности да ли је n непаран или паран број, а последња цифра броја 4^n, $n \in \mathrm{N}$, је 4 или 6 у зависности да ли је n непаран или паран број. Дакле, последња цифра броја 9^{14} је 1, а броја 4^{99} је 4, па се збир $9^{14} + 4^{99}$ завршава цифром 5 и дељив је са 5.

11. После множења и сређивања добијамо еквивалентну једначину

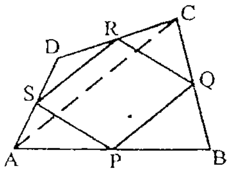
$$a(c-d) = (1-b)(c-d).$$

За $c \neq d$ решење је $a_1 = 1 - b$. За $c = d$ решење је произвољни реални број a.

12. Нека дати квадрати имају странице a и b. Тада је страница x (сл. 4) траженог квадрата хипотенуза правоуглог троугла са катетама a и b.



Сл. 4



Сл. 5

13. Број је дељив са 90 ако и само ако је дељив са 9 и са 10. Дакле, последња цифра мора бити 0, а збир цифара броја мора бити дељив са 9. Значи, претпоследња цифра је 8, а тражени број 8280.

14. $P = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = 4 - \pi \text{ cm}^2$.

15. $a^2 - 2a + 9 = (a-1)^2 + 8 \geqslant 8 > 0$.

16. Из $\alpha + \beta = 180° - \gamma$ и $\alpha - \beta = 3\gamma$, сабирањем добијамо $2\alpha = 180° + 2\gamma$, тј. $2\alpha - 2\gamma = 180°$, одакле је $\alpha - \gamma = 90°$.

17. Нека су P, Q, R, S средишта страница AB, BC, CD, DA четвороугла $ABCD$ (сл. 5). Дужи PQ и RS су средње линије троуглова ABC и ADC, па је $PQ = \frac{1}{2}AC$, $PQ \parallel AC$, $SR = \frac{1}{2}AC$, $SR \parallel AC$, дакле $SR = PQ$ и $SR \parallel PQ$, што значи да је четвороугао $PQRS$ паралелограм.

18. Нека је n број листића, а p број листића на којима је написан број $+1$ и q број листића на којима је написан број -1. Очигледно је $p = q$, а пошто је производ написаних бројева једнак 1, то је q паран број. Дакле, $n = p + q = 2q = 4q'$, $q' \in \mathrm{N}$.

19. а) За $a > 0$ неједначина је еквивалентна неједначини $1 > a^2$, па је $0 < a < 1$. За $a < 0$ дата неједначина еквивалентна је неједначини $1 < a^2$, па је овде $a < -1$. Дакле, скуп решења је $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
б) $a < 0$; в) $a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

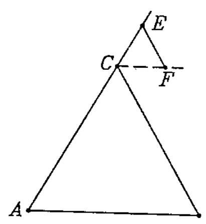
20. а) Једначина је за $b \neq 0$, $c \neq 0$ еквивалентна једначини $a(b-c) = (b-c)^2$. За $b \neq c$ ($b, c \neq 0$) решење је $a = b - c$, а ако је $b = c$ ($\neq 0$), решење је сваки реалан број.
б) Решења су $b_1 = c$ ($\neq 0$) и $b_2 = a + c$ ($\neq 0$).
в) Решења су $c_1 = b$ ($\neq 0$) и $c_2 = b - a$ ($\neq 0$).

21. Нека су a и b катете, а c хипотенуза троугла ABC. Збир површина осенчених фигура је

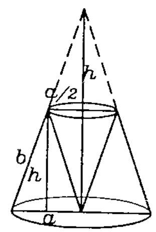
$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 \pi + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{2}\right)^2 \pi + P_{\triangle ABC} = \frac{\pi}{8}(b^2 + a^2 - c^2) + P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABC}.$$

22. Међу пет произвољних природних бројева постоје бар два који имају исти остатак при дељењу са 4. Њихова разлика је тада дељива са 4.

23. Како је (сл. 6) $\angle ECF = \angle FCB$ и $\angle CAB = \angle CBA$, а $\angle BCE = \angle ECF + \angle CAB = \angle FCB + \angle CBA$, то је $\angle ECF = \angle CAB$, одакле следи да је $CF \parallel AB$.



Сл. 6



Сл. 7

24. За $x < 0$ једначина постаје $0 = -1$, па овде нема решења. У случају да је $x > 0$ добијамо $2x = 1$, одакле се види да је решење $x_1 = \frac{1}{2}$.

25. Од запремине купе чија је основа круг полупречника a и висина $2h$ (сл. 7) треба одузети запремину две купе чија је висина h, а полупречник основе $\frac{a}{2}$:

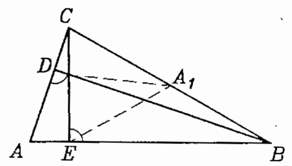
$$V = \frac{1}{3}a^2\pi h - \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi h = \frac{1}{2}a^2\pi h = \frac{1}{2}a^2\pi\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

26. Означимо тражени број са n. Тада је број $n+1$ дељив и са 2 и са 3 и са 4, ... и са 10, па је $n + 1 = \mathrm{NZS}(2, 3, 4, \ldots, 10) = 2520$, тј. тражени број је 2519.

27. 1° $a < 0$; 2° $a \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

28. Нека Зоран има z, а Горан g кликера. Тада је $z + 5 = 2(g - 5)$ и $g + 5 = 3(z - 5)$. Решавањем одговарајућег система једначина добијамо да је $z = 11$, $g = 13$, па је $z + g = 24$.

29. Тачка A_1 (сл. 8) је средиште хипотенузе правоуглог троугла BCD и правоуглог троугла BCE, па је $DA_1 = A_1C = EA_1$. (Напомена: Из решења се види да чињеница да је $\angle BAC = 60^\circ$ није битна за тврђење задатка.)



Сл. 8

30. Имамо да је $n+100 = y^2$ и $n+168 = x^2$, $x, y \in \mathbb{N}$, одакле је $x^2-y^2 = 68$. Из $(x-y)(x+y) = 68$ добијамо следеће могућности:
1° $x-y=1$, $x+y=68$;
2° $x-y=2$, $x+y=34$;
3° $x-y=4$, $x+y=17$.

Први и трећи систем једначина немају целобројних решења, па је једино решење у случају 2°. Тада се добија $x=18$, $y=16$, одакле је $n=156$.

31. $n^3+5n = n^3-n+6n = n(n^2-1)+6n = (n-1)n(n+1)+6n$. Први сабирак у овом збиру је дељив са 6, јер је производ три узастопна цела броја.

32. Површина правилног тетраедра је $4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, па је ивица $a=\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$. Запремина ове пирамиде је (в. задатак 485.)

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}^3.$$

33. Нека човек има x, а његов син y година. Тада је

$$x-10 = 4(y-10), \quad x+10 = 2(y+10).$$

Решење овог система једначина је $x=50$, $y=20$.

34. а) $-3 \leqslant a < -\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{3} < a \leqslant 3$.

б) Неједначина је еквивалентна неједначини $b^3(b-1) > 0$. Разматрањем случајева $b>0$ и $b<0$ налазимо да су решења: $b<0$ или $b>1$.

35. Постоје две могућности: $|x|-2=1$ или $|x|-2=-1$. У првом случају налазимо решења $x_1=3$, $x_2=-3$, а у другом $x_3=1$, $x_4=-1$.

36. Уочимо да је $p^2-1=(p-1)(p+1)$. Како је број p прост и већи од 3, то је један од бројева $p-1$, $p+1$ дељив са 3. Бројеви $p-1$ и $p+1$ су два узастопна парна броја. Један од њих је дељив са 4. Према томе, производ $(p-1)(p+1)$ дељив је са $3\cdot2\cdot4=24$.

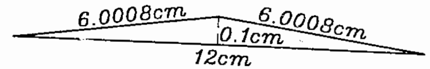
37. Уочимо да је $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$, $7^4=2401$, $7^5=16807$, ... Дакле, последње цифре бројева 7^n, $n\in\mathbb{N}$, периодично се понављају, са периодом 4. Последња цифра броја 77^{77} иста је као и последња цифра броја 7^1, тј. једнака је 7.

38. Једно могуће решење приказано је на слици 9.

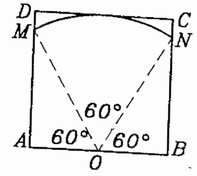
39. Тражена површина (сл. 10) налази се када се од површине квадрата одузму површина кружног исечка OMN и површине троуглова OAM и OBN:

$$P = 1-\frac{1\cdot\pi\cdot60^\circ}{360^\circ}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

40. Дата призма се може поделити на три пирамиде једнаких запремина: $ABCB_1$, ACB_1A_1 и ACB_1C_1. Последње две имају једнаке основе и заједничку висину, па су им запремине једнаке и, дакле, једнаке једној трећини запремине дате призме.



Сл. 9

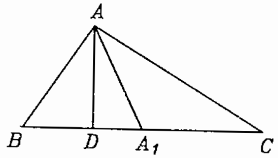


Сл. 10

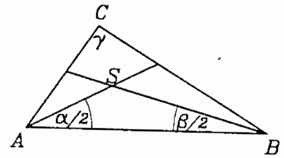
41. 2°. **42.** 1°, 2°. **43.** 3°. **44.** 1°, 3°. **45.** 1°.
46. 1°. **47.** 3°. **48.** 2°. **49.** 3°. **50.** 2°.

51. Нека је AD висина из темена A у троуглу ABC (сл. 11). Тада је

$$P_{\triangle BA_1A} = \frac{BA_1\cdot AD}{2} = \frac{A_1C\cdot AD}{2} = P_{\triangle CA_1A}.$$



Сл. 11

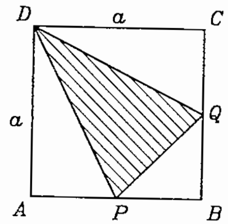


Сл. 12

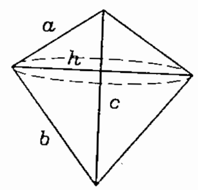
52. Имамо да је (сл. 12) $\angle ASB = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = 180^\circ - \frac{180^\circ-\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}$.

53.

$$P_{\triangle DPQ} = P_{\square ABCD} - P_{\triangle APD} - P_{\triangle DCQ} - P_{\triangle PBQ}$$
$$= a^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} = \frac{3}{8}a^2 \quad (\text{сл. } 13).$$



Сл. 13



Сл. 14

54. а) $x=3$; б) $x=2, y=2$ или $x=2, y=5$ или $x=5, y=2$; в) $x=y=z=1$.

55. $$\frac{2{,}75 : 1{,}1 + \frac{10}{3}}{2{,}5 - 0{,}4 \cdot \frac{10}{3}} : \frac{5}{7} = \frac{2{,}5 + \frac{10}{3}}{2{,}5 - \frac{4}{3}} : \frac{5}{7} = \frac{17{,}5}{3{,}5} : \frac{5}{7} = \frac{35}{7} : \frac{5}{7} = 7.$$

56. $(m-n)(m+n) = 105 = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Постоје следеће могућности:

1° $m-n=1$, $m+n=105$; $m_1 = 53$, $n_1 = 52$,   2° $m-n=3$, $m+n=35$; $m_2 = 19$, $n_2 = 16$,

3° $m-n=5$, $m+n=21$; $m_3 = 13$, $n_3 = 8$,   4° $m-n=7$, $m+n=15$; $m_4 = 11$, $n_4 = 4$.

57. Полазна једначина еквивалентна је са $2\sqrt{(x-2)^2} = x$, тј. $2|x-2| = x$. Имамо да је: 1° за $x \geqslant 2$, $2x-4 = x$, $x_1 = 4$; 2° за $x < 2$, $4 - 2x = x$, $x_2 = \frac{4}{3}$.

58. Нека је i број Иванових, а g Горанових година. Тада је $i = 2(2g - i)$, $i + g = 35$. Решавањем система добијамо $i = 20$, $g = 15$, па Иван има 20, а Горан 15 година.

59. Из $\alpha + (\alpha + 20°) + (\alpha + 30°) + (\alpha + 50°) = 360°$ следи да је $\alpha = 65°$. Дакле, углови четвороугла су $65°$, $85°$, $95°$ и $115°$. Како је $65° + 115° = 180°$, суседни углови четвороугла су суплементни, па је четвороугао трапез.

60. Биће $c = \sqrt{a^2+b^2} = 25$ (сл. 14). Одавде је $c \cdot h = a \cdot b$, па је $h = 12\,\text{cm}$ и $V = \dfrac{h^2 \pi c}{3} = 1200\pi\,\text{cm}^3$.

61. а) $a = 0$; б) $a \in \mathbf{R}$; в) $a = 0$ или $a = 1$; г) $a = 0$ или $a = -1$; д) $a \leqslant 0$.

62. а) $P = a^2$, $P_1 = \left(\frac{11}{10}a\right)^2 = \frac{121}{100}a^2$. Површина се повећа за 21%.

б) $P = a^2$, $P_1 = \left(\frac{9}{10}a\right)^2 = \frac{81}{100}a^2$. Површина се смањи за 19%.

63. $\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{(2x+3)^2} = -1$, $|x-2| - |2x+3| = -1$.

1° $x < -\frac{3}{2}$: $-x + 2 + 2x + 3 = -1$, $x = -6$;

2° $-\frac{3}{2} \leqslant x < 2$: $-x + 2 - 2x - 3 = -1$, $x = 0$;

3° $x \geqslant 2$: $x - 2 - 2x - 3 = -1$, $x = -4$ — није решење.

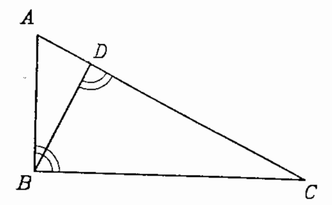
Дакле, решења једначине су $x_1 = -6$ и $x_2 = 0$.

64. а) Број $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ је непаран, па не може бити дељив парним бројем 1990.

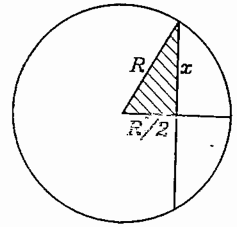
б) Ако је број n облика $3k$ или $3k-1$, тада је $n(n+1)$ дељиво са 3, а $n^2+n+2 = n(n+1)+2$ није дељиво са 3, па ни бројем 1989 који је дељив са 3. Ако је $n = 3k+1$, тада је $n^2 + n + 2 = (3k+1)(3k+2) + 2 = 3l + 1$, па ни тада није дељиво са 3, дакле ни бројем 1989.

65. $\dfrac{2x-3}{x-4} - 1 \leqslant 0 \iff \dfrac{x+1}{x-4} \leqslant 0 \iff -1 \leqslant x < 4$.

66. Из сличности троуглова $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ (сл. 15) добијамо $\dfrac{BC}{DC} = \dfrac{AC}{BC}$, па је $BC = \sqrt{16 \cdot 9} = \sqrt{144} = 12\,\text{cm}$ и $\dfrac{BD}{BA} = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{3}{4}$.



Сл. 15



Сл. 16

67. $x = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (сл. 16); $\dfrac{P_1}{P_2} = \dfrac{x^2\pi}{R^2\pi} = \dfrac{3}{4}$.

68. Вредност израза је 300.

69. $\sqrt{(2x-1)^2} < 3 - x$, $|2x-1| < 3 - x$. Посматрамо два случаја:

1° $2x - 1 \geqslant 0$ (тј. $x \geqslant \frac{1}{2}$): $2x - 1 < 3 - x$, $x < \frac{4}{3}$; $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{4}{3}$.

2° $2x - 1 < 0$ (тј. $x < \frac{1}{2}$): $-(2x-1) < 3 - x$, $-x < 2$, $x > -2$, $-2 < x < \frac{1}{2}$.

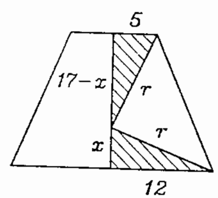
Решења су $-2 < x < \frac{4}{3}$.

70. Означимо са A збир година девет играча који нису излазили са терена, са x године повређеног и са y године искљученог играча. Тада је:
$$\frac{A+x+y}{11} = 22, \quad \frac{A}{9} = 20, \quad \frac{A+x}{10} = 21.$$
Решавањем система $A + x + y = 242$, $A = 180$, $A + x = 210$ добијамо да је $x = 30$ и $y = 32$.

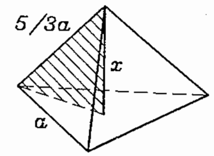
71. Тражени број означимо са n. Тада је $n + 2 = 60k$ (јер $\text{NZD}(3,4,5,6) = 60$), $n = 60k - 2$. Најмањи овакав број n дељив са 7 је за $k = 4$: $n = 238$.

72. 1° Не; 2° не; 3° не; 4° да; 5° не.

73. Имамо да је (сл. 17) $x^2 + 12^2 = r^2$, $(17-x)^2 + 5^2 = r^2$. Одавде је $x^2 + 12^2 = (17-x)^2 + 5^2$ и $x = 5$, $r = 13$.



Сл. 17



Сл. 18

74. $x=\sqrt{\left(\frac{5}{3}a\right)^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2}=a\sqrt{\frac{25}{9}-\frac{1}{3}}=\frac{a}{3}\sqrt{22}$ (сл. 18).

75. Означимо са x, y, z, u износе које треба редом да добију прво, друго, треће и четврто лице. Тада је:

$$y=\frac{3}{2}x,\quad z=\frac{5}{4}y=\frac{15}{8}x,\quad u=\frac{7}{6}z=\frac{105}{48}x=\frac{35}{16}x.$$

Како је $x+y+z+u=42\,000$, то је $x+\frac{3}{2}x+\frac{15}{8}x+\frac{35}{16}x=42\,000$, одакле налазимо $x=6400$, $y=9600$, $z=12\,000$, $u=14\,000$.

76. Пошто је $1992=2^3\cdot 3\cdot 83$ и 83 је прост број, тражени бројеви морају бити 83 и 1992 или $2^3\cdot 83=664$ и $3\cdot 83=249$.

77. Неједначина је еквивалентна са $\frac{x+7}{\sqrt{(3x+1)^2}}<2$, тј. $\frac{x+7}{|3x+1|}<2$, односно $x+7<2|3x+1|$.

Ако је $x<-\frac{1}{3}$, биће $x+7<2(-3x-1)$, тј. $7x<-9$, односно $x<-\frac{9}{7}$.

Ако је $x>-\frac{1}{3}$, биће $x+7<2(3x+1)$, тј. $-5x<-5$, односно $x>1$.

Дакле, решења су сви реални бројеви x за које је $x<-\frac{9}{7}$ или $x>1$.

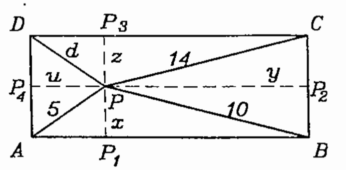
78. После првог брисања остале су цифре на парним местима, после другог брисања остале су цифре на местима која су дељива са $2^2=4$, после трећег брисања на местима дељивим са $2^3=8$ итд. Последња избрисана цифра је на месту највећег степена броја 2, који је мањи од 1000, а то је $2^9=512$. Према томе, последња избрисана цифра је 2.

79. 1° Да; 2° не; 3° не; 4° да; 5° не.

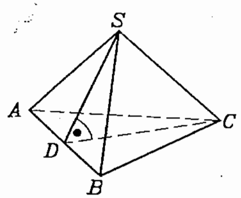
80. Нека су (сл. 19) P_1, P_2, P_3 и P_4 подножја нормала из тачке P на странице AB, BC, CD и DA правоугаоника. Ако означимо $PP_1=x$, $PP_2=y$, $PP_3=z$; $PP_4=u$ и $PD=d$, биће

$$u^2+x^2=5^2,\quad x^2+y^2=10^2,\quad y^2+z^2=14^2,\quad z^2+u^2=d^2.$$

Одузимањем левих и десних страна прве две релације добијамо $u^2-y^2=5^2-10^2$, а треће и четврте $u^2-y^2=d^2-14^2$. Дакле, $d^2-14^2=5^2-10^2$, тј. $d=\sqrt{14^2-10^2+5^2}=11$ cm.



Сл. 19



Сл. 20

81. Означимо са D средиште хипотенузе AB (сл. 20). Пошто је $AS=BS=CS$, то су троуглови ADS, BDS и CDS подударни и тачка D је подножје висине пирамиде. Како је $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=15$, то је $AD=7{,}5$, $SD=\sqrt{SA^2-AD^2}=18$. Запремина пирамиде је

$$V=\frac{AC\cdot BC}{2}\cdot\frac{SD}{3}=324\,\mathrm{cm}^3.$$

82. $$\frac{1-\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}+3\cdot\frac{5}{6}}{\left(\frac{13}{5}-2\right)\cdot\frac{10}{7}}-\frac{1+4:\frac{8}{5}}{7-2:\frac{1}{3}}=\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{7}}-\frac{1+\frac{5}{2}}{7-6}=\frac{21}{6}-\frac{7}{2}=0.$$

Тражени број је 0.

83. Нека је x број година оца. Тада је $x=3(x-30+x-25)$, тј. $x=6x-165$, односно $x=33$. Како је отац три пута старији од оба детета заједно, отац има 33 године, син 3, а кћерка 8.

84. $\sqrt{\frac{(x+2)^2}{(3-x)^2}}<2 \iff \frac{|x+2|}{|3-x|}<2 \iff |x+2|<2|3-x|$.

1° За $x<-2$: $-x-2<2(3-x)$, $-x-2<6-2x$, $x<8$.

2° За $-2\leqslant x<3$: $x+2<2(3-x)$, $3x<4$, $x<\frac{4}{3}$.

3° За $x\geqslant 3$: $x+2<2(x-3)$, $-x<-8$, $x>8$.

Решења неједначине су елементи скупа $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)\cup(8,+\infty)$.

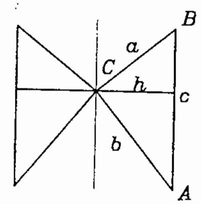
85. а) Број је дељив са 9 ако је његов збир цифара дељив са 9. Најмањи број овог облика дељив са 9 је $N=10101010101010101$ (9 јединица и 8 нула).

б) Број је дељив са 99 ако је дељив са 9 и 11, а дељив је са 11 ако му је разлика збира цифара на парним и непарним местима дељива са 11. Најмањи број овог облика дељив са 99 има 99 јединица и 98 нула.

86. 1° Да; 2° не; 3° не; 4° да; 5° не.

87. а)

$$a^2+b^2=c^2,$$
$$(2x)^2+\left(14-\frac{3}{2}x\right)^2=\left(\frac{5}{2}x-2\right)^2,$$
$$4x^2+196-42x+\frac{9}{4}x^2=\frac{25}{4}x^2-10x+4,$$
$$-32x=-192,$$
$$x=6$$



Сл. 21

Дакле, $a=12$, $b=5$, $c=13$.

б) Пречник описаног круга у правоуглом троуглу једнак је хипотенузи, тј. $2R=13$ и $R=\frac{13}{2}$.

Површина троугла ABC је $P=\frac{ab}{2}=30$, а полуобим $s=\frac{a+b+c}{2}=15$. Ако је r полупречник уписаног круга, важи $rs=P$, па је $r=\frac{P}{s}=2$.

88. $a=\sqrt{AB^2-AC^2}=20\,\mathrm{cm}$ (сл. 21). Из $ch=ab$ налазимо $h=12\,\mathrm{cm}$.

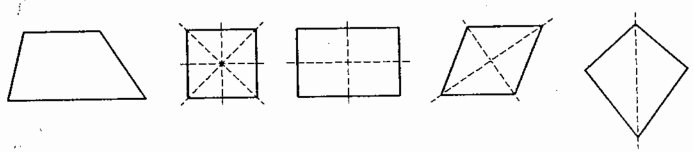
$$P=ha\pi+hb\pi+2hc\pi=h\pi(a+b+2c)=1020\pi\,\mathrm{cm}^2.$$

$$V=h^2\pi c-\frac{1}{3}h^2\pi c=\frac{2}{3}h^2\pi c=2400\pi\,\mathrm{cm}^3.$$

89.

$$\frac{(0{,}5)^2+4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2+3\cdot 0{,}5\cdot(-0{,}25)}{13\frac{1}{3}+(1\frac{1}{3}):0{,}5}=\frac{0{,}25+4\cdot\frac{1}{16}+1{,}5\cdot(-0{,}25)}{\frac{40}{3}+\frac{4}{3}\cdot 2}$$
$$=\frac{0{,}25+\frac{1}{4}-\frac{3}{8}}{\frac{40}{3}+\frac{8}{3}}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{48}{3}}=\frac{1}{128}.$$

Одговор: C.



Сл. 22

90.

$$\frac{(2a-1)^2}{6}-a^2-\frac{(2-a)(a+1)}{3}=\frac{4a^2-4a+1}{6}-a^2-\frac{2a-a^2+2-a}{3}$$
$$=\frac{4a^2-4a+1-6a^2-4a+2a^2-4+2a}{6}=\frac{-6a-3}{6}=-a-\frac{1}{2}.$$

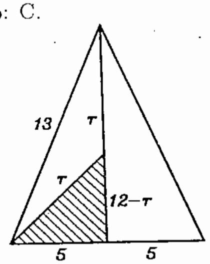
Одговор: A.

91. Видети слику 22.

Одговор: E.

92. Страница добијеног квадрата је $a_1=\frac{120}{100}\left(\frac{80}{100}a\right)=0{,}96a$, где је a страница квадрата $ABCD$. Тако је $P_1=a_1^2=0{,}96^2a^2=0{,}96^2P$.

Одговор: C.



Сл. 23

93. Висина датог троугла је $H=\sqrt{13^2-5^2}=12\,\mathrm{cm}$ (сл. 23). Применом Питагорине теореме налазимо да је, редом,

$$r^2=(12-r)^2+5^2,$$
$$r^2=144-24r+r^2+25,$$
$$24r=169,$$
$$r=\frac{169}{24}\,\mathrm{cm}.$$

Одговор: D.

94. Искази A и C су тачни само за $a=0$, исказ D само за $a\geqslant 0$, а исказ E само за $a\leqslant 0$. Једино исказ B важи за свако a.

Одговор: B.

95. Неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{x-3}{2x-5}-1\leqslant 0$, тј. $\frac{-x+2}{2x-5}\leqslant 0$, што је еквивалентно са

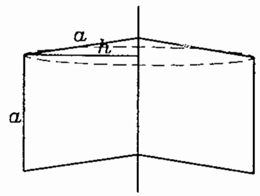
$$(-x+2\leqslant 0 \text{ и } 2x-5>0)\quad\text{или}\quad(-x+2\geqslant 0 \text{ и } 2x-5<0),$$

тј. $(x\geqslant 2$ и $x>\frac{5}{2})$ или $(x\leqslant 2$ и $x<\frac{5}{2})$, односно $x>\frac{5}{2}$ или $x\leqslant 2$.

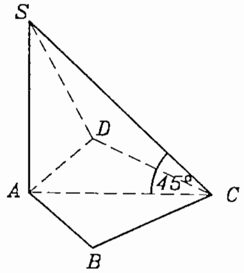
Одговор: C.

96. Коефицијент сличности троуглова $A_1B_1C_1$ и ABC је 2, што значи да први троугао има четири пута већу површину.

Одговор: B.



Сл. 24



Сл. 25

97. Омотач добијеног тела (сл. 24) састоји се од омотача ваљка висине a и полупречника основе h, те од два омотача купе изводнице a и полупречника основе h, па је

$$P=2ha\pi+2ha\pi=4ah\pi=4\pi\cdot 15=60\pi\,\mathrm{cm}^2.$$

Одговор: A.

98. Представимо један такав број у облику $\overline{xyz}$. Тада је $x+y+z=10$, а пошто су x,y,z цифре, мора бити $-7\leqslant x+z-y\leqslant 18$, па због услова $x+y+z=10$ следи да је $x-y+z=0$, одакле је $y=5$ и $x+z=5$. Сви такви бројеви су: 154, 253, 352, 451 и 550.

Одговор: D.

99. Нека је SA нормално на раван основе и $SC=8\,\mathrm{cm}$ (сл. 25). Тада је $SA=AC=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, па је површина основе пирамиде $B=\frac{AC^2}{2}=16\,\mathrm{cm}^2$, а запремина

$$V=\frac{1}{3}B\cdot AS=\frac{1}{3}\cdot 16\cdot 4\sqrt{2}=\frac{64\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{cm}^3.$$

Одговор: B.

100. Ако са x означимо број минутних подељака које пређе сатна казаљка до првог поклапања са минутном, онда минутна казаљка за то време пређе $45+x$ минутних подељака. Како се сатна казаљка креће 12 пута спорије од минутне, то је

$$12\cdot x = x + 45,$$

одакле је $x=\frac{45}{11}$. Дакле, казаљке ће се поклопити први пут после $45+\frac{45}{11}=49\frac{1}{11}$ минута.

Одговор: A.

101. Центар круга описаног око правоуглог троугла је средиште хипотенузе троугла.

Одговор: C.

102. Решење прве једначине је $x_1=0$; решење друге једначине је $x_1=0$; решење треће једначине је $x_2=1$; четврта једначина нема решења. Дакле, еквивалентне су једначине (I) и (II).

Одговор: B.

103. Вредност израза је

$$\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{11}{5}-1\right)}{\frac{1}{3}+1}:0{,}05=\frac{\frac{5}{2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}}{\frac{4}{3}}\cdot 20=\frac{63}{2}.$$

Одговор: A.

104. Дати израз идентички је једнак изразу ab и за $a=\frac{46}{15}$ и $b=\frac{15}{2}$ има вредност 23.

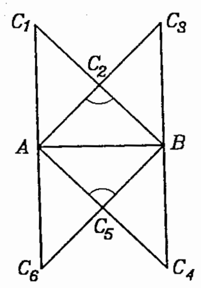
Одговор: A.

105. Нека је првобитна цена прве књиге a, а друге b динара. После повећања цена прве књиге је $a+\frac{1}{2}a=\frac{3}{2}a$, а после снижења $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}a=\frac{3}{4}a$. Цена друге књиге после снижења је $b-\frac{1}{2}b=\frac{1}{2}b$ и после повећања је $\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b=\frac{3}{4}b$. Из $\frac{3}{4}a-\frac{3}{4}b=6$, тј. $\frac{3}{4}(a-b)=6$ следи да је $a-b=8$.

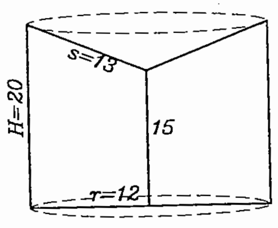
Одговор: A.

106. Постоји шест таквих тачака (сл. 26).

Одговор: D.



Сл. 26



Сл. 27

107. Број је дељив са 72 ако и само ако је дељив са 8 и са 9. Број је дељив са 8 ако и само ако је његов троцифрени завршетак, дакле $\overline{3z4}$ дељив са 8. Цифра z је 0 или 4 или 8. Да би број био дељив бројем 9 потребно је и довољно да збир његових цифара буде дељив са 9. Редом налазимо:

1) $z=0$. Мора бити $x+y$ дељиво са 9. Постоје следеће могућности за (x,y): $(0,9)$; $(1,8)$; $(2,7)$; $(3,6)$; $(4,5)$; $(5,4)$; $(6,3)$; $(7,2)$; $(8,1)$; $(9,0)$; $(9,9)$; $(0,0)$. У овом случају постоји 12 бројева.

2) $z=4$. Мора бити $x+y=5$ или $x+y=14$. Сада постоје могућности за (x,y): $(0,5)$; $(1,4)$; $(2,3)$; $(3,2)$; $(4,1)$; $(5,0)$; $(5,9)$; $(6,8)$; $(7,7)$; $(8,6)$; $(9,5)$. У овом случају постоји 11 бројева.

3) $z=8$. Треба да буде $x+y=1$ или $x+y=10$. Могућности за (x,y) су: $(0,1)$; $(1,0)$; $(1,9)$; $(2,8)$; $(3,7)$; $(4,6)$; $(5,5)$; $(6,4)$; $(7,3)$; $(8,2)$; $(9,1)$. У овом случају постоји такође 11 бројева.

Укупно, дакле, са траженим својством постоји $12+11+11=34$ броја

Одговор: A.

108. Дужи крак трапеза је $s=\sqrt{12^2+(20-15)^2}=13\,\mathrm{cm}$ (сл. 27). Површина обртног тела је

$$P=r^2\pi+2r\pi H+r\pi s=r\pi(r+2H+s)=12\pi(12+40+13)=780\pi\,\mathrm{cm}^2.$$

Одговор: E.

109. Пре десете капије Царевић је имао 4 златника, пре девете — 10, пре осме — 22, пре седме — 46, пре шесте — 94, пре пете — 190, пре четврте — 382, пре треће — 766, пре друге — 1534 и пре прве капије — 3070 златника.

Одговор: D.

110. Нека је s пут од Београда до Панчева, t укупно време у одласку и повратку и v_1, v_2 и v_{sr} брзине аутобуса у одласку и повратку и средња брзина. Тада је $\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}=t$ и

$$v_{sr}=\frac{2s}{t}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}.$$

Из $35=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$ налази се $\frac{1}{v_2}=\frac{2}{35}-\frac{1}{30}=\frac{1}{42}$, па је $v_2=42\,\mathrm{km/h}$.

Одговор: C.

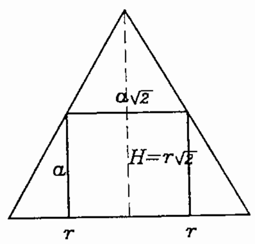
111. За $x\neq 1$ дата неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{x+1}{x-2}<2$, тј. $\frac{x+1}{x-2}-2<0$, односно $\frac{5-x}{x-2}<0$. Решења последње неједначине су сви бројеви x за које је $5-x<0$ и $x-2>0$ или $5-x>0$ и $x-2<0$, тј. $x>5$ или $x<2$. Водећи рачуна о услову $x\neq 1$, добија се да је скуп решења дате неједначине $(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(5,+\infty)$.

Одговор: B.

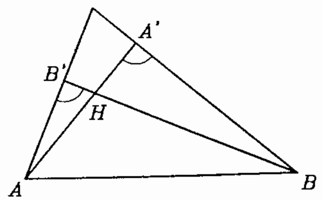
112. Ако се постави раван кроз осу купе и дијагоналу коцке, добија се у пресеку правоугаоник страница a и $a\sqrt{2}$ уписан у једнакокраки троугао основице $2r$ и висине $H = r\sqrt{2}$ (сл. 28). Из сличности троуглова добија се $\dfrac{a}{r\sqrt{2}} = \dfrac{r - \frac{a}{2}\sqrt{2}}{r}$, одакле је $a = \dfrac{r\sqrt{2}}{2}$. Однос запремина купе и коцке је

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}r^2\pi H}{a^3} = \frac{\pi}{3}\,\frac{r^3\sqrt{2}}{\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{4\pi}{3}.$$

Одговор: A.



Сл. 28



Сл. 29

113. Тачке H и O не морају припадати унутрашњости троугла (на пример код тупоуглог троугла), док тачке T и S морају да се налазе у унутрашњости троугла.

Одговор: C.

114. Број је дељив са 45 ако и само ако је дељив са 9 и 5. Како је дати број дељив са 5, потребно је да збир његових цифара: $1+7+x+6+y+9+5 = 28+x+y$ буде дељив са 9, тј. $x+y=8$ или $x+y=17$. Постоје следеће могућности:

$$(x,y) \in \{(0,8),(1,7),(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(7,1),(8,0),(8,9),(9,8)\},$$

дакле има 11 оваквих бројева.

Одговор: A.

115. Троуглови AHB' и BHA' су слични (сл. 29) јер је $\angle AHB' = \angle BHA'$ и $\angle AB'H = \angle BA'H = 90°$. Одавде имамо $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{HB'}{HA'}$, тј. $AH = \dfrac{HB'}{HA'} \cdot BH = \dfrac{6}{9} \cdot 15 = 10\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

116. После једноставних трансформација налазимо да је:

$$a = \frac{3}{5} = \frac{189}{5\cdot 7\cdot 9}, \quad b = \frac{4}{7} = \frac{180}{5\cdot 7\cdot 9}, \quad \text{и} \quad c = \frac{5}{9} = \frac{175}{5\cdot 7\cdot 9},$$

па је $c < b < a$.

Одговор: E.

117. $2^{3000}\cdot 3^{2000} = (2^3)^{1000}\cdot(3^2)^{1000} = 8^{1000}\cdot 9^{1000} = (8\cdot 9)^{1000} = 72^{1000}$.

Одговор: B.

118. После сваког ударца Змају остаје једна глава мање, тако да после 1991-ог ударца Змају остају четири главе, које Баш-Челик може одсећи једним, 1992-им ударцем. Дакле, најмањи број удараца је 1992.

Одговор: D.

119. Из $v_1t_1 = v_2t_2$ и $v_2 = \frac{5}{4}v_1$ налазимо да је $t_1 = \frac{5}{4}t_2$, тј. $t_2 = \frac{4}{5}t_1 = 80\%\,t_1$. Значи да се време смањује за 20%.

Одговор: D.

120. Нека су x, y, z бројеви сати за које прва, друга, односно трећа цев саме могу напунити базен. Тада је $y = \frac{3}{2}x$ и $z = \frac{6}{5}x$, па је

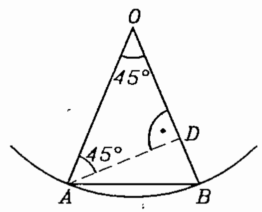
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{3}{2}x}+\frac{1}{\frac{6}{5}x} = \frac{1}{x}+\frac{2}{3x}+\frac{5}{6x} = \frac{15}{6x} = \frac{1}{8},$$

одакле је $x = 20$, $y = 30$ и $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{20}+\frac{1}{30} = \frac{1}{12}$. Дакле, ако би само прве две цеви пуниле резервоар, он би се напунио за 12 сати.

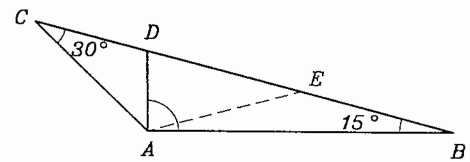
Одговор: B.

121. Унутрашњи угао од 135° има правилни осмоугао. Његов централни угао је 45°, па је (сл. 30) површина троугла ABO једнака $\frac{1}{2}OB\cdot AD = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (јер је полупречник описаног круга $r = 1\,\mathrm{cm}$, а троугао AOD једнакокрако-правоугли), па је површина правилног осмоугла $P = 8P_{\triangle ABO} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: B.



Сл. 30



Сл. 31

122. За $x > 0$ добијамо неједначину $\dfrac{x}{x(x-1)} > \dfrac{1}{3}$, тј. $\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{3}$, односно $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{3} > 0$, тј. $\dfrac{4-x}{3(x-1)} > 0$, чија су решења $1 < x < 4$.

За $x < 0$ неједначина постаје $-\dfrac{1}{x-1} > \dfrac{1}{3}$, тј. $\dfrac{-x-2}{3(x-1)} > 0$, чија су решења $-2 < x < 0$.

Значи, у скупу целих бројева неједначина има три решења: -1, 2, 3.

Одговор: C.

123. Хипотенуза основе је $c = \sqrt{35^2+12^2} = 37\,\text{cm}$, а површина основе $B = \dfrac{ab}{2} = 210\,\text{cm}^2$. Полупречник уписаног круга основе је

$$r = \frac{B}{\frac{a+b+c}{2}} = 5\,\text{cm}.$$

Како су бочне стране нагнуте према равни основе под једнаким угловима (од $60°$), то је центар уписаног круга основе подножје висине пирамиде, а све три апотеме су међусобно једнаке $h = 2r = 10\,\text{cm}$, па је површина омотача пирамиде $M = \frac{1}{2}(a+b+c)h = 420\,\text{cm}^2$ и $P = B + M = 630\,\text{cm}^2$.

Одговор: C.

124. Нека је E средиште дужи DE (сл. 31). Троугао BAD је правоугли, па је $\angle BAE = 15°$, $\angle CEA = \angle EAB + \angle AEB = 30°$ и због тога је троугао ACE једнакокраки, па је $CA = AE = \frac{1}{2}DB$, одакле се налази да је $DB = 2CA = 6\,\text{cm}$.

Одговор: E.

125.
$$\frac{\sqrt{4+\frac{9}{4}} - \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{25}}}}{2+\frac{3}{2}-\frac{1}{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt{\frac{25}{4}}-5}{2+\frac{3}{2}-5} = \frac{\frac{5}{2}-5}{\frac{4+3-10}{2}} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}.$$

Одговор: D.

126. Централносиметрични су квадрат, ромб и правоугаоник.

Одговор: C.

127.
$$\frac{a^{3n+2} - 2\cdot a^{3n+1} + a^{3n}}{a^{3n} - a^{3n-1}} = \frac{a^{3n}(a^2-2a+1)}{a^{3n-1}(a-1)} = \frac{a(a-1)^2}{a-1} = a(a-1) = a^2 - a.$$

Одговор: B.

128. Приметимо да је $7^2 + 24^2 = 25^2$, па је троугао на плану правоугли и његова површина је $P_1 = \dfrac{7\cdot 24}{2} = 84\,\text{cm}^2$. Површина парцеле у природној величини је $P = 84\,000\,000\,\text{cm}^2 = 0{,}84\,\text{ha}$.

Одговор: D.

129. Дата неједначина се може написати у облику $\dfrac{x(x-1)}{x(x+2)} - \dfrac{2}{5} \leqslant 0$, па је она за $x \neq 0$ еквивалентна неједначини $\dfrac{5(x-1)-2(x+2)}{5(x+2)} \leqslant 0$, тј. $\dfrac{3(x-3)}{5(x+2)} \leqslant 0$. Услов $x - 3 \geqslant 0$ и $x + 2 < 0$ не важи ни за једно x, па треба да буде $x - 3 \leqslant 0$ и $x + 2 > 0$. Решења су, дакле, $-2 < x \leqslant 3$ и због $x \neq 0$ четири цела броја: $-1, 1, 2, 3$ задовољавају дату неједначину.

Одговор: E.

130. Страница добијене коцке је $a_1 = \dfrac{110}{100}\left(\dfrac{90}{100}a\right) = \dfrac{99}{100}a$, где је a страница полазне коцке. Тако је $V_1 = a_1^3 = 0{,}99^3a^3 = 0{,}99^3V$.

Одговор: A.

131. Уочимо да је НЗС $(6,7,9) = 126$. Од свих бројева облика $\overline{517xy}$ само је број $51\,786$ дељив са 126, па је тражени збир $8+6 = 14$.

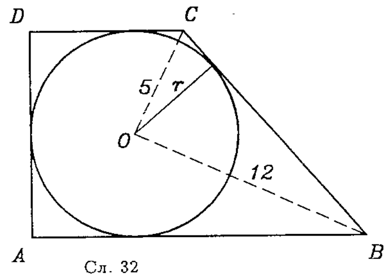
Одговор: A.

132. За $x \leqslant 0$ имамо: $x - x - x + 1 = 2$ и решење $x_1 = -1$. За $0 < x \leqslant 1$ имамо: $x + x - x + 1 = 2$ и решење $x_2 = 1$. За $x > 1$ имамо: $x + x + x - 1 = 2$ и овде нема решења.

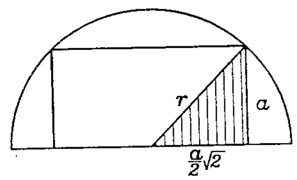
Одговор: C.

133. OB и OC су симетрале два суплементна угла, па је $\angle BOC = 90°$. По Питагориној теореми је $BC = \sqrt{OB^2+OC^2} = 13\,\text{cm}$, па је површина троугла BOC (сл. 32): $\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 5 = \frac{1}{2}\cdot 13\cdot r$ и одавде $r = \dfrac{60}{13}\,\text{cm}$.

Одговор: D.



Сл. 32



Сл. 33

134. Нека је Ката донела x, а Ната $300 - x$ јаја. Цена по којој је Ката продавала јаја је $\dfrac{45}{300-x}$, а Ната $\dfrac{20}{x}$. По услову задатка је

$$x\cdot\frac{45}{300-x} = (300-x)\cdot\frac{20}{x},$$

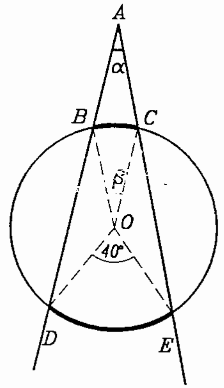
тј. $9x^2 = 4(300-x)^2$. Одавде је $3x = 2(300-x)$, или $3x = -2(300-x)$. У првом случају је $x = 120$ ($300 - x = 180$), а у другом решење нема смисла.

Одговор: B.

135. Ако се постави раван кроз дијагоналу коцке нормално на раван основе, у пресеку добијамо правоугаоник страница a и $a\sqrt{2}$ уписан у полукруг полупречника r, сл. 33. Како је $r^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3}{2}a^2$, то је

$$\frac{V_{pl}}{V_k} = \frac{\frac{2}{3}r^3\pi}{a^3} = \frac{\frac{2}{3}\left(a\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^3\pi}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Одговор: E.



Сл. 34

136. Нека је β централни угао који одговара мањем луку $\overset{\frown}{BC}$, сл. 34. Тада је $\beta : 40 = 3 : 10$, па је $\beta = 12°$, а $\angle BEA = \frac{\beta}{2} = 6°$, као периферијски угао над BC. На исти начин $\angle DBE = 20°$; због тога је $\angle ABE = 160°$, па је $\alpha = 180° - (160° + 6°) = 14°$.

Одговор: C.

137.

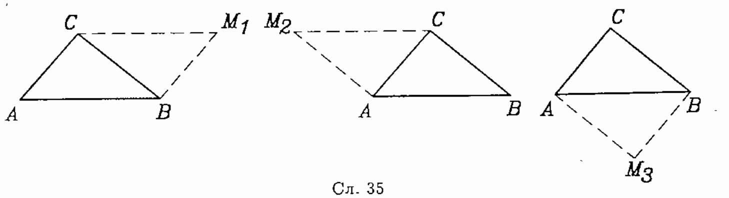
$$\left(\frac{a^2+b^2}{ab}+2\right) : \left(\frac{a^2+b^2}{ab}-2\right) = \frac{(a+b)^2}{ab} : \frac{(a-b)^2}{ab} = \left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2$$

За $a = 14$, $b = 6$ вредност израза је $\left(\frac{14+6}{14-6}\right)^2 = 6{,}25$.

Одговор: B.

138. Постоје три овакве тачке (сл. 35).

Одговор: D.



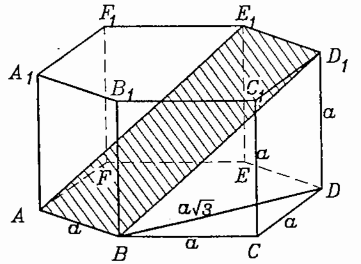
Сл. 35

139. Тачни су искази (I) и (III).

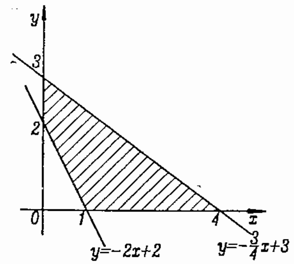
Одговор: C.

140. Како је $BD_1 = \sqrt{BD^2 + DD_1^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$, то је површина правоугаоника ABD_1E_1 једнака (сл. 36): $a \cdot 2a = 2a^2$.

Одговор: A.



Сл. 36



Сл. 37

141. $P = \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{2 \cdot 1}{2} = 5$ (сл. 37).

Одговор: C.

142. Хипотенуза троугла је $c = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\,\mathrm{cm}$, а полупречник уписаног круга

$$r = \frac{P}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{600}{\frac{30+40+50}{2}} = 10\,\mathrm{cm},$$

при чему је $P = \frac{ab}{2} = 600\,\mathrm{cm}^2$. Површина круга је $P_1 = r^2\pi = 100\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: C.

143. Унутрашњи угао правилног m-тоугла износи $\frac{(m-2)\cdot 180°}{m}$. Из

$$\frac{(m-2)\cdot 180°}{m} : \frac{(n-2)\cdot 180°}{n} = 5 : 4$$

добијамо $\frac{m-2}{m} : \frac{n-2}{n} = 5 : 4$, а одавде је $m = \frac{8n}{10-n}$. Како је m природан број, мора бити $3 \leqslant n \leqslant 9$. Провером налазимо следеће могућности: $m = 8$, $n = 5$; $m = 12$, $n = 6$; $m = 32$, $n = 8$; $m = 72$, $n = 9$. Постоје, дакле, четири пара (m, n).

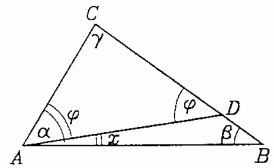
Одговор: B.

144. У књизи има 9 страница са једноцифреним, 90 са двоцифреним и $n - 99$ са троцифреним ознакама. Из $9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot (n - 99) = 1998$ налазимо $n = 702$.

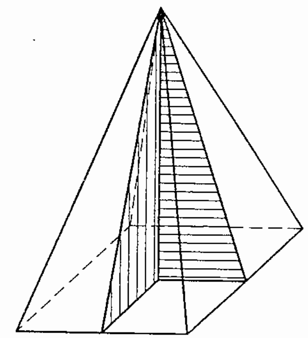
Одговор: D.

145. Из $\triangle ACD$, сл. 38, имамо $\alpha - x + \alpha - x + \gamma = 180°$, тј. $2\alpha - 2x + 180° - \alpha - \beta = 180°$, тј. $\alpha - \beta = 2x$. Дакле, $x = \frac{\alpha - \beta}{2} = 15°$.

Одговор: E.



Сл. 38


Сл. 39

146. Неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{|x-2|}{(x-2)(x-3)} \geqslant 1$. За $x > 2$ имамо $\frac{1}{x-3} - 1 \geqslant 0$, тј. $\frac{4-x}{x-3} \geqslant 0$. Једино целобројно решење је $x_1 = 4$. За $x < 2$ добија се $-\frac{1}{x-3} - 1 \geqslant 0$, тј. $\frac{x-2}{x-3} \leqslant 0$ и овде нема целобројних решења. Дакле, једини цео број такав да важи дата неједначина је број $x_1 = 4$.

Одговор: B.

147. Нека је x број ораха. Први мајмун добија $3+\dfrac{x-3}{10}$ ораха, а други $6+\dfrac{x-\left(3+\dfrac{x-3}{10}+6\right)}{10}$. Из

$$3+\frac{x-3}{10}=6+\frac{x-\left(3+\dfrac{x-3}{10}+6\right)}{10}$$

налазимо $x=243$. Сви мајмуни добијају по 27 ораха, па има девет мајмуна.

Одговор: D.

148. Висине основе су $h_1=\dfrac{90}{10}=9\,\text{cm}$ и $h_2=\dfrac{90}{18}=5\,\text{cm}$, сл. 39, а апотеме $h_a=\sqrt{H^2+\left(\dfrac{h_1}{2}\right)^2}=7{,}5\,\text{cm}$ и $h_b=\sqrt{H^2+\left(\dfrac{h_2}{2}\right)^2}=6{,}5\,\text{cm}$, па је површина омотача

$$M=2\left(\frac{ah_a}{2}+\frac{bh_b}{2}\right)=10\cdot 7{,}5+18\cdot 6{,}5=192\,\text{cm}^2.$$

Одговор: A.

149. $x=145\frac{5}{6}$.

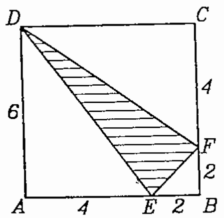
Одговор: D.

150. Могуће је извадити 9 куглица, а да међу њима не буду 2 црвене и 3 плаве (7 црвених и 2 плаве!). Дакле, најмањи број куглица које треба извадити је 10.

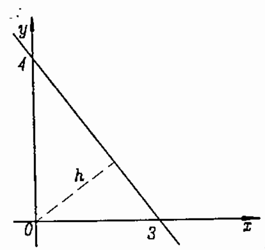
Одговор: B.

151. $P_{\triangle EFD}=P_{\square ABCD}-P_{\triangle AED}-P_{\triangle FCD}-P_{\triangle EBF}=36-2\cdot\dfrac{6\cdot 4}{2}-\dfrac{2\cdot 2}{2}=10\,\text{cm}^2$, сл. 40.

Одговор: D.



Сл. 40



Сл. 41

152. Нека је a почетна цена робе. После повећања цена је $1{,}6a$, а како $0{,}6a$ износи 37,5% од $1{,}6a$, то нову цену треба снизити за 37,5% да би се вратила на првобитни ниво.

Одговор: A.

153. У овом броју појављује се 9 једноцифрених и 90 двоцифрених бројева, што представља $9+2\cdot 90=189$ места у низу. Како је $1998-189=1809$ и $1809:3=603$, то је на 1998. месту последња цифра 603. троцифреног броја. Тај број је 702, а његова последња цифра је 2.

Одговор: C.

154. Када квадрат ротира око странице добија се ваљак, па је $V_1=a^2\pi\cdot a=a^3\pi$, а када ротира око дијагонале добијају се две купе, па је

$$V_2=2\cdot\frac{\left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2\pi\cdot\frac{a}{2}\sqrt{2}}{3}=\frac{a^3\pi\sqrt{2}}{6},$$

па је $V_2:V_1=\sqrt{2}:6$.

Одговор: A.

155. Тражено растојање је висина правоуглог троугла чије су катете 3 и 4 (а хипотенуза 5), сл. 41. Из $\dfrac{h\cdot 5}{2}=\dfrac{3\cdot 4}{2}$ налазимо $h=\dfrac{12}{5}=2{,}4$.

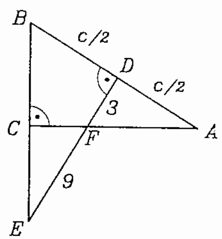
Одговор: A.

156. Из услова задатка се добија $m+\dfrac{m}{3}+z+\dfrac{z}{5}=63$, одакле је $20m+18z=945$, што је немогуће — лева страна једначине је паран, а десна непаран број ! Дакле, мора бити Милан Зоранов син, или обрнуто. У првом случају је $m+\dfrac{m}{3}+5m=63$, тј. $19m=315$ — немогуће, а у другом $m+\dfrac{m}{3}+\dfrac{m}{15}=63$, одакле је $m=45$. Дакле, Милан је уловио 45 риба, његов син Зоран 15, а његов унук — 3 рибе.

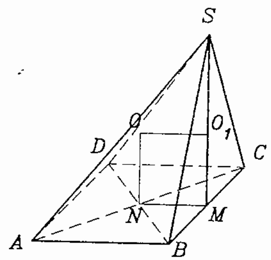
Одговор: B.

157. Троуглови BDE и FDA су слични, сл. 42. Из $\dfrac{BD}{DF}=\dfrac{DE}{DA}$ имамо $\dfrac{c/2}{3}=\dfrac{12}{c/2}$, па је $c=12\,\text{cm}$.

Одговор: E.



Сл. 42



Сл. 43

158. За $x\neq 13$ неједначина је еквивалентна неједначини $|13-x|<6$, тј. $-6<x-13<6$, односно $7<x<19$. Решења неједначине су следећи цели бројеви: 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 18.

Одговор: C.

159. Добија се

$$x = \frac{k^2+7}{k-1} = \frac{k^2-1+8}{k-1} = k+1+\frac{8}{k-1}.$$

Због $k-1 \mid 8$ долази у обзир само $k \in \{0,-1,2,3,5,9,-3,-7\}$. За $k=0$, $k=-1$, $k=-3$, $k=-7$, $x \notin \mathbf{N}$; x је природан број за $k \in \{2,3,5,9\}$.

Одговор: B.

160. Нека је O центар сфере, сл. 43. Тада је $O_1M = \dfrac{H}{3} = 1\,\mathrm{cm}$ јер је троугао BCS једнакостранични. Такође је и $ON = O_1M = 1\,\mathrm{cm}$, па из троугла ANO добијамо $r^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{3}\right)^2$, $r = a\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{7}\,\mathrm{cm}$.

Одговор: C.

161. Тачни су II и V исказ. Једнакост I је тачна само за $a=0$; једнакост III није тачна, на пример, за $a=-2$, а једнакост IV није тачна, на пример, за $a=-1$.

Одговор: E.

162. Добија се $x = 4{,}5$.

Одговор: C.

163. Када се слој дебљине једне коцкице уклони са квадра, остаје квадар димензија 2, 4 и 7 cm, па остаје $2\cdot4\cdot7 = 56$ коцкица. Дакле, уклоњено је $4\cdot6\cdot9 - 2\cdot4\cdot7 = 160$ коцкица.

Одговор: D.

164. Једначина је еквивалентна једначини $|x-1|+|x-2| = 2$. За $x \leqslant 1$ добија се $1-x+2-x=2$ и решење $x_1 = 1/2$. За $1 < x \leqslant 2$ добија се $x-1+2-x=2$, па овде нема решења. За $x > 2$ добија се $x-1+x-2=2$ и друго решења $x_2 = 5/2$.

Одговор: C.

165. Из $\dfrac{n(n-3)}{2} = 170$, тј. $n(n-3) = 340 = 20\cdot17$ налазимо $n=20$. Унутрашњи угао овог n-тоугла је $\dfrac{(n-2)\cdot180^\circ}{n} = \dfrac{18\cdot180^\circ}{20} = 162^\circ$.

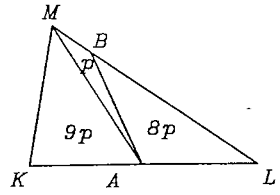
Одговор: C.

166. Нека су A, B, C ученици осмог, D и E седмог и F ученик шестог разреда. Бар један ученик осмог разреда се може изабрати на 7 начина (ABC, AB, AC, BC, A, B, C), бар један ученик седмог разреда на три начина (DE, D, E) и бар један ученик шестог разреда на један начин (F). Дакле, број избора је $7\cdot3\cdot1 = 21$.

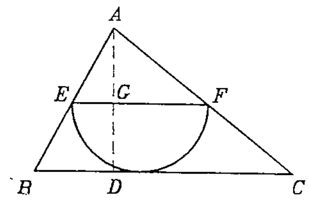
Одговор: E.

167. Троуглови KAM и ALM, сл. 44, имају једнаке основице и заједничку висину, па је $P_{\triangle KAM} = P_{\triangle ALM}$. Слично, $P_{\triangle BAL} = \frac{8}{9}P_{\triangle MAL}$. Ако означимо $P_{\triangle MBA} = P$, биће $P_{\triangle BAL} = 8P$ и $P_{\triangle KLM} = 18P$, па је $\dfrac{P_{\triangle BAL}}{P_{\triangle KLM}} = \dfrac{8P}{18P} = \dfrac{4}{9}$.

Одговор: A.



Сл. 44



Сл. 45

168. Из сличности троуглова ABC и AEF, сл. 45, следи $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{EF}{AG}$, тј. $\dfrac{12}{9} = \dfrac{2r}{9-r}$, одакле је $r = 3{,}6\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.

169. Означимо са m_1, m_2 масе и c_1, c_2 одговарајуће цене дијаманата. Из

$$\frac{m_2^2}{m_1^2} = \frac{c_2}{c_1} = 0{,}75 = \frac{3}{4}$$

следи $\dfrac{m_2}{m_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, па је тражено смањење $p = \left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\% \approx 13{,}4\%$.

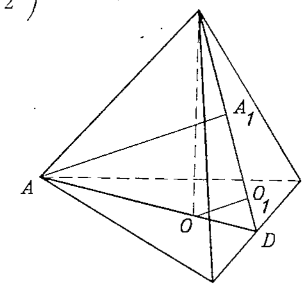
Одговор: C.

170. Нека је AA_1 висина која одговара бочној страни MBC тетраедра $MABC$, сл. 46. Из

$$\frac{AA_1}{OO_1} = \frac{AD}{OD} = \frac{3}{1}$$

налазимо $AA_1 = 3OO_1 = 24\,\mathrm{cm}$, па је $V = \frac{1}{3}P_{\triangle MBC}\cdot AA_1 = 600\,\mathrm{cm}^3$.

Одговор: A.



Сл. 46

171. Означимо са v_b и v_d брзине брода (у мирној води) и тока Дунава, а са s одстојање Новог Сада и Београда. Тада је

$$v_b + v_d = \frac{s}{5}, \qquad v_b - v_d = \frac{s}{7},$$

одакле је $2v_d = \frac{s}{5} - \frac{s}{7} = \frac{2s}{35}$. Дакле, $v_d = \frac{s}{35}$. Путовање сплава траје $\dfrac{s}{v_d} = \dfrac{s}{s/35} = 35\,\mathrm{h}$.

Одговор: D.

172. Из $\overline{xx}\cdot\overline{yx}\cdot\overline{xyx} = 1001\,\overline{xyx}$, због $x \neq y$ ($\neq 0$), следи $\overline{xx}\cdot\overline{yx} = 1001$, тј. $11x\cdot\overline{yx} = 7\cdot11\cdot13$, односно $x\cdot\overline{yx} = 7\cdot13$. Случај $x=7$, $\overline{yx}=13$ не долази у обзир, па мора да буде $x=1$, $\overline{yx}=91$, односно $y=9$. Тада је $y-x=8$.

Одговор: B.

173. а) 0; б) $\frac{8}{5}$; в) 35. **174.** а) $x=5$; б) $x=25$. **175.** а) $\frac{a+3}{2}$; б) 1.

176. а) 12; б) 14.

177. Из $|x-y|=|n-8|=1$ налазимо $n_1=9$, $n_2=7$. Тражени бројеви су 120 и 119, односно 64 и 65.

178. а) $4(x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2=0$, па је $x=1$, $y=-1$; б) $(x-3)^2+(\sqrt{y}-2)^2=0$, па је $x=3$, $y=4$; в) $(x+1)^2+(y-3)^2=0$, па је $x=-1$, $y=3$. **179.** -5 или 5.

180. Упутство: применити формулу за разлику квадрата. **181.** а) $-\sqrt{2}$; б) $18\sqrt{3}$.

182. а) $\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1=2\sqrt{2}$; б) 8.

183. $S=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\dots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}=\sqrt{100}-1=9$.

184. а) 3^3; б) $\frac{8a^6}{b^9}$; в) x^4; г) $-\frac{1}{3}$; д) $6a^6$; ђ) 0. **185.** а) a^{y-1}; б) a^{2y}.

186. а) $A=3^{n+2}\cdot 2^{2n+3}(1+3\cdot 2)=7\cdot 3^{n+2}\cdot 2^{2n+3}$; б) $B=5^{2n}\cdot 7^{2n}\cdot 11^{2n}(7+11-5)=13\cdot 5^{2n}\cdot 7^{2n}\cdot 11^{2n}$.

187. а) $x_1=2000$; б) $x_1=-1997$, $x_2=1996$. **188.** а) $x_1=2$, $x_2=5$; б) $x_1=-1$; в) мора да буде $x+|x|\neq 0$, тј. $x>0$, па су решења $x_1=1$, $x_2=2$. **189.** а) $x_1=1000$. Упутство: увести смену $x=y+1000$; б) $x_1=-2{,}5$. **190.** а) $x_1=2$, $x_2=4$; б) $x_1=-3$, $x_2=1$. **191.** а) $x_1=-8$, $x_2=6$; б) $x_1=2$; в) $x\in[-3,3]$; г) $x\in[-1,1]$.

192. Смена: $\frac{1}{x}=t$. Решења: $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=3$. **193.** 54.

194. Нека жена сама опере судове за x часова. Из $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{1}{4}$ налази се $x=6\,\mathrm{h}$.

195. Из $\frac{4000}{0{,}8x}=\frac{4500}{x}+1$ добија се $x=500$ динара.

196. Нека је читао по x страница дневно. Из $\frac{312}{x-7}=14+\frac{312}{x+7}$ налазимо $x=19$.

197. Нека је x већи сабирак. Из $x=2(60-x)+3$ налазимо $x=41$.

198. Из $0{,}8x=0{,}6(x+15)$ налазимо $x=45\,\mathrm{l}$.

199. Из $12x+5\cdot 70=(x+5)\cdot 37$ добијамо $x=6{,}6\,\mathrm{l}$. **200.** 400 km.

201. Из $\frac{s}{5}+\frac{s}{3}=60\cdot 24$ налазимо $s=2700\,\mathrm{m}$. **202.** 30 часова.

203. Из $\frac{1}{15}t=\frac{1}{20}(t+2{,}5)$ налази се $t=7{,}5$ минута. **204.** $v=36\,\mathrm{km/h}$, $d=120\,\mathrm{m}$.

205. $v_{sr}=\frac{2s}{\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}}=\frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}=12\,\mathrm{km/h}$.

206. Искористити једнакост $\frac{s}{v}=\frac{s/2}{v_1}+\frac{s/4}{v_2}+\frac{s/4}{v_3}$. Биће $v_3=120\,\mathrm{km/h}$.

207. Из $\frac{s/2}{80}+\frac{s/3}{60}+\frac{s-s/2-s/3}{40}=23$ добија се $s=1440\,\mathrm{km}$.

208. Из $\frac{1}{30}+\frac{x}{15}=\frac{1}{12}$ налазимо $x=\frac{3}{4}$ друге групе.

209. За један сат напуни се $\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$, а за два сата $\frac{1}{12}$ базена.

210. У троуглу EAC је $\angle CAE=\angle ADC+\angle ACD$. Одавде се добија $\angle A-\angle B=60°$.

211. Постоје две могућности: $40°$, $40°$, $100°$ или $80°$, $80°$, $20°$.

212. Нека је D пресечна тачка ових симетрала. Искористити чињеницу да је збир углова у троуглу ACD једнак $180°$. Тражени угао је $15°$. **213.** $\angle MCN=45°$.

214. Најпре доказати да је $\angle ASB=135°-\frac{\beta}{2}$ и $\angle ASC=135°-\frac{\gamma}{2}$. Добија се $\beta=25°$, $\gamma=65°$. **215.** $30°$, $60°$, $90°$.

216. Доказати $\triangle AA_1B\cong\triangle HA_1C$, при чему је A_1 подножје одговарајуће висине. Из једнакокрако-правоуглог троугла AA_1C следи $\angle ACB=45°$.

217. Доказати да је тачка D ортоцентар троугла EBC.

218. Доказати да је троугао ABE једнакокраки. Дужине страница паралелограма су 11 cm и 14 cm.

219. Из $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}-\frac{360°}{n}=120°$ се добија $n=12$.

220. Из $\frac{n\cdot 180°}{n+2}=\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}+9°$ добија се $n=8$. **221.** $120°$.

222. Круг чији се полупречник тражи је уписани круг једнакостраничног троугла чија је висина пречник круга k. Добија се $r=\frac{8}{3}\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. **223.** $\sqrt{2+\sqrt{2}}\,\mathrm{cm}$ и $\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\mathrm{cm}$.

224. За 4.

225. Из $\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=1$ добијамо да је страница квадрата $a=\frac{6}{5}\,\mathrm{cm}$ и $O=\frac{24}{5}\,\mathrm{cm}$, $P=\frac{36}{25}\,\mathrm{cm}^2$. **226.** $d_1=\sqrt{a^2-ab+b^2}$, $d_2=\sqrt{a^2+ab+b^2}$. **227.** 8 cm.

228. $P=60\,\mathrm{cm}^2$. **229.** $P=a^2$.

230. а) $P_{\triangle ABC}=\frac{1}{7}P_{\triangle XYZ}=168\,\mathrm{cm}^2$; б) $P_{PQMN}=5\,\mathrm{cm}^2$.

231. б) Упутство: уочимо да је $h_a=\frac{2P}{a}$, $h_b=\frac{2P}{b}$, $h_c=\frac{2P}{c}$, а затим применимо резултат а).

232. $P=54\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. Упутство: одстојање средишта странице BC од праве AB једнако је половини висине троугла из темена C.

233. а) Искористити чињеницу да троуглови OAB и OAD, а такође и троуглови OCD и OBC имају заједничку висину.

235. Из $a+b=14$ следи $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=196$, а како је $a^2+b^2=100$, то је $2ab=96$ и $P=ab=48\,\mathrm{cm}^2$.

236. Из $b=2h_a$ и $a=2h_b$, $h_a:h_b=2:3$ налазимо $a=12\,\mathrm{cm}$, $h_a=4\,\mathrm{cm}$ ($b=8\,\mathrm{cm}$ и $h_b=6\,\mathrm{cm}$), па је $P=48\,\mathrm{cm}^2$.

237. Оштар угао паралелограма је такође $60°$ (углови са нормалним крацима). Резултат: $P=12\,\mathrm{cm}^2$.

238. $1:4$. **239.** $h=5\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $P=75\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$, $d=10\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $\varphi=30°$.

240. Нека је E средиште дужи AB и F подножје нормале из A на DE. Тада је $\angle DAF=60°$, а $P_{ABCD}=3P_{ADF}=75\,\mathrm{cm}^2$. **241.** $P=12\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.

242. Нека је E подножје висине из D на AB. Доказати да је $EB=\frac{AB+CD}{2}$. Резултат: $P=2\,\mathrm{cm}^2$. **243.** $P_{EBC}=\frac{1}{2}P$.

244. а) $P = h^2$. Упутство: доказати да је средња линија трапеза једнака висини. б) $90°$.

245. Упутство: како је у трапез уписан круг, збирови наспрамних страница су једнаки. Резултат: $a = 3r$, $c = \frac{5}{2}r$, $b = \frac{3}{2}r$, $d = 2r$.

246. $a = 8\,\mathrm{cm}$, $b = 2\,\mathrm{cm}$, $c = 5\,\mathrm{cm}$. Упутство: искористити чињеницу да је $a + b = 2c$.

247. $2:1$. **248.** $O = 20\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$, $P = 100(2+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

249. $O = 30(1+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$, $P = 100(3+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

250. Нека је S центар круга, а r његов полупречник. Површина троугла ABC се може израчунати применом Херонове формуле (или на неки други начин): $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 6\sqrt{6}\,\mathrm{cm}^2$. С друге стране, $P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ASC} + P_{\triangle BSC} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2}$, одакле је $r = \frac{12\sqrt{6}}{11}$ и површина круга $\frac{864\pi}{111}$.

251. $P = 15\,\mathrm{cm}^2$. Упутство: лукови су пропорционални полупречницима.

252. $a:b:c:d = :$ а) $9:12:10:15$; б) $12:18:21:77$; в) $18:24:20:21$; г) $32:132:210:119$.

253. Из $800t+1200t+750t = 1100$ налазимо $t = 0{,}4$, па су трошкови за јабуке $800\cdot 0{,}4 = 320$ динара, за грожђе $1200\cdot 0{,}4 = 480$ динара и за крушке $750\cdot 0{,}4 = 300$ динара.
254. 18 000, 15 000, 48 000.

255. а) Ради се о директној пропорционалности. Из $x : 18 = 35 : 10$ добија се $x = 63\,\mathrm{m}$. б) Овде се ради о обрнутој пропорционалности. Из $x : 4 = 6 : 8$ добија се $x = 3$ дана. **256.** $26\frac{2}{3}\,\mathrm{m}$. **257.** 16 радника. **258.** 10 дана. **259.** $17{,}5\,\mathrm{h}$.
260. $32\,\mathrm{h}$. **261.** Још 11 радника. **262.** У 13^{30} часова. **263.** За 25%.
264. 20% умањеника, 25% умањиоца.

265. $\frac{a_1}{b_1} = \frac{1{,}2a}{0{,}8b} = 1{,}5\,\frac{a}{b}$ — количник је повећан за 50%. **266.** За $\frac{1}{12}$ или $8\frac{1}{3}\%$.

267. Нека је c тражена цена. После снижења цена је $\frac{4}{5}c$, па се за 120 динара може купити $120 : \frac{4}{5}c = \frac{150}{c}$ метара платна. Из $\frac{150}{c} - \frac{135}{c} = 1$ добија се $c = 15$ динара.

268. 600 g воде. **269.** 4,2 kg. **270.** 500 kg.

271. Упутство: разматрати случајеве $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$, $k \in \mathbf{Z}$.

272. Ако је $p = 3k+1$ или $p = 3k+2$, $k \in \mathbf{N}$, провери се да је број $8p^2+1$ сложен. За $p = 3$ је $8p^2+1 = 73$ прост број.

273. а) $p = 2$; б) такав број не постоји. **274.** $p = 3$, $q = 2$.

275. Посматрати последњу цифру бројева облика 7^n, $n \in \mathbf{N}$.

276. Бројеви облика 43^{4k+3} и 37^{4l+1} $(k, l \in \mathbf{N})$ завршавају се цифром 7, па је њихова разлика дељива са 10.

277. Последње две цифре бројева 9^n, $n = 1, 2, \ldots, 11$ су, редом: 09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09 и овај низ се периодично понавља са периодом 10. Дакле, последње две цифре броја 9^{99} су исте као и броја 9^9 (тј. 89), а број $9^{99}+1$ се завршава једном нулом.

278. Број $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ се завршава цифром 1, 3 или 7, јер се $n(n+1)$ завршава цифром 0, 2 или 6, па број n^2+n+1 никада није дељив са 5.

279. Упутство: посматрати последње цифре леве и десне стране једначине.

280. $\frac{\text{НЗС}(35,28)}{\text{НЗД}(99,121)} = \frac{140}{11}$.

281. Уочимо да је $450 = 2\cdot 3^2\cdot 5^2$. а) $2\cdot 450 = 30^2$; б) $60\cdot 450 = 30^3$.

282. $x = 21$, $y = 35$, $x + y = 56$.

283. Из $10a + b + 10b + a = n^2$ следи да збир $a + b$ мора бити дељив са 11. Тражени бројеви су: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83 и 92.

284. Међу шест узастопних природних бројева бар један је дељив са 5, а има и три парна, па је производ дељив са 10 и последња цифра је 0. Међу овим бројевима су, такође, и два дељива са 3, па је производ дељив са 9. Из $9 \mid 216{*}160$ налазимо и другу непознату цифру. Она је једнака 2.

285. Производ може бити $4444 = 4\cdot 11\cdot 101$ или $44444 = 4\cdot 41\cdot 271$. У првом случају постоје три могућности: $44\cdot 101$, $22\cdot 202$ и $11\cdot 404$, а у другом само једна — $82\cdot 542$ (јер је број 271 прост). **286.** 37 и 18 или 74 и 3.

287. Из $\overline{abc} = 43x + x = 44x$ видимо да је $\overline{abc}$ највећи троцифрен број дељив са 44, а то је број 968.

288. $n = 6a + 4 = 2(3a+2)$, $n = 15b + 7$. Како је n паран број, b мора бити непарно: $b = 2k+1$, $k \in \mathbf{Z}$. Дакле, $n = 15(2k+1) + 7 = 30k + 22$.

289. Искористити једнакост $3193 = 31\cdot 103$, при чему су 31 и 103 прости бројеви. Нова цена је или 1 динар или 31 динар.

290. Једине две могућности да се 72 представи као производ три природна броја, при чему је збир чинилаца једнак, су $2\cdot 6\cdot 6 = 3\cdot 3\cdot 8$. Дакле, број трамваја је 14, а како постоји најстарији син, Алгебрићева деца имају 8, 3 и 3 године.

291. а) Једнакост се може написати у облику $(x-2y)(2x-y) = 5$. Решења у скупу $\mathbf{N}$ су $(1,3)$ и $(3,1)$. б) Упитство: помножити леве и десне стране једнакости са 4. Решења су $(5,8)$ и $(20,22)$.

292. Упутство: а) $A = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$; б) $B = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} - m$; в) $C = \frac{(m-2)(m-1)m(m+1)(m+2)}{120}$.

293. $(2m+1)^2 - (2n+1)^2 = 4(m-n)(m+n+1)$, а бројеви $m-n$ и $m+n+1$ су различите парности.

294. Како је $3(7n+5) - 7(3n+2) = 1$, разломак не може да се скрати ни за један природни број n.

295. Упутство: $n^2 - n + 2 = (n+3)(n-4) + 14$.

296. Тачне су реченице $2°$ и $5°$.

297. а) То је права, нормална на раван троугла, која садржи центар описаног круга тог троугла. б) Искористити резултат а). **298.** $MN = 3\,\mathrm{cm}$.

299. Упутство: доказати да је $BC^2 + BS^2 = SC^2$ и $CD^2 + DS^2 = SC^2$.

300. $P = 28\,\mathrm{cm}^2$.

301. Хипотенуза се налази из једначине $12^2 + (c-6)^2 = c^2$; добија се $c = 15\,\mathrm{cm}$. Како је $H = c$, биће $V = \frac{12\cdot 9}{2}\cdot 15 = 810\,\mathrm{cm}^3$. **302.** 6 cm, 9 cm, 16 cm.

303. $P = 80\,\mathrm{cm}^2$. **304.** $P = a^2(3+\sqrt{2})$, $V = \frac{a^2}{2}$. **305.** $P = 100(3+2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

306. Упутство: уочити тачку E на правој AB такву да је $CE \parallel BD$. Резултат: $P = (460 + 48\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$, $V = 600\,\mathrm{cm}^3$.

307. а) Коцка „вири" изван воде; ниво се подигао за 15 cm. б) Вода прекрива коцке; ниво воде је подигнут за 35 cm.

308. Доказати, прво, да је у сваком паралелограму збир квадрата дијагонала једнак збиру квадрата страница. Тражене површине су $200\,\mathrm{cm}^2$ и $300\,\mathrm{cm}^2$.

309. $P = a^2(1+\sqrt{3})$, $V = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **310.** $c = \sqrt{1241}\,\mathrm{cm}$, $P = 1400\,\mathrm{cm}^2$.

311. $V = 432\,\mathrm{cm}^3$. **312.** $V = 3\,\mathrm{cm}^3$.

313. $\angle BOC = 90^\circ$. Упутство: доказати да је $BO^2 + CO^2 = BC^2$.

314. $P = 2\sqrt{3} + \sqrt{15}\,\mathrm{cm}^2$. **315.** $P = 16\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$. **316.** а) $V = \dfrac{3}{4}a^3\sqrt{3}$; б) $\alpha = 60^\circ$. **317.** $1:5$ (в. зад. 564). **318.** $P = 6 - 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$. **319.** $P = 252\,\mathrm{cm}^2$ (в. зад. 123). **320.** $P = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}(1+\sqrt{2})\,\mathrm{cm}^2$. **321.** $V_o : V_k = \sqrt{2} : \sqrt{\sqrt{3}}$.

322. а) да; б) не; в) не.

323. Искористити сличност троуглова ABD и ABC. Резултат: $AB = 6\,\mathrm{cm}$.

324. а) Искористити сличност троуглова ABE и ADC, где је E подножје висине из тачке E, а D тачка описаног круга дијаметрално супротна тачки A; б) искористити резултат а).

325. Нека је D средиште основице BC, O центар уписаног круга и M додирна тачка уписаног круга и странице AB. Троуглови AMO и ADB су слични. Резултат: $P = 54\,\mathrm{cm}^2$.

326. а) Нека је D тачка праве CM таква да је $AD \parallel BC$. Тада важи $\triangle BMC \sim \triangle AMD$ и $AD = AC$. б), в), г) Искористити реазултат а). Површина троугла у задатку б) је $50\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$.

327. Искористити подударност троуглова ADE и ADC, као и сличност троуглова ABC и DBE. Резултат: $DE = \dfrac{10}{3}\,\mathrm{cm}$.

328. $DF = 12\,\mathrm{cm}$. Искористити сличност троуглова ABC и ADF.

329. Како је $\angle ACD + \angle ABD = 180^\circ$, то је $\angle MCA = \angle MBD$ итд.

330. Слични су правоугли троуглови ABC и ACD. Добија се $CD = 3\,\mathrm{cm}$, $DB = 9\,\mathrm{cm}$.

331. Правоугли троуглови ABC и BED су слични. Одатле се налази $BD = 15\,\mathrm{cm}$.

332. Нека је G пресек правих AB и EF. Из сличности троуглова AGF и EDF (због $GF = EF$) налазимо $EF = 6\,\mathrm{cm}$.

333. Искористити сличност троуглова ACM и ABC (M је тачка у којој симетрала угла AB сече страницу BC). Резултат: $BC = \sqrt{10}\,\mathrm{cm}$.

334. Нека је $QE \cap AR = \{K\}$; доказати да су троуглови AQK и BAP слични.

335. $DM = 4\,\mathrm{cm}$. Упутство: троуглови AMD и ABE су слични.

336. $P = 1\,\mathrm{cm}^2$. Упутство: искористити сличност троуглова AMN и DNC.

337. Нека је E подножје висине из D на AB. Како је $\angle ADB = 90^\circ$, то су троуглови AED, BED и ABD слични. Резултати: $d = 8\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$, $c = 4\sqrt{5}\,\mathrm{cm}$. **338.** $\dfrac{ah}{a+b}$.

339. $CM = \dfrac{40}{3}\,\mathrm{cm}$. Упутство: искористити сличност троуглова ABN и MCN.

340. Искористити сличност троуглова AEC, ABO и COD, при чему је E тачка праве AB таква да је A–B–E и $BE = DC$. Површина трапеза је $P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$.

341. Како је $PQ \parallel AB \parallel CD$, то је

$$\frac{PQ}{AS} = \frac{CQ}{CA} = \frac{1}{\frac{CA}{CQ}} = \frac{1}{1+\frac{QA}{CQ}} = \frac{1}{1+\frac{AS}{CD}},$$

одакле је $PQ = \dfrac{AB \cdot CD}{2CD + AB} = 2\,\mathrm{cm}$

342. 34 и 23.

343. Из $\dfrac{a}{10} + \dfrac{b}{15} = \dfrac{11}{6}$ и $\dfrac{a+1}{10} = \dfrac{b+1}{15}$ налази се $a = 9$, $b = 14$.

344. Жарко 170 cm, Дарко 153 cm.

345. У прво 31, друго 32, треће 30, четврто 34, пето 32, шесто 33, седмо 35 и осмо 31 ученик. **346.** $-1, 1, 3, 6, 11$.

347. Нека су u и v брзине Аце, односно Бранка, t_1, t_2 време од почетка до првог, односно другог сусрета и l дужина улице. Из $ut_1 = 300$, $ut_2 = l + 400$, $vt_1 = l - 300$, $vt_2 = 2l - 400$ налазимо: а) $l = 500\,\mathrm{m}$; б) $\dfrac{u}{v} = \dfrac{3}{2}$.

348. 8 књига. **349.** 7,5 часова. **350.** Милан за три, Никола за шест дана (в. зад. 521). **351.** 3 часа. **352.** За 40%.

353. После замене $x = 1 + \sqrt{3}$ добија се $(4a+b+42) + (2a+b+18)\sqrt{3} = 0$, а како је $\sqrt{3}$ ирационалан број, мора да буде $4a + b + 42 = 0$ и $2a + b + 18 = 0$, одакле је $a = -12$, $b = 6$.

354. Решења: $(2,5)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-5)$. Упутство: једначину написати у облику $(n+m)(3n-m) = 7$. **355.** Два трактора.

356. Ако су x и y брзине путника A и B, важи

$$4(x+y) = 3\frac{3}{5}(x+y+1) \quad \text{и} \quad 6(x-y) = \frac{1}{6}\cdot 3\frac{3}{5}(x+y+1).$$

Одавде је $x = 5\,\mathrm{km/h}$, $y = 4\,\mathrm{km/h}$, а $s = 36\,\mathrm{km}$.

357. $(-1,-1,-1)$. Упутство: сабрати леве и десне стране све три једначине.

358. $x \geqslant 3$. **359.** а) $x \in (-3,+\infty) \cap [0,+\infty) = [0,+\infty)$; б) нема решења.

360. а) $-\dfrac{3}{4} < x < \dfrac{3}{2}$; б) нема решења; в) $-998 < x < 1000$; г) $-9 \leqslant x \leqslant 10$.

361. Упутство: видети задатак 95. Решења: а) $\dfrac{1}{5} < x < 3$; б) $-3 < x \leqslant 2$; в) $x < -\dfrac{2}{5}$ или $x > \dfrac{4}{3}$; г) $-2 < x < 1$; д) $x \leqslant -\dfrac{1}{3}$ или $x \geqslant \dfrac{1}{2}$.

362. Упутство: видети задатак 95. Решења: а) $x < -2$ или $x \geqslant 9$; б) $-2 \leqslant x < 3$; в) $0 \leqslant x < \dfrac{1}{2}$.

363. а) $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} < 0$; за $x \neq -1$ дата неједначина је еквивалентна неједначини $\dfrac{x-1}{x+2} < 0$; решење: $-2 < x < -1$ или $-1 < x < 1$.

б) $\dfrac{(x-1)(x+4)}{(x+2)(x-4)} < 0 \iff x \in (-4,-2) \cup (1,4)$.

в) $\dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-4)}<8 \iff \dfrac{x+3}{x-4}<8$ и $x\neq 3 \iff x\in(-\infty,3)\cup(3,4)\cup(5,+\infty)$.

364. а) $x\in(5/2,14/5]$; б) $-4<x<4$; в) $-98<x<100$; г) $x\in(-\infty,3/13)\cup(3,+\infty)$.

365. а) $-6\leqslant x<-5$; б) $x\in(-5,0)\cup(1,5)$.

366. а) $\dfrac{n(n+1)}{2}<n(n-2)\iff \dfrac{n+1}{2}<n-2\iff n>5$.

б) $1-\dfrac12+\dfrac12-\dfrac13+\cdots+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac1n+\dfrac1n-\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{999}{1000}\iff 1-\dfrac{1}{n+1}>\dfrac{999}{1000}\iff n>999$.

367. Ако је $b\in\mathbf{N}$, услов је $\dfrac ab>3$, ако је $b<-2$, услов је $\dfrac ab<3$, а ако је $b=-1$, услов је $a<-3$. За $b=0$, $b=-2$ разломак $\dfrac ab$, односно $\dfrac{a+6}{b+2}$ нема смисла.

368. Из $11<9x<12$ и $15<13x<16$ налазимо $x=1{,}23$. **369.** 12.

370. Постоје две могућности за број положених испита по годинама: 3, 4, 7, 8, 9 или 3, 5, 6, 8, 9.

371. $6:1$. **372.** $V=2\pi\sqrt3\,\mathrm{cm}^3$. **373.** $P=2\sqrt3\pi a^2$, $V=\dfrac{\pi}{2}a^3$.

374. $\dfrac{24}{7}\,\mathrm{cm}$.

375. $V_1:V_2=b:a$. Искористити једнакост $ah_a=bh_b$, при чему су h_a и h_b висине паралелограма. **376.** $32:9$.

377. $r=2\sqrt3\,\mathrm{cm}$. Упутство: површину осног пресека купе изразити на два начина — преко r и s. **378.** 2,5 cm.

379. $V=12\,\mathrm{cm}^3$. Упутство: посматрати пресек пирамиде једном равни која садржи висину пирамиде и паралелна је једном пару основних ивица.

380. $P=9\pi\,\mathrm{cm}^2$, $V=\dfrac92\pi\,\mathrm{cm}^3$, $d=1\,\mathrm{cm}$. **381.** $P=75\pi\,\mathrm{cm}^2$.

382. Нека је R полупречник основе, s изводница и H висина купе, а r полупречник лопте. Тада је $R:s=r:(H-r)$, док из $P_k=2P_l$ следи $8r^2=R^2+Rs$. Добија се $V_k:V_l=2:1$. **383.** 2 cm. **384.** $r(2+\sqrt2)$ (в. задатак 569). **385.** $\dfrac13 r$.

386. $\dfrac{bc}{2a}$, $\dfrac{ca}{2b}$, $\dfrac{ab}{2c}$.

387. Нека је O центар лопте и D и E тачке у којима лопта додирује основу ABC, односно ивицу SA тетраедра. Треба искористити сличност троуглова SOE и SAD. Добија се $r=\sqrt3-1\,\mathrm{cm}$.

388. 43 украса. **389.** $5\cdot5\cdot5\cdot5=625$. **390.** $5\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2-5\cdot4\cdot3\cdot2=480$.

391. $16\cdot15\cdot14=3360$.

392. Једанаест знакова се појављују и у ћирилици и у латиници: A, B, C, E, H, J, K, M, O, P, T. Исто се читају знаци: A, E, J, K, M, O, T (седам знакова). Тражени број је $11^3-7^3=988$.

393. Једноцифрених бројева има 2, двоцифрених 6, троцифрених $2\cdot3\cdot3-2=16$ и четвороцифрених $2\cdot3\cdot3\cdot3-18=36$ — укупно 60.

394. Најмање 75 куглица. **395.** а) 51; б) 4; в) 82.

396. Једнакост $mn=4(m+n)$, $m<n$, може се написати у облику $(m-4)(n-4)=16$. Добија се $m=6$, $n=12$.

397. Две петице, 10 четворки, 7 тројки и 11 двојки.

399. а) $a\geqslant0$, $b\geqslant0$ и $a=0$ или $b=0$; б) $m=n=0$.

400. Нека је $a\leqslant b\leqslant c$. Тада је $\dfrac1a\geqslant\dfrac1b\geqslant\dfrac1c$, па следи $a\leqslant3$. Како је $a\neq1$, то је $a=2$ или $a=3$. Одговор: $\dfrac13+\dfrac13+\dfrac13=1$, $\dfrac12+\dfrac14+\dfrac14=1$, $\dfrac12+\dfrac13+\dfrac16=1$.

401. $A>B$. Упутство: смена $10^{999}=t$.

402. Најмања вредност је 4 за $x\in[2,3]$. **403.** $a=-2$.

404. $m=\dfrac43$, $O=2+\sqrt{34}+2\sqrt5$, $P=\dfrac72$.

405. Ради се о квадрату са средиштем у тачки $(0,1)$, дијагонале дужине 4. Површина овог квадрата једнака је 8.

406. а) Нека је $\dfrac x2-1=t$, тада је $x=2(t+1)$, па је $f(t)=2\cdot2(t+1)+3=4t+7$; дакле, $f(x)=4x+7$. б) $f(x)=3-\dfrac x2$; в) $f(x)=\dfrac{5x-11}{3}$.

407. $f(x)=2x-1$. Упутство: уместо x заменити $-x$. **408.** 1864. године.

409. Две могућности: пет мушкараца, једна жена и шесторо деце или четири мушкарца и осам жена.

410. Четири начина: $(6,4)$, $(4,9)$, $(2,14)$, $(0,19)$.

411. Постоје три решења: $(10,2,88)$, $(5,11,84)$, $(0,20,80)$.

412. 150, 225 и 375. Упутство: последња цифра тражених бројева је 0 или 5.

413. Треба да из друге кутије извади $99-19=80$ куглица, јер код истог броја куглица у обе кутије губи играч који је на потезу.

414. Систем напишемо у облику

$$x(yzu-1)=1111,\quad y(xzu-1)=111,\quad z(xyu-1)=11,\quad u(xyz-1)=1.$$

Следи да сви x,y,z,u морају бити непарни, што је немогуће (заменом у било коју од једначина — лева страна је паран, а десна непаран број). Дакле, систем нема целобројних решења.

415. $-998-997-\cdots-0+\cdots+997+998+999+1000=1999$.

416. а) 9, за $x=2$; б) $\dfrac{13}{4}$, за $x=-\dfrac32$; в) 1, за $x=3$; г) $\dfrac43$, за $x=-\dfrac12$ (в. зад. 528).

417. а) $f(x)=92$, за $x=0$; б) $f(x)=\dfrac{351}{4}$, за $x=\dfrac72$; в) $f(x)=1$, за $x=-3$ или $x=3$; г) $f(x)=3$, за $x=2$ (в. претходни задатак).

418. $r=3+\dfrac{2}{(x-2)^2+y^2+1}$, $r_{max}=5$ за $x=2$, $y=0$.

419. $\dfrac{10x+y}{x+y}=\dfrac{9x+(x+y)}{x+y}=1+\dfrac{9x}{x+y}=1+\dfrac{9}{1+\frac yx}$. Количник је највећи (и једнак 10) када је $y=0$; тражени бројеви су 10, 20, 30, … , 90.

420. Нека је c хипотенуза, а x једна катета. Тада је $c^2=x^2+(10-x)^2=2(x-5)^2+25$. Види се да је c најмање када је $x=5$, дакле троугао је једнакокраки.

421. $54=5^2+4^2+13$. Упутство: доказати да цифра десетица мора бити непарна.

422. Нека је $a^2+b^2=1999$. Један од бројева a, b мора бити паран, а други непаран, на пр. $a=2k$, $b=2l+1$, $k,l\in\mathbf{N}$. Релација $4k^2+4l^2+4l+1=1999$, тј. $4(k^2+l^2+l)=1998$ је немогућа, јер број 1998 није дељив са 4.

423. Из $a+b+c=\frac{bc}{2}$ и $a^2=b^2+c^2$ добијамо $(b+c)^2=a^2+2bc$, тј. $2bc=(b+c+a)(b+c-a)$, па је $a=b+c-4$. Када ово заменимо у $a+b+c=\frac{bc}{2}$, добијамо $b=\frac{4c-8}{c-4}=4+\frac{8}{c-4}$, одакле је $c-4\mid 8$, па је $c=5$ или $c=6$ или $c=8$ или $c=12$. Постоје два оваква неподударна троугла — са страницама 5, 12, 13 и 6, 8, 10.

424. $x=5$, $y=8$, $z=11$. Упутство: $2^x(1+2^{y-x}+2^{z-x})=2^5\cdot 73$.

425. Дата неједнакост је еквивалентна са неједнакошћу $a^2+b^2+c^2+4\leqslant ab+3b+2c$, тј. $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+3\left(\frac{b}{2}-1\right)^2+(c-1)^2\leqslant 0$, па је $a=1$, $b=2$, $c=1$.

426. Одговор: C.

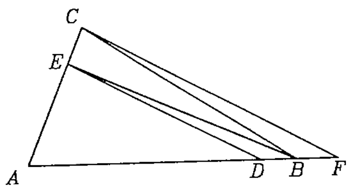
427.

$$\frac{a^{2n+3}-a^{2n+2}+a^{2n+1}}{a^{3n+2}-a^{3n+1}+a^{3n}}=\frac{a^{2n+1}(a^2-a+1)}{a^{3n}(a^2-a+1)}=\frac{1}{a^{n-1}}.$$

Одговор: A.

428. Петоцифрених бројева има 90 000. Половина од њих су парни (а половина непарни).

Одговор: E.



Сл. 47

429. Из $BC\parallel ED$ добијамо $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, а из $FC\parallel BE$ добијамо $\frac{AF}{AB}=\frac{AC}{AE}$ (сл. 47). Према томе, $\frac{AB}{AD}=\frac{AF}{AB}$, тј. $AB=\sqrt{AD\cdot AF}=4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

Одговор: D.

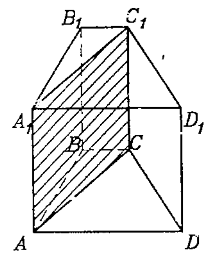
430. За $x\geqslant 1$ једначина постаје $|x-1-4|=5$, тј. $|x-5|=5$, па је $x-5=5$ или $x-5=-5$. У првом случају добијамо решење $x_1=10$, решење 0 друге једначине није и решење полазне, јер не важи $0\geqslant 1$.

За $x<1$ добијамо једначину $|-x+1-4|=5$, односно $|-x-3|=5$, па је $-x-3=5$ или $-x-3=-5$. У првом случају добијамо решење $x_2=-8$, док број 2 није решење, јер не важи $2<1$. Дакле, решења дате једначине су $x_1=10$ и $x_2=-8$.

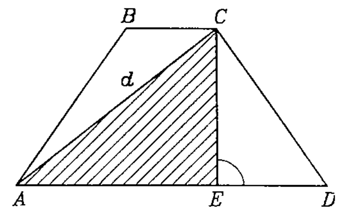
Одговор: B.

431. Нека је r_1 број радника пре повећања, а r_2 после повећања, v_1 време за које би r_1 радника завршило посао и v_2 време за које би посао завршило r_2 радника. Тада је $r_1\cdot v_1=r_2\cdot v_2$ и, како је $r_2=\frac{4}{3}r_1$, то је $v_1=\frac{4}{3}v_2$, тј. $v_2=\frac{3}{4}v_1$. Значи, време v_2 је за једну четвртину, тј. 25% краће од v_1.

Одговор: A.



Сл. 48а



Сл. 48б

432. Како је $ED=\frac{1}{2}(AD-BC)=5\,\text{cm}$ (сл. 48б), то је $CE=\sqrt{CD^2-ED^2}=12\,\text{cm}$ и $AC=\sqrt{CE^2+AE^2}=\sqrt{12^2+9^2}=15\,\text{cm}$.
Површина правоугаоника ACA_1C_1 је $150=AC\cdot CC_1$; дакле $CC_1=10\,\text{cm}$ (сл. 48а).
Површина омотача призме је

$$P=(AD+DC+CB+BA)\cdot CC_1=440\,\text{cm}^2.$$

Одговор: B.

433. Нека је $S_n=1+2+3+\cdots+(n-1)+n$. Тада је и $S_n=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$, па је $2S_n=n(n+1)$. Дакле,

$$\frac{n(n+1)}{2}=\overline{xxx},$$

тј. $n(n+1)=2x\cdot 111=2\cdot x\cdot 3\cdot 37$. Број 37 је прост, па је производ два узастопна броја $n(n+1)$ једнак $2\cdot x\cdot 3\cdot 37$ само ако је $n=36$ ($x=6$). Дакле, $1+2+3+\cdots+35+36=666$.

Одговор: B.

434. Означимо (сл. 49): $\angle ABC=\angle ACB=\beta$, $\angle ADE=\angle AED=\varphi$ и $\angle EDC=x$. Из троугла ABD је

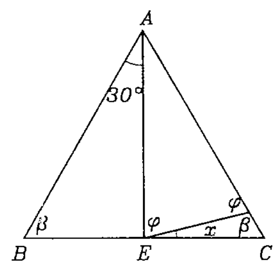
(1) $\qquad\varphi+x=\beta+30^\circ,$

а из троугла DEC је

(2) $\qquad\varphi=x+\beta.$

Заменивши φ из (2) у (1) добијамо $2x+\beta=\beta+30^\circ$, тј. $x=15^\circ$.

Одговор: C



Сл. 49

435. Како је $n=3k+2$ и $n=37l+22$, то је $3k+2=37l+22$, тј. $3k=37l+20$, па је $k=12l+7+\frac{l-1}{3}$ и, због $k\in\mathrm{N}$, $l=3m+1$, $m\in\mathrm{N}$. Дакле, $n=37(3m+1)+22=111m+59$.

Одговор: E.

436. Обим основе купе је $2r\pi=\frac{1}{4}\cdot 2(4\sqrt{5})\pi$, па је $r=\sqrt{5}$. Изводница купе је $s=4\sqrt{5}$, а висина $H=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{80-5}=5\sqrt{3}$. Запремина купе је $V=\frac{1}{3}r^2\pi H=\frac{25}{3}\pi\sqrt{3}$.

Одговор: D.

437. Како је $x^2+3x-10=(x-2)(x+5)$, то је за $x>2$ неједначина еквивалентна неједначини $\dfrac{1}{x+5}\geqslant 1$, тј. $\dfrac{x+4}{x+5}\leqslant 0$. Њена решења: $-5<x\leqslant -4$ не задовољавају услов $x>2$.

За $x<2$ добијамо $-\dfrac{1}{x+5}\geqslant 1$, тј. $\dfrac{x+6}{x+5}\leqslant 0$. Решења ове неједначине: $-6\leqslant x<-5$ су и решења полазне неједначине.

Одговор: C.

438. Одговор: D. **439.** Одговор: D. **440.** Одговор: C.

441. $X=(A\cap C)\cup B=C\cup B=B$, $Y=A\cap(C\cup B)=A\cap B=C$.

Одговор: A.

442. $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}=|-2|+|2|=4$.

Одговор: B.

443. Одговор: E.

444. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\dfrac{2x-5}{x+3}-1\geqslant 0$, тј. $\dfrac{x-8}{x+3}\geqslant 0$. За $x<-3$ неједначина постаје $x-8\leqslant 0$, тј. $x\leqslant 8$, па су њена решења $x<-3$. За $x>-3$ неједначина постаје $x-8\geqslant 0$, тј. $x\geqslant 8$, па су њена решења $x\geqslant 8$. Дакле, сва решења неједначине су $x<-3$ или $x\geqslant 8$.

Одговор: A.

445. Одговор: B.

446. Нека је H висина пирамиде, а h висина бочне стране. Тада је

$$H=h-1 \quad \text{и} \quad h^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+H^2,$$

одакле се због $a=6$ добија $h^2=9+(h-1)^2$ и $h=5\,\mathrm{cm}$. Површина пирамиде је $P=a^2+2ah=96\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: A.

447. Пошто је $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$, то мора бити $x\neq 2$ и $x\neq 3$, па ова једначина нема решења.

Одговор: E.

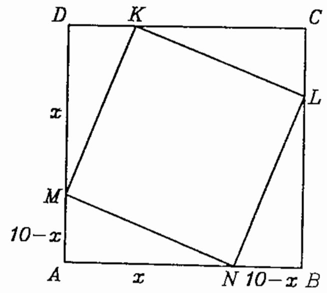
448. Неједнакост A) не важи, на пример, за $x=\frac{1}{2}$; неједнакост B) такође за $x=\frac{1}{2}$; неједнакост D) не важи, на пример, за $x=-1$, а неједнакост E) не важи за $x<0$. Неједнакост C) важи за све x јер је

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}>0.$$

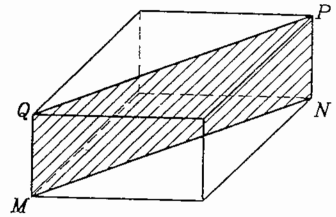
Одговор: C.

449. Означимо $AN=BL=CK=DM=x$ (сл. 50). Површина квадрата $MNLK$ једнака је $58\,\mathrm{cm}^2$, па је $MN=\sqrt{58}$ и $x^2+(10-x)^2=58$, тј. $x^2-10x+21=0$ и $(x-7)(x-3)=0$. Како је $x>5$ (због услова $AN>BN$), то је $x=7$, па је $AN-BN=7-3=4\,\mathrm{cm}$.

Одговор: E.



Сл. 50



Сл. 51

450. Координате тачака A и B „задовољавају" једначину праве, па је $k\cdot 1+n=0$ и $k\cdot 0+n=-2$. Одавде налазимо $k=2$, $n=-2$.

Одговор: C.

451. В. слику 51. Одговор B.

452. Нека су то бројеви n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+9$. Њихов збир је

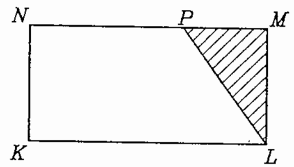
$$n+(n+1)+\cdots+(n+9)=10n+(1+2+\cdots+9)=10n+45=315.$$

Одавде је $n=27$, а $n+9=36$.

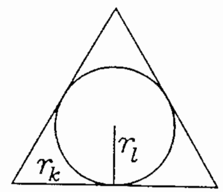
Одговор: E.

453. Површина троугла PML је (сл. 52) $S=\dfrac{PM\cdot ML}{2}=\dfrac{NM\cdot ML}{6}=8$, па је површина правоугаоника $KLMN$ $S_1=NM\cdot ML=48$.

Одговор: A.



Сл. 52



Сл. 53

454. Исказ (I) не важи, на пример, за $a=2$, $b=4$. Исказ (II) не важи, на пример, за $a=4$, $b=2$. Исказ (III) није тачан, на пример, за $a=4$, $b=3$. Дакле, ниједан од исказа (I), (II), (III) не мора бити тачан.

Одговор: D.

455. Нека је r полупречник круга, a страница квадрата и b страница једнакостраничног троугла. Тада је $a\sqrt{2}=2r$, па је $a=r\sqrt{2}$ и $\frac{2}{3}\cdot\frac{b}{2}\sqrt{3}=r$, па је $b=r\sqrt{3}$. Однос површина је

$$\frac{P_k}{P_t}=\frac{a^2}{\frac{b^2\sqrt{3}}{4}}=\frac{8}{3\sqrt{3}}.$$

Одговор: B.

456. Како је

$$3^1=3,\quad 3^2=9,\quad 3^3=27,\quad 3^4=81,\quad 3^5=243,\quad \dots$$
$$2^1=2,\quad 2^2=4,\quad 2^3=8,\quad 2^4=16,\quad 2^5=32,\quad \dots$$

последње цифре степена тројке и двојке се понављају са периодом 4. При дељењу са 4 број 333 даје остатак 1, а број 222 остатак 2, па је последња цифра броја 333^{333} — цифра 3, а последња цифра броја 222^{222} — цифра 4.

Одговор: D.

457. Пре трећег узимања, у корпи је било $31\frac{1}{2}\cdot 2 = 63$ јабуке, пре другог узимања $63\frac{1}{2}\cdot 2 = 127$, а пре првог $127\frac{1}{2}\cdot 2 = 255$ јабука.

Одговор: E.

458. Како је осни пресек купе једнакостранични троугао, то је полупречник лопте r_L трећина висине тог троугла (странице једнаке пречнику основе купе — $2r_K$). Дакле (сл. 53), $r_L = \frac{1}{3}\frac{2r_K\sqrt{3}}{2} = \frac{r_K\sqrt{3}}{3}$, па је

$$\frac{V_L}{V_K} = \frac{\frac{4}{3}r_L^3\pi}{\frac{1}{3}r_K^2\pi\cdot r_K\sqrt{3}} = \frac{\frac{4}{3}\frac{r_K^3\cdot 3\sqrt{3}}{27}\pi}{\frac{1}{3}r_K^3\pi\sqrt{3}} = \frac{4}{9}.$$

Одговор: B.

459. Прва цифра може се изабрати на четири начина (не може бити нула!), друга, трећа и четврта цифра могу се изабрати на по пет начина. Дакле, укупан број ових бројева је $4\cdot 5\cdot 5\cdot 5 = 500$.

Одговор: D.

460. Производ три узастопна броја $n(n+1)(n+2)$ дељив је са 3, а број 2^n није дељив са 3, па ни број a ни за једно n није дељив са 3.

Одговор: A.

461. Из $\overline{xyzxyz} = 1001\,\overline{xyz}$ следи да је

$$\overline{xx}\cdot\overline{yz} = 1001 = 7\cdot 11\cdot 13,$$

па је $\overline{xx}=11$ и $\overline{yz}=91$ или $\overline{xx}=77$ и $\overline{yz}=13$. Како је $x\neq z$, прва могућност отпада, па мора бити $x=7$, $y=1$ и $z=3$.

Одговор: B.

462. $2a^2 + 3a^2 - 5(a-b)(a+b) = 5a^2 - 5(a^2-b^2) = 5a^2 - 5a^2 + 5b^2 = 5b^2$.

Одговор: C.

463. $x = \frac{1}{\sqrt{0{,}09}} = \frac{1}{0{,}3} = \frac{10}{3}$.

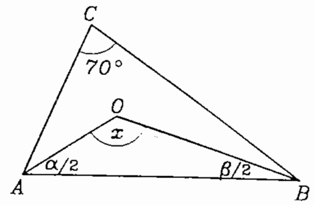
Одговор: D.

464. Нека је $r_1 = r + 50\%\,r = 1{,}5r$. Тада је $P_1 = r_1^2\pi = 2{,}25r^2\pi = 2{,}25P = P + 125\%\,P$. Значи, површина се повећала за 125%.

Одговор: A.

465. Означимо $\angle AOB = x$ (сл. 54). Тада је

$$x = 180° - \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right) = 180° - \frac{180°-70°}{2} = 125°.$$



Сл. 54

Одговор: D.

466.

$$1-\left(\frac{6}{4}-\frac{1}{4}\right):\left(\frac{10}{8}-\frac{9}{8}\right) = 1-\frac{5}{4}\cdot\frac{8}{1} = 1-10 = -9.$$

Одговор: E.

467. Из услова задатка добијамо систем једначина:

$$a+b=32,\quad \frac{1}{2}(a+4)(b-5) = \frac{1}{2}ab.$$

односно $a+b=32$, $4b-5a=20$ $(b>a)$, одакле се добија $b=20\,\mathrm{cm}$ и $a=12\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.

468. Како је број a^3-1 дељив бројем $a-1$, а $a^3+1 = a^3-1+2$, то је број $\frac{a^3+1}{a-1}$ цео ако и само ако је $\frac{2}{a-1}$ цео, тј. $a-1\in\{-2,-1,1,2\}$, односно $a\in\{-1,0,2,3\}$.

Одговор: C.

469. Тачни су само (III) и (IV).

Одговор: C.

470. Једна гуска снесе једно јаје за један и по дан, па за исто време пет гусака снесе 5 јаја, а пет гусака ће снести 20 јаја за четири пута дуже време: $4\cdot 1{,}5 = 6$ дана.

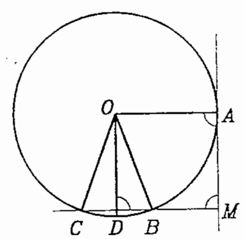
Одговор: D.

471. Четвороугао $OAMD$ је правоугаоник (сл. 55), па је

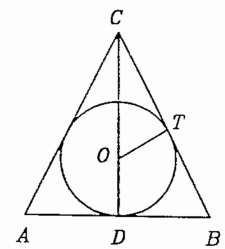
$$OB^2 = OD^2 + DB^2 = 144 + 25 = 169.$$

дакле $OB = 13\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.



Сл. 55



Сл. 56

472. Означимо са a, b, c и d делове посла које за један час обаве први, други, трећи, односно четврти човек. Тада је

$$a+b+c=\frac{1}{6}$$
$$a+b+d=\frac{2}{15}$$
$$c+d=\frac{1}{10}.$$

Сабирањем ових једначина се добија $a+b+c+d=\frac{1}{5}$, дакле, за један час они ће, радећи заједно, обавити петину посла, а сви заједно цео посао за пет часова.

Одговор: Е.

473. Нека је $AC=BC=s$ (сл. 56), $CD=H$, $DB=BT=R$ и $OT=OD=r$. Из сличности троуглова DBC и OTC следи да је $R:s=r:(H-r)$, односно

$$s=\frac{R}{r}(H-r). \tag{1}$$

Из услова задатка је $P_K=2P_L$, тј. $\pi R^2+\pi Rs=8\pi r^2$, односно

$$8r^2=R^2+Rs. \tag{2}$$

Када се (1) уврсти у (2) добија се $R^2H=8r^3$, па је

$$\frac{V_K}{V_L}=\frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{4}{3}\pi r^3}=\frac{R^2H}{4r^3}=\frac{8r^3}{4r^3}=2.$$

Одговор: В.

474. Троуглови PQR и ABC су слични са коефицијентом сличности $\frac{1}{2}$. Зато је $O_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}O$.

Одговор: А.

475. $(x+3)(x-5)-(x-6)(x+4)=x^2-2x-15-(x^2-2x-24)=9$.

Одговор: С.

476. $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}-\sqrt{50}+3\sqrt{32}=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-5\sqrt{2}+12\sqrt{2}=19\sqrt{2}$.

Одговор: D.

477. Како је $d=a\sqrt{2}$, $D=a\sqrt{3}$ (a - ивица коцке), то је $a=\frac{d}{\sqrt{2}}$ и $D=\frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{d\sqrt{6}}{2}$.

Одговор: Е.

478. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\frac{1}{x}-1<0$, тј. $\frac{1-x}{x}<0$. За $x<0$ њена решења су сви реални бројеви, а за $x>0$ решења су $x>1$.

Одговор: В.

479. Нека је F пресечна тачка правих AE и BC. Тада је $\angle AFC=\angle AED$. С друге стране, $\angle AFC=\angle BAF+\angle ABF$ (спољашњи угао троугла ABF једнак је збиру два несуседна унутрашња угла). Дакле, $\angle AED=41^\circ+74^\circ=115^\circ$.

Одговор: В.

480. Свеже шљиве садрже 10% суве материје, а сушене 88%. У 2,5 kg сувих шљива налази се 2,2 kg суве материје. Из пропорције $2{,}2:10=x:100$ налазимо да је за 2,5 kg сувих шљива потребно 22 kg свежих.

Одговор: В.

481. Дата једначина еквивалентна је једначини $|x+1|+|x-1|=2$. За $x<-1$ или $x>1$ она нема решења, али су њена решења сви реални бројеви за које важи $-1\leqslant x\leqslant 1$.

Одговор: С.

482. $$f(f(x))=f\left(\frac{2x+2}{x-2}\right)=\frac{2\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2}=\frac{\frac{5x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}}=\frac{5x}{5}=x.$$

Одговор: Е.

483. Број $N-1$ је дељив са 4, 5 и 6, тј. $N-1=60k$, $k\in\mathbf{N}$, па је број N облика $60k+1$. Заменом $k=0,1,2,3,4,5$ добија се да је за $k=5$ број $N=301$ дељив са 7. Дакле, збир цифара броја N је $3+0+1=4$.

Одговор: А.

484. Нека је $a_n=\frac{n(n+1)}{2}-1=\frac{(n-1)(n+2)}{2}$. За $n\geqslant 2$: $a_{2k}=(2k-1)(k+1)$ је сложен број, а такође је и број $a_{2k+1}=k(2k+3)$ сложен. Дакле, једини прости бројеви су $a_2=2$ и $a_3=5$.

Одговор: В.

485. Висина правилног тетраедра је катета правоуглог троугла, чија је хипотенуза ивица тетраедра, а друга катета $\frac{2}{3}$ висине основе. Дакле:

$$H^2=a^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2}{3}a^2,$$

па је $H=a\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Одговор: D.

486. $2^{3a}\cdot 3^{2a}=8^a\cdot 9^a=(8\cdot 9)^a=72^a$.

Одговор: D.

487. За $x\geqslant -\frac{2}{3}$ једначина постаје $3x+2+2x=12$ и њено решење је $x_1=2$.

За $x<-\frac{2}{3}$ једначина је $-(3x+2)+2x=12$ и њено решење је $x_2=-14$.

Одговор: А.

488. Одговор: В.

489. Површина полукруга полупречника r је $\frac{1}{2}r^2\pi = 8\pi$, одакле је $r = 4\,\mathrm{cm}$ и $2r = 8\,\mathrm{cm}$.

Одговор: E.

490.

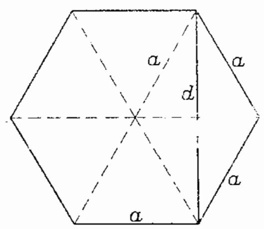
$$3 - \frac{2a-1}{2} + \frac{a-4}{3} - 5\cdot\frac{a-2}{6} = \frac{18 - 3(2a-1) + 2(a-4) - 5(a-2)}{6} = \frac{-9a+23}{6}.$$

Одговор: C.

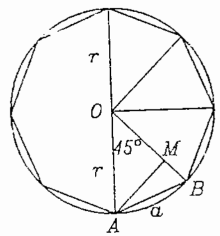
491. Половина краће дијагонале је висина једнакостраничног троугла странице a (сл. 57). Дакле, $\frac{d}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, па је $a = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Површина правилног шестоугла је

$$P = 6\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 6\cdot\frac{\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{d^2\sqrt{3}}{2}.$$

Одговор: A.



Сл. 57



Сл. 58

492. Површина „криволинијског" троугла се добија када се од површине једнакостраничног троугла странице $2r$ одузме површина полукруга полупречника r:

$$P = \frac{(2r)^2\sqrt{3}}{4} - \frac{r^2\pi}{2} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}\,\mathrm{cm}^2.$$

Одговор: D.

493. Одговор: C.

494. Нека је $\frac{x}{x+1} = 2$. Тада је $x = -2$, па је $f(2) = 2\cdot(-2) = -4$.

Одговор: B.

495. Како је $120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$, то је сваки делилац броја 120 облика $2^x\cdot 3^y\cdot 5^z$, при чему је $0 \leqslant x \leqslant 3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ и $0 \leqslant z \leqslant 1$. Има укупно 4 могућности за x и по две за y и z, па је број делилаца броја 120 једнак $4\cdot 2\cdot 2 = 16$.

Одговор: D.

496. Троугао AMO (сл. 58) је једнакокраки и правоугли, па је $AM = \frac{r}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Површина троугла ABO је

$$\frac{1}{2}OB\cdot AM = \frac{1}{2}r\cdot\frac{r}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2,$$

а површина осмоугла $P = 8\cdot P_{\triangle ABO} = 32\sqrt{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: D.

497. В. задатак 100.

Одговор: B.

498. $(10-5\pi) - (8-4\pi) = 10 - 5\pi - 8 + 4\pi = 2 - \pi$.

Одговор: B.

499. Одговор: B.

500. Решења дате једначине су $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

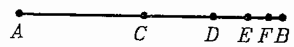
Одговор: D.

501. Из $O_1 : O_2 = 3 : 4$ и $O_1 + O_2 = 420$ налазимо $O_1 = 180$ и $O_2 = 240$.

Одговор: D.

502. $CF = CD + DE + EF = 4\,\mathrm{cm} + 2\,\mathrm{cm} + 1\,\mathrm{cm} = 7\,\mathrm{cm}$ (сл. 59).

Одговор: C.



Сл. 59

503. Из $4(r+1)^2\pi = 4r^2\pi + 8\pi$ налазимо $r = \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}$. Разлика запремина је

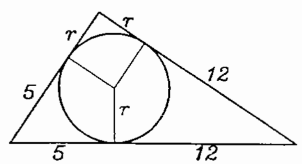
$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3\pi - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\pi = \frac{13}{3}\pi.$$

Одговор: E.

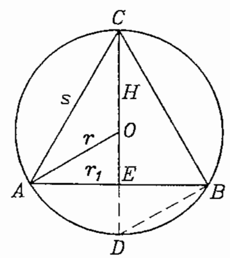
504. Одговор: D.

505. По Питагориној теореми (сл. 60) је $(5+r)^2 + (12+r)^2 = 17^2$. Добијамо $r^2 + 17r - 60 = 0$, тј. $(r-3)(r+20) = 0$. Како је $r > 0$, то је $r = 3\,\mathrm{cm}$. Тада су катете правоуглог троугла 15 cm и 8 cm.

Одговор: A.



Сл. 60



Сл. 61

506. Дата једначина еквивалентна је једначини $|x-3|+2|x+1|=7$ и њена решења су $x_1=-2$, $x_2=2$.

Одговор: C.

507.

$$A^2-B^2=(A-B)(A+B)=\frac{2^x+\frac{1}{2^x}-2^x+\frac{1}{2^x}}{2}\cdot\frac{2^x+\frac{1}{2^x}+2^x-\frac{1}{2^x}}{2}$$
$$=\frac{2\cdot\frac{1}{2^x}}{2}\cdot\frac{2\cdot 2^x}{2}=1.$$

Одговор: A.

508. Нека је r_1 полупречник основе и s изводница купе (сл. 61). Из сличности троуглова CDB и CAE имамо $\frac{s}{2r}=\frac{H}{s}$, па је $s=\sqrt{2rH}=8\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Тада је $r_1^2=H(2r-H)$, па је $r_1=4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и $M=r_1\pi s=96\pi$.

Одговор: C.

509. Последња цифра броја 7^n се периодично понавља са периодом 4 (в. задатак 37). Како је остатак при дељењу 777 са 4 једнак 1, то је последња цифра броја 7^{777} једнака 7.

Одговор: D.

510. $a^2-b^2=(-3)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2=9-\frac{1}{9}=\frac{80}{9}$.

Одговор: C.

511. Одговор: A.

512. Одговор: C.

513. Како је $\frac{11}{18}-\frac{5}{9}=\frac{1}{18}$ и $\frac{1}{18}$ износи 10% од $\frac{5}{9}$, то је Иван узео 10% више.

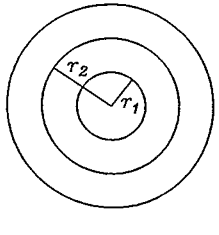
Одговор: A.

514. Нека су r_1 и r_2 тражени полупречници (сл. 62). Тада је

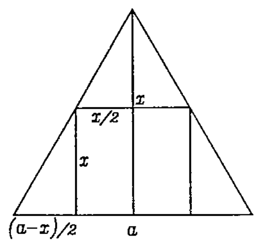
$$r_1^2\pi=(r_2^2-r_1^2)\pi=(3^2-r_2^2)\pi=\frac{1}{3}\cdot 3^2\pi,$$

одакле је $r_1^2=3$ и $9-r_2^2=3$, па је $r_1=\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, $r_2=\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$, па је $r_1+r_2=\sqrt{3}+\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.



Сл. 62



Сл. 63

515. A) Не важи за $x\leqslant 0$.

B) Не важи, јер је $2^x-2^x\cdot 2=-2^x\neq 0$.

C) Не важи, јер је $\sqrt{x^2-8x+16}=|x-4|$.

D) Не важи за $x=0$.

Одговор: E.

516. Неједначина је еквивалентна неједначини $|x+1|+|x-4|>7$. Разматрамо три случаја и налазимо да су решења:

за $x<-1$: $x\in(-\infty,-2)$;

за $-1\leqslant x<4$ — нема решења;

за $x\geqslant 4$: $x\in(5,+\infty)$.

Одговор: A.

517. B. задатке 37 и 509.

Одговор: D.

518. Из $r\pi s=3r^2\pi$ добијамо $s=3r$. Како је $\frac{1}{3}r^2\pi H=\frac{8}{3}\pi$, то је $r^2H=8$. Међутим, $r^2=s^2-H^2$, па је $r^2=9r^2-H^2$, одакле је $r^2=\frac{H^2}{8}$. Сада добијамо $\frac{H^2}{8}\cdot H=8$, одакле је $H=4\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

519. Нека је x страница квадрата (сл. 63). Тада је $\frac{x/2}{a/2-x/2}=\frac{(x/2)\sqrt{3}}{x}$, одакле се добија да је $x=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$, па је

$$x=\frac{\sqrt{3}(3+2\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\frac{6+3\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=3$$

и површина квадрата је $P=x^2=9$.

Одговор: C.

520. Дијагонала мање коцке је $D=a\sqrt{3}=2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, а веће $D_1=D+2=2\sqrt{3}+2=2(1+\sqrt{3})$, па је ивица веће коцке $a_1=\frac{D_1}{\sqrt{3}}=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, а њена запремина

$$V=a_1^3=8\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3.$$

Одговор: A.

521. Нека су x и y бројеви дана за које би посао завршили први, односно други радник радећи сами. Из услова задатка је

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5},\quad \frac{2}{x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{4}.$$

Овај систем једначина може се решити увођењем смене $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$. Решење је $x=y=10$.

Одговор: B.

522. $24 : (-3) - (-50) \cdot (-2) + (-48) : (-3) = -8 - 100 + 16 = -92$.
Одговор: B.

523. Страница ромба је $a = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2} = 1{,}7\,\mathrm{cm}$, па је обим $O = 4a = 6{,}8\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.

524. Одговор: A.

525. $\frac{3(5x-1) - 4(5x+1) - 2(3x-13)}{12} = \frac{-11x+19}{12}$.
Одговор: C.

526. Нека је a страница, а h висина тог троугла. Тада је $\frac{2}{3}h = 2\,\mathrm{cm}$, тј. $h = 3\,\mathrm{cm}$; из $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ следи $a = \frac{2h\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и $P = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.
Одговор: E.

527. Полупречник тог круга је $r = 9\,\mathrm{cm}$, па је његов обим $2r\pi = 18\pi\,\mathrm{cm}$. Централном углу од 20° одговара лук дужине једнаке осамнаестини обима круга, тј. $\pi\,\mathrm{cm}$.
Одговор: C.

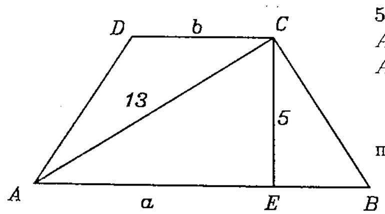
528. Израз има највећу вредност онда када израз $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ има најмању вредност — за $x = 2$. Дакле, тражена највећа вредност је $\frac{1}{(2-2)^2+1} = 1$.
Одговор: A.

529. Нека је цена била a динара. После снижења од 50% та цена је $\frac{a}{2}$ и треба је повећати за $\frac{a}{2}$, тј. за 100% да би добила првобитну вредност a.
Одговор: A.

530. За $x < 1$ или $x > 2$ једначина нема решења, али су решења сви реални бројеви x за које важи $1 \leqslant x \leqslant 2$.
Одговор: D.

531. Неједначина је еквивалентна неједначини $\frac{-x+5}{2(x-3)} < 0$, чија су решења сви реални бројеви за које важи $x < 3$ или $x > 5$.
Одговор: B.

532. Треба размотрити случајеве у којима се новчаница од 50 динара користи пет, четири, три, два, један и ниједан пут.
Одговор: D.



Сл. 64

533. Нека је CE висина једнакокраког трапеза $ABCD$ (сл. 64). Тада је $AE^2 = 13^2 - 5^2$, па је $AE = 12\,\mathrm{cm}$. С друге стране, имамо да је

$$AE = AB - BE = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

па је површина трапеза

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h = 12 \cdot 5 = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

Одговор: D.

534. $6a^3 \cdot 3a^2 - 5a \cdot a^4 = 18a^5 - 5a^5 = 13a^5$.
Одговор: C.

535. $\frac{p-q}{q-p} = \frac{-(q-p)}{q-p} = -1$.
Одговор: B.

536. Нека су α, β, γ, δ углови тог четвороугла. Тада је $\alpha = k$, $\beta = 2k$, $\gamma = 3k$, $\delta = 4k$, па је $k + 2k + 3k + 4k = 360^\circ$, $k = 36^\circ$ и $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 72^\circ$, $\gamma = 108^\circ$, $\delta = 144^\circ$. Како је $\beta + \gamma = 180^\circ$ и $\alpha + \beta \neq 180^\circ$, четвороугао је трапез.
Одговор: B.

537. Тространа пирамида има шест ивица, па је $a = 2\,\mathrm{cm}$. Површина ове пирамиде је $P = 4 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$.
Одговор: A.

538. Нека је r полупречник круга. Тада је $\frac{r}{2}\sqrt{3} = \frac{AB}{2} = 3$, па је $r = 2\sqrt{3}$, а површина осенчене фигуре је

$$P = \frac{r^2\pi \cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4} = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

Одговор: B.

539. Из $\frac{x}{x+1} = 3$ налазимо $x = -\frac{3}{2}$, па је

$$f(3) = f\left(\frac{-3/2}{(-3/2)+1}\right) = \left(-\frac{3}{2} - 1\right)^2 = 6{,}25.$$

Одговор: A.

540. Из сличности троуглова CSA и BSD налазимо $SD : AS = SB : CS$, тј. $SD : 4 = 9 : 3$, па је $SD = 12$.
Одговор: E.

541. Једна апотема пирамиде је $h_1 = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15\,\mathrm{cm}$, а друга је $h_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13\,\mathrm{cm}$, па је површина пирамиде

$$P = B + M = 18 \cdot 10 + 2 \cdot \frac{10 \cdot 15}{2} + 2 \cdot \frac{18 \cdot 13}{2} = 564\,\mathrm{cm}^2.$$

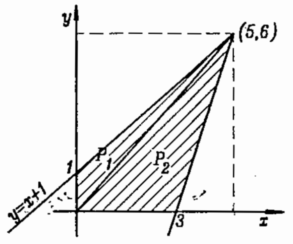
Одговор: C.

542. Како је $\frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$. Иван је уштедео 20-ти део цене фудбала. $\frac{1}{20}$ је $\frac{1}{5}$ од $\frac{1}{4}$, значи да је Иван уштедео $\frac{1}{5}$ добијеног новца, тј. 20%.
Одговор: A.

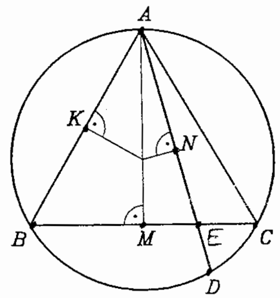
543. Површина фигуре осенчене на сл. 65 једнака је

$$P_1 + P_2 = \frac{1 \cdot 5}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{23}{2}.$$

Одговор: A.



Сл. 65



Сл. 66

544. Нека је O средиште круга описаног око троугла ABC, M, K и N, редом, средишта тетива BC, AB и AD (сл. 66). Из сличности троуглова AOK и ABM имамо да је

(1) $$AO\cdot AM = AB\cdot AK = 12\cdot 6 = 72.$$

С друге стране, из сличности троуглова AON и AEM имамо да је

(2) $$AM\cdot AO = AN\cdot AE = 8\,AN.$$

Из (1) и (2) добијамо $8\,AN = 72$, па је $AD = 2\,AN = 18$.

Одговор: D.

545. Нека је a основица, а b крак троугла. Тада је $a+2b=30$. Како су a и b цели бројеви, мора бити a паран, а због услова да су a и b странице троугла мора да буде $a<2b$, тј. $a\leqslant 14$. Значи долазе у обзир само следећи случајеви: $a_1=2$, $b_1=14$; $a_2=4$, $b_2=13$; $a_3=6$, $b_3=12$; $a_4=8$, $b_4=11$; $a_5=b_5=10$; $a_6=12$, $b_6=9$; $a_7=14$, $b_7=8$.

Одговор: A.

546. Добија се $A=1+2=3$.

Одговор: C.

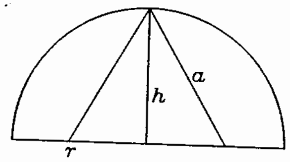
547. Како је $a=3\sqrt5=\sqrt{9\cdot5}=\sqrt{45}$ и $b=5\sqrt3=\sqrt{25\cdot3}=\sqrt{75}$, то је $a<b$.

Одговор: A.

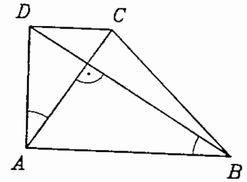
548. Висина троугла (сл. 67) једнака је полупречнику полукруга, тј. $\frac{a}{2}\sqrt3=r$, одакле је $a=\frac{2r}{\sqrt3}$. Тражени однос је

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{\frac12 r^2\pi}{\frac{a^2}{4}\sqrt3}=\frac{\frac12 r^2\pi}{\frac{r^2}{3}\sqrt3}=\frac{\pi\sqrt3}{2}.$$

Одговор: E.



Сл. 67



Сл. 68

549. Нека је $\frac{a}{b}$ однос броја девојчица и дечака у оркестру. Тада је $\frac25<\frac{a}{a+b}<\frac12$. Најмање вредности за које ово важи су $a=3$, $b=4$, па је најмањи могућ број чланова оркестра $a+b=7$.

Одговор: C.

550. Основна ивица пирамиде је $a=2\sqrt2$, па је површина $P=a^2+4\cdot\frac{a^2}{4}\sqrt3=8+8\sqrt3$.

Одговор: D.

551. Једино решење прве и друге једначине је $x_1=1$, а решења треће и четврте једначине су $x_1=1$ и $x_2=-3$. Према томе, еквивалентне су прва и друга, а такође трећа и четврта једначина.

Одговор: D.

552. Како је $\frac{n^2-n-12}{n-3}=n+2-\frac{6}{n-3}$, израз је цео број ако

$$n-3\in\{1,-1,2,-2,3,-3,6,-6\},\quad \text{тј.}\quad n\in\{4,2,5,1,6,9\},$$

јер је n природан број па не може бити једнак ни 0 ни -3. За преостале случајеве проверимо да ли је дати израз позитиван. За $n=4$ његова вредност је 0, па није природан број, док у осталим случајевима јесте. Дакле, $n\in\{1,2,5,6,9\}$.

Одговор: B.

553. Како за $0<a<1$ важи $a<\sqrt a<1$, то је

$$\sqrt{0,\underbrace{99\ldots99}_{100}}>0,\underbrace{99\ldots99}_{100},$$

па закључујемо да су првих сто цифара иза децималног зареза све деветке.

Одговор: E.

554. Запремина квадра је $V=2\cdot3\cdot6=36$, а површина $P=2(2\cdot3+2\cdot6+3\cdot6)=72$. Дакле, имамо да је $\frac{36}{a^3}=\frac{72}{6a^2}$, одакле налазимо да је $a=3\,\text{cm}$.

Одговор: B.

555. Посматрајмо таблицу

	ИВАН	МАРКО
Сада	x	$44-x$
Пре	$x-\left(44-x-\frac{x}{2}\right)$	$\frac{x}{2}$
Касније	$\frac{3x}{2}$	$2x-2\left(44-x-\frac{x}{2}\right)$

Како је у оба случаја протекао исти број година, то је

$$\frac{3x}{2}-\left(x-\left(44-x-\frac{x}{2}\right)\right)=2x-2\left(44-x-\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}.$$

Решење ове једначине је $x=24$. Дакле, Иван има 24, а Марко 20 година.

Одговор: A.

556. Број је дељив са 15 ако и само ако је дељив са 3 и са 5. Број је дељив са 3 када му је збир цифара дељив са 3, па долазе у обзир само могућности избора међу цифрама $1,2,3,4,5$ или $0,1,2,4,5$. У првом случају број се мора завршавати петицом, па има укупно $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ могућности; у другом случају — може се завршавати нулом — тада има $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$ могућности или петицом — тада има $4\cdot3\cdot2\cdot1-3\cdot2\cdot1=18$ (тада нула не сме да буде на првом месту). Дакле, укупно има $24+24+18=66$ оваквих бројева.

Одговор: E.

557. Троуглови ABD и ACD су слични (сл. 68), јер су углови ABD и CAD једнаки (нормални краци!). Из сличности следи $\frac{CD}{AD}=\frac{AD}{AB}$, па је $AD=\sqrt{AB\cdot CD}=6\,\text{cm}$.

Одговор: B.

558. Одговор: B.

559. На месту прве цифре може бити једна од цифара 2, 4, 6, 8, на другом месту тада мора бити једна од три неискоришћене цифре, на трећем две и на четвртом — једна. Дакле, укупан број оваквих бројева је $4\cdot3\cdot2\cdot1=24$.

Одговор: A.

560. Само кафу пије $29-16=13$ наставника, само чај $28-16=12$ наставника. Не пије ни чај ни кафу $50-(13+16+12)=9$ наставника.

Одговор: E.

561.

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}=|x-1|+|x+1|.$$

За $x\leqslant-1$ овај израз једнак је $-2x$, за $-1\leqslant x\leqslant1$ има вредност 2, а за $x\geqslant1$ једнак је $2x$.

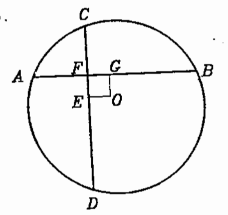
Одговор: A.

562. Нека су a, b, c дужина, ширина и висина полазног квадра, а a_1, b_1, c_1 димензије смањеног квадра. Тада је $a_1=\frac{9}{10}a$, $b_1=\frac{8}{10}b$ и $c_1=\frac{7}{10}c$, па је

$$V_1=a_1b_1c_1=\frac{504}{1000}abc=50{,}4\%\,V.$$

Дакле, проценат смањења је 49,6%.

Одговор: B.



Сл. 69

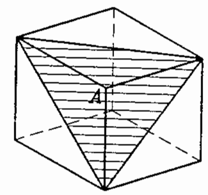
563. Нека је F пресечна тачка тетива AB и CD, а G и E подножја нормала из средишта O круга на те тетиве (сл. 69). Тада је $AB=AF+FB=10\,\text{cm}$, $AG=GB=5\,\text{cm}$, $FG=AG-AF=2\,\text{cm}$. Како је $EF\parallel OG$ и $GF\parallel OE$, то је четвороугао $OGFE$ квадрат странице $2\,\text{cm}$, па је $OF=2\sqrt2\,\text{cm}$.

Одговор: B.

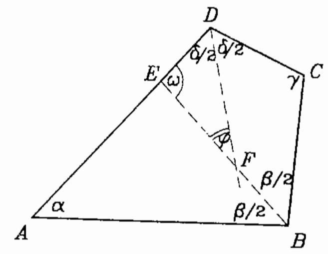
564. Омотач пирамиде састоји се из три једнакокрако правоугла троугла катета a, а основа је једнакостранични троугао странице $a\sqrt2$ (сл. 70). Површина ове пирамиде је

$$P=3\cdot\frac{a^2}{2}+\frac{(a\sqrt2)^2\sqrt3}{4}=\frac{a^2}{2}(3+\sqrt3).$$

Одговор: D.



Сл. 70



Сл. 71

565. Ако се базен пуни са све три цеви, за један час ће се напунити $\frac16+\frac18+\frac1{12}=\frac38$ базена, а за два часа ће се напунити $2\cdot\frac38=\frac34$ базена.

Одговор: D.

566. Нека су BE и DF симетрале друга два угла четвороугла (сл. 71). Из троугла EFD добијамо $\varphi=180^\circ-\omega-\frac{\delta}{2}$, а из троугла ABE: $\omega=\alpha+\frac{\beta}{2}=50^\circ+\frac{\beta}{2}$. На основу овога је

$$\varphi=180^\circ-\left(50^\circ+\frac{\beta}{2}\right)-\frac{\delta}{2}=130^\circ-\frac{\beta+\delta}{2}=130^\circ-\left(180^\circ-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)=30^\circ$$

(јер је $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}=180^\circ$).

Одговор: C.

567. Нека су $a=21$ и b катете, а c хипотенуза троугла. Тада је $c^2-b^2=441$, тј. $(c+b)(c-b)=3\cdot3\cdot7\cdot7$. Како су $c+b$ и $c-b$ природни бројеви и $c+b>c-b$, то је $c-b<21$, па постоје следеће могућности:

1° $c-b=3$, $c+b=147$;
2° $c-b=7$, $c+b=63$;
3° $c-b=9$, $c+b=49$;
4° $c-b=1$, $c+b=441$.

У првом случају је $b=72$, $c=75$, у другом $b=28$, $c=35$, у трећем $b=20$, $c=29$, а у четвртом $b=220$, $c=221$. Дакле, постоје четири оваква троугла.

Одговор: E.

568. Нека је први пешак за 15 секунди прешао x метара; тада је $110 + x = \frac{25}{3} \cdot 15$, одакле је $x = 15$. Значи да је брзина првог пешака $1\,\mathrm{m/s}$. Ако је други пешак за 12 секунди прешао y метара, тада је $110 - y = \frac{25}{3} \cdot 12$, одакле је $y = 10$. Дакле, његова брзина је $\frac{5}{6}\,\mathrm{m/s}$. Растојање од места сусрета воза са првим пешаком до места сусрета са другим је $s = 360 \cdot \frac{25}{3} = 3000\,\mathrm{m}$. Нека су се пешаци срели после t секунди од сусрета првог пешака са возом. Тада је

$$t \cdot 1 + (t - 360) \cdot \frac{5}{6} = 3000,$$

одакле је $t = 1800\,\mathrm{s} = 30$ минута. Према томе, пешаци су се срели у $9^{40}\,\mathrm{h}$.

Одговор: D.

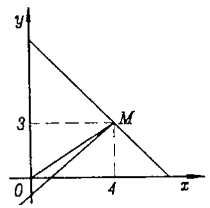
569. Како се све четири лопте међусобно додирују, то четири тачке — њихова средишта, представљају темена правилног тетраедра ивице $a = 2r$. Висина правилног тетраедра је $h = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, па је одстојање најудаљеније тачке од равни стола

$$r + h + r = a + a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = 2r\left(1 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

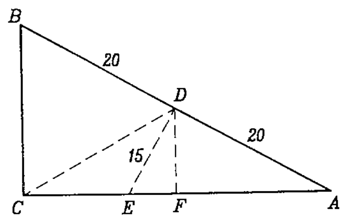
Одговор: E.

570. Дате праве се секу у тачки $M(4,3)$, сл. 72. $OM = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.

Одговор: B.



Сл. 72



Сл. 73

571. Нека је првобитна цена била a динара. После два снижења од 10% и 15% цена је

$$a - \frac{10}{100}a - \frac{15}{100}\left(a - \frac{10}{100}a\right) = \frac{76{,}5}{100}a.$$

Дакле, ова два снижења еквивалентна су једнократном снижењу од 23,5%.

Одговор: D.

572. Нека је a страница троугла, а b квадрата. Из $\frac{a}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$ имамо да је $a = 6\,\mathrm{cm}$, а из $3a = 4b$ налазимо да је $b = \frac{9}{2}\,\mathrm{cm}$, па је $P = b^2 = \frac{81}{4}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: E.

573. За странице са једноцифреним ознакама употреби се 9 цифара, са двоцифреним $90 \cdot 2 = 180$ цифара. Дакле, за странице са троцифреним ознакама преостаје $2322 - 189 = 2133$ цифре, а њих има $2133 : 3 = 711$. Значи да је последња страница у књизи нумерисана бројем $9 + 90 + 711 = 810$.

Одговор: E.

574. Из $\frac{x+14}{x+5-1} = \frac{x+5}{x}$ налазимо да је $x = 4$, па је полазни разломак $\frac{4}{9}$.

Одговор: D.

575.

$$\sqrt{\frac{5}{4}} - \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt{25} - \sqrt{16}}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{2\sqrt{5}}{20} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Одговор: A.

576. Ротацијом се добијају две подударне купе са заједничком основом полупречника $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ и изводницом $s = a$. Површина тела једнака је двострукој површини омотача једне од тих купа:

$$P = 2r\pi s = 2 \cdot \frac{a}{2}\sqrt{2}\,\pi a = a^2\pi\sqrt{2}.$$

Одговор: B.

577. Нека је D средиште хипотенузе, E пресечна тачка нормале на хипотенузу и дуже катете и F подножје нормале из D на дужу хипотенузу (сл. 73). Тада је $AE = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\,\mathrm{cm}$. Површина троугла AED је $\frac{AE \cdot DF}{2} = \frac{AD \cdot DE}{2}$. Одавде је $DF = \frac{AD \cdot DE}{AE} = 12\,\mathrm{cm}$. Међутим, DF је средња дуж троугла ABC, па је $BC = 2\,DF = 24\,\mathrm{cm}$ и $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = 32\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

578. Полазни број се може написати у облику $100000 + x$, $0 \leqslant x < 100000$. Дакле, имамо

$$(100000 + x) \cdot 3 = 10x + 1,$$

одакле је $x = 42857$. Тражени број је 142857, а његов збир цифара 27.

Одговор: E.

579. На основу датих података закључујемо да су странице основе пирамиде $AB = 1\,\mathrm{cm}$, $AC = \sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, $BC = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$. Закључујемо да је троугао ABC правоугли (важи $AB^2 + AC^2 = BC^2$!) па је његова површина $\frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: C.

580. Девојчице се могу распоредити на парним или непарним местима. У првом случају могу се распоредити на два различита начина, али тада се и дечаци могу распоредити на два начина. Исто је и у другом случају, па је укупан број различитих распореда $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Одговор: C.

581. Неједначина се може написати у облику $|x+1|+|x-4| \leqslant 7$. За $x \leqslant -1$ имамо $-x-1-x+4 \leqslant 7$; за $-1 \leqslant x < 4$: $x+1-x+4 \leqslant 7$ и за $x \geqslant 4$: $x+1+x-4 \leqslant 7$. Налазимо да су решења сви реални бројеви x за које важи $-2 \leqslant x \leqslant 5$. У овом интервалу има 8 целих бројева.

Одговор: D.

582. $\sqrt{\frac{25}{4}} - \sqrt{25} = \frac{5}{2} - 5 = -\frac{5}{2}$.

Одговор: B.

583. Збир $a+b$ треба да буде једнак 2 или 11. Постоји 11 оваквих бројева:

$$2052, 2151, 2250, 2259, 2358, 2457, 2556, 2655, 2754, 2853 \text{ и } 2952.$$

Одговор: D.

584. Одговор: C.

585. $B : M = r^2\pi : 2r^2\pi = 1 : 2$.

Одговор: B.

586. Нека је првобитна запремина $V = abc$; тада је

$$V_1 = \frac{11}{10}a \cdot \frac{9}{10}b \cdot c = \frac{99}{100}V = 99\%V.$$

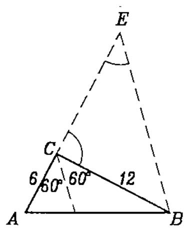
Одговор: B.

587. $2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n-1}(1+2+4) = 7 \cdot 2^{n-1}$.

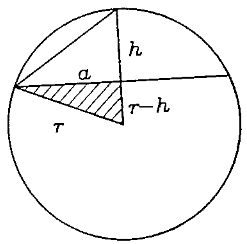
Одговор: B.

588. Нека је $BE \parallel CD$ (сл. 74). Тада је $\angle BCE = 60^\circ$ и $\angle AEB = 60^\circ$, па је троугао BCE једнакостранични и $BC = CE = BE = 12$. По Талесовој теореми је $AC : CD = AE : BE$, тј. $6 : CD = 18 : 12$, одакле је $CD = 4\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.



Сл. 74



Сл. 75

589. Дата неједначина еквивалентна је неједначини $\frac{2}{x-4} - 1 > 0$, тј. $\frac{6-x}{x-4} > 0$. Ако је $6-x<0$ и $x-4<0$ нема решења, а ако је $6-x>0$ и $x-4>0$, добијамо да је $4<x<6$.

Одговор: D.

590. Ако је производ цифара 4, у обзир долазе две комбинације: $1,1,1,1,4$ и $1,1,1,2,2$. Има 15 петоцифрених бројева са овим цифрама:

$$11114, 11141, 11411, 14111, 41111,$$
$$11122, 11212, 11221, 12112, 12121, 12211, 21112, 21121, 21211, 22111.$$

Одговор: E.

591. Имамо да је (сл. 75) $r^2 = a^2 + (r-h)^2$, тј. $2rh = a^2 + h^2$ и $2r = \frac{a^2+h^2}{h}$.

Одговор: A.

592. Очигледно је да не може бити y дељиво са 3. Тако је $y = 3k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Добијамо

$$3x^2 = y^2 - 5 = (3k \pm 1)^2 - 5 = 9k^2 \pm 6k + 1 - 5 = 3(3k^2 \pm 2k - 1) - 1.$$

Ово је немогуће, јер број на десној страни једнакости није дељив са 3. Значи да дата једначина нема целобројних решења.

Одговор: E.

593. Нека је k укупна количина робе, а c планирана цена. Тада је

$$\frac{k}{6} \cdot 0{,}2c + \frac{k}{3} \cdot x \cdot c = \frac{k}{2} \cdot 0{,}1c,$$

при чему је x тражени проценат. После скраћивања са kc добијамо једначину $\frac{1}{6} \cdot 0{,}2 + \frac{1}{3}x = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1$, одакле је $x = 0{,}05 = 5\%$.

Одговор: C.

594. Имамо да је $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{3}{13}\right)^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$.

Одговор: C.

595. $5^{32} : 5^{25} = 5^7$.

Одговор: D.

596. Одговор: E.

597. Страница описаног шестоугла је $b = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, а уписаног $a = r$, па је разлика површина

$$6\frac{b^2\sqrt{3}}{4} - 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}r^2.$$

Одговор: A.

598. Дужина лука овог исечка $\frac{r_1\pi\alpha}{180^\circ} = \frac{1{,}5\pi \cdot 120^\circ}{180^\circ} = \pi$ једнака је обиму основе купе; дакле, $2r\pi = \pi$, па је $r = \frac{1}{2}$. Изводница купе је $s = r_1 = \frac{3}{2}$, а њена висина $H = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{2}$. Запремина купе је $V = \frac{r^2\pi H}{3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}$.

Одговор: B.

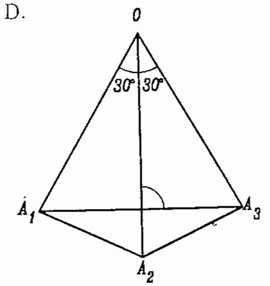
599. Решење прве једначине је $\dfrac{m+3}{m-1}$, $m \neq 1$, а друге $\dfrac{m-4}{m+2}$, $m \neq -2$. Из $\dfrac{m+3}{m-1} = \dfrac{m-4}{m+2}$ налазимо $m = -\dfrac{1}{5}$.

Одговор: B.

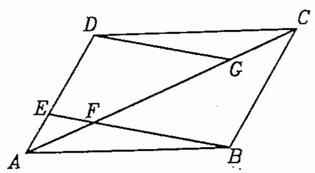
600. Нека су A_1, A_2, A_3 три узастопна темена правилног 12-тоугла (сл. 76). Како је $\angle A_1OA_2 = 30°$, то је $\angle A_1OA_3 = 60°$, па је троугао A_1A_3O једнакостраничан и $A_1A_3 = 12\,\mathrm{cm}$. Површина правилног дванаестоугла је

$$P = 6 \cdot P_{A_1A_2A_3O} = 6 \cdot \frac{A_1A_2 \cdot OA_2}{2} = 432\,\mathrm{cm}^2.$$

Одговор: D.



Сл. 76



Сл. 77

601. 1000 kg јагода садржи 920 kg воде и 80 kg суве материје. Када вода делимично испари, остане 90% воде и 10% суве материје — што је такође 80 kg. Маса јагода је 100%, дакле $10 \cdot 80\,\mathrm{kg} = 800\,\mathrm{kg}$.

Одговор: E.

602.

$$\left|\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right| - \left|\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right| = \frac{3}{2} - \sqrt{2} - \frac{3}{2} - \sqrt{2} = -2\sqrt{2}.$$

Одговор: A.

603. За $n = 1$ — $p = 5$. За $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} p &= n^4 + 4 = n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 = (n^2+2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n) = ((n-1)^2 + 1)((n+1)^2 + 1). \end{aligned}$$

Дакле, за $n \geqslant 2$, p је сложен број и једина могућност је $p = 5$ за $n = 1$.

Одговор: A.

604. Нека је G тачка дужи AC таква да је $BE \parallel DG$ (сл. 77). Тада је $\dfrac{AF}{AG} = \dfrac{AE}{AD} = \dfrac{1}{4}$, па је $AF = \dfrac{1}{4}AG$. Из подударности троуглова ABF и CDG следи да је $CG = AF$, па је $AF = \dfrac{1}{5}AC$.

Одговор: B.

605. Најмањи шестоцифрен број са различитим цифрама је 102345, али он није дељив са 11, јер је за то неопходно и довољно да разлика збира цифара на парним местима и непарним местима буде дељива са 11. Потражимо први већи број који задовољава услове. Таквог броја нема међу бројевима 1023**, јер би на месту звездица морале бити исте цифре. Међу бројевима 1024** најмањи који задовољава услове је 102465. То је тражени број и његов збир цифара је 18.

Одговор: C.

606. Цифра y треба да буде 0 или 5, а збир $1+7+2+x+y$ дељив са 9. За $y = 0$ добија се $x = 8$, а за $y = 5$ — $x = 3$. Дакле, постоје два оваква броја: 17 280 и 17 235.

Одговор: A.

607. $\dfrac{2^{4n+8}}{2^{4n+4}} = 2^4$.

Одговор: E.

608. $V = a^3 = \left(\dfrac{d\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \dfrac{d^3\sqrt{2}}{4}$.

Одговор: D.

609. $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$. Напомена: видети задатак 459.

Одговор: A.

610. Добија се $a = 3\,\mathrm{cm}$, $H = d\sqrt{3} = 3\sqrt{6}\,\mathrm{cm}$ и $P = 2a(a + 2H) = 18(1 + 2\sqrt{6})\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: E.

611. Како је $OB = r$, $AN = \dfrac{r}{2}$, $BN = \dfrac{r}{2}\sqrt{3}$, добијамо

$$P = \frac{(OB + AN)BN}{2} - \frac{1}{6}r^2\pi = r^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}(9\sqrt{3} - 4\pi).$$

Одговор: E.

612. Из $6(a+1)^2 - 6a^2 = 78$ налазимо $a = 6\,\mathrm{cm}$, па је $V_1 - V = (a+1)^3 - a^3 = 127\,\mathrm{cm}^3$.

Одговор: E.

613. Број радника и број сати дневног рада су обрнуто пропорционални, а број израђених производа је директно пропорционалан броју радних дана, па је $x : 6 = (21 \cdot 8 \cdot 1260) : (28 \cdot 7 \cdot 720)$, одакле је $x = 9$.

Одговор: E.

614. Из система једначина $90x + 60y = 72 \cdot 50$, $x + y = 50$ налазимо $x = 20$, $y = 30$.

Одговор: D.

615. Маса одливене воде је $\dfrac{12}{100} \cdot 2000 = 240\,\mathrm{g}$. То је 20% њене масе, па је маса воде $240 \cdot \dfrac{100}{20} = 1200\,\mathrm{g}$, а маса празне посуде $2000 - 1200 = 800\,\mathrm{g}$.

Одговор: D.

616. Ако је p прост број облика $3k+1$, тада је број $p+20$ сложен (дељив са 3). Слично, ако је p прост број облика $3k+2$, тада је број $p+28$ сложен. Дакле, могуће је само да буде $p=3$. Тада су бројеви $p+20=23$ и $p+28=31$ прости.

Одговор: B.

617. Висине паралелограма добијамо из $\frac{1}{2}h_1 \cdot 5 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ и $5h_1 = 4h_2$. Добија се $h_1 = \frac{12}{5}\,\mathrm{cm}$, $h_2 = 3\,\mathrm{cm}$. Апотеме пирамиде налазимо применом Питагорине теореме: $h_a = \sqrt{2^2 + \left(\frac{h_a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{136}}{5}\,\mathrm{cm}$ и $h_b = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}$; површина пирамиде је $P = B + 2 \cdot \frac{h_a \cdot a}{2} + 2 \cdot \frac{h_b \cdot b}{2} = 22 + \sqrt{136}\,\mathrm{cm}^2$. Напомена: упоредити са задацима 148 и 541.

Одговор: A.

618. $\frac{a^4b^6}{ab^4} \cdot \frac{a^3b}{a^6b^{12}} = \frac{a^7b^7}{a^7b^{16}} = \frac{1}{b^9}$.

Одговор: B.

619. Одговор: D. **620.** Одговор: A.

621. Нека је a основна ивица, H висина призме и r полупречник лопте. Како је $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ и $H = 2r = \frac{a}{3}\sqrt{3}$, то је

$$\frac{P_l}{P_p} = \frac{4\left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2\pi}{2 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} + 3a \cdot \frac{a}{3}\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}.$$

Одговор: B.

622. За $x \geqslant 0$ имамо $x < -\frac{x}{2} + 1$, тј. $x < \frac{2}{3}$, а за $x < 0$, $-x < -\frac{x}{2} + 1$, тј. $x > -2$. Целобројна решења дате неједначине су бројеви 0 и -1.

Одговор: C.

623. Број x не може бити дељив са 3 јер x^2 није дељив са 3. Ако је $x = 3k \pm 1$, $k \in \mathbf{Z}$, тада је x^2 облика $3l+1$, $l \in \mathbf{Z}$ и не даје остатак 2 при дељењу са 3. Дакле, не постоје цели бројеви x и y такви да важи $x^2 = 3y + 2$ (в. задатак 592).

Одговор: A.

624. У $2000\,\mathrm{kg}$ пшенице је 84% ($1680\,\mathrm{kg}$) суве материје и 16% ($320\,\mathrm{kg}$) влаге. После сушења преостало је $120\,\mathrm{kg}$ влаге, што представља $6\frac{2}{3}\%$ од нове количине ($1680+120 = 1800\,\mathrm{kg}$) пшенице.

Одговор: E.

625. Рационалан је само број C.

Одговор: B.

626. Нека је $ABCD$ дати правоугаоник и EF ($E \in AB$, $F \in CD$) дуж по којој је папир пресавијен када се тачка A поклопила са тачком C. Ако обележимо $EB = x$, тада је $AE = FC = CE = 16 - x$. Из правоуглог троугла EBC имамо $(16-x)^2 = x^2 + 12^2$, па је $x = 3{,}5\,\mathrm{cm}$. Нека је O пресек дијагонала правоугаоника $ABCD$. Биће $OE^2 = OC^2 + CE^2$, тј. $OE = 7{,}5\,\mathrm{cm}$ и $EF = 2OE = 15\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

627. Бар један ученик осмог разреда може се изабрати на 7 начина, седмог такође на 7 и шестог на 3 начина, па је укупан број избора $7 \cdot 7 \cdot 3 = 147$. Напомена: упоредити са задатком 166.

Одговор: E.

628. Нека је $\overline{a_1a_2\ldots a_5} = x$. Тада је $(10x + a_6) \cdot 4 = 100\,000a_6 + x$, тј. $x = 2564a_6$. Како је $x \geqslant 10\,000$, то је $a_6 \geqslant 4$. Тражени шестоцифрени бројеви су: 102 564, 128 205, 153 846, 179 487, 205 128 и 230 769.

Одговор: E.

629. Нека је O центар датог круга и T средиште тетиве AB. Из сличности троуглова ABD и BOT имамо $\frac{AB}{AD} = \frac{BO}{BT} = \frac{BO}{AB/2}$, тј. $\frac{AB^2}{AD} = 2\,BO = 10\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.

630. Из $0{,}8 \cdot 0{,}9x = 108$ добија се $x = 150$.

Одговор: A.

631. Нека је x број дана потребних жени да сама окопа њиву. Тада је $\frac{1}{27} + \frac{1}{x} = \frac{1}{18}$, одакле је $x = 54$.

Одговор: C.

632. $3\sqrt{3} + 2\sqrt{27} - \sqrt{75} - \sqrt{108} = 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$.

Одговор: A.

633. Страница троугла је $a = r\sqrt{3}$, па је

$$P = r^2\pi - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = r^2\pi - \frac{3r^2\sqrt{3}}{4} = r^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

Одговор: E.

634. Из $\alpha_1 : \beta_1 : \gamma_1 = 5 : 6 : 7$ и $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360°$ добијамо $\alpha_1 = 100°$, $\beta_1 = 120°$ и $\gamma_1 = 140°$, па је $\beta = 180° - \beta_1 = 60°$.

Одговор: C.

635. Из $10v = 15(v - 20)$ добијамо да је брзина аутомобила $v = 60\,\mathrm{km/h}$, па је удаљеност ових градова $s = 60 \cdot 10 = 600\,\mathrm{km}$.

Одговор: B.

636. Како је у троуглу ABC: $\gamma = 100°$, то је $\alpha = \beta = 40°$, а тражени угао је $10° + \frac{\alpha}{2} = 30°$.

Одговор: C.

637. Из $11 \mid \overline{x5225y}$ следи $x = y$, а из $3 \mid \overline{x5225y}$ да $3 \mid x+7$, тј. $x \in \{2,5,8\}$. Тражени бројеви су 252 252, 552 255 и 852 258.

Одговор: C.

638. Нека је S центар уписаног круга датог једнакокраког троугла ABC ($AC = BC$) а E и D подножја нормала из S на AC, односно AB. Из сличности троуглова CES и CDA следи $\frac{CS}{SD} = \frac{AC}{AD}$, одакле је $AD = 24\,\mathrm{cm}$ и $AB = 48\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

639. 40 крава за 50 дана попасе 2000 дневних порција, а 60 крава за 30 дана попасе 1800 порција. Дакле, за $50 - 30 = 20$ дана израсте $2000 - 1800 = 200$ порција, тј. 10 порција траве дневно. То значи да је на ливади на почетку било $2000 - 50 \cdot 10 = 1500$ порција траве. После 75 дана укупно би било $1500 + 75 \cdot 10 = 2250$ порција, тако да би ту ливаду попасло $2250 : 75 = 30$ крава.

Одговор: B.

640. $v_{sr} = \dfrac{2s}{t_1 + t_2} = \dfrac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{40}} = \dfrac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{40}} = 48\,\mathrm{km/h}$.

Одговор: B.

641. Троуглови MBC и MAD су слични, па је $MD = \dfrac{MA \cdot MB}{MC} = 6\,\mathrm{cm}$ и $CD = MD - MC = 2\,\mathrm{cm}$.

Одговор: E.

642. $(5 + 2^9 + 2^{30}) : (5 + 2^9 + 2^{30}) = 1$.

Одговор: D.

643. Из $y = \frac{2}{3}x$, $z = \frac{3}{8}(x + y) = \frac{5}{8}x$ и $x + y + z = 1650$, добијамо $x = 720$.

Одговор: C.

644. Полупречник уписаног круга је $r_1 = \frac{r}{2}\sqrt{3}$, па је $P = (r^2 - r_1^2)\pi = \frac{9\pi}{4}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: A.

645. Из $\frac{1}{20} + \frac{1}{x} = \frac{1}{12}$ налазимо $x = 30\,\mathrm{h}$, па је $\frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60}$.

Одговор: E.

646. Добијамо: основне ивице квадра $a = \frac{d_1}{2}\sqrt{3} = 3\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$ и $b = \frac{d_1}{2} = 3\,\mathrm{cm}$, а висина $H = \frac{d_1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, па је $V = abH = 54\,\mathrm{cm}^3$.

Одговор: B.

647. Решења прве неједначине су сви реални бројеви за које важи $x < -\frac{1}{35}$, а друге $x > -\frac{67}{4}$. Цели бројеви који задовољавају овај систем неједначина су: -16, -15, ..., -2 и -1.

Одговор: C.

648. Нека је $BC < AC$, D средиште дужи AB и E подножје висине из темена C. Применом Питагорине теорееме у троуглу CDE налазимо $DE = 8\,\mathrm{cm}$. Сада је $EB = BD - DE = 20\,\mathrm{cm}$ и $CB = \sqrt{CE^2 + EB^2} = 25\,\mathrm{cm}$.

Одговор: E.

649. Једначина се може представити у облику $|2x - 1| - |3x - 2| - 3x + 1 = 2$. Треба разматрати случајеве: $x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$ и $x \geqslant \frac{2}{3}$. Једино решење је $x_1 = -1$.

Одговор: A.

650. Како је $t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ и $t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, то је $t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2)$ и $c^2 = a^2 + b^2 = \frac{4}{5}(t_a^2 + t_b^2)$. Добија се $c = 14\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

651. Број облика $10^n + 11$ ($n \geqslant 0$) је облика $4k + 3$, $k \in \mathbf{Z}$ и не може бити квадрат целог броја (квадрати целих бројева при дељењу са 4 дају остатак 0 или 1). Дакле, једини потпун квадрат у овом низу је број 1.

Одговор: E.

652. Означимо са O центар датог кружног исечка, AB дату тетиву, S центар уписаног круга, C средиште дужи AB и D подножје нормале из S на OB. Из сличности троуглова SOD и BOC имамо $\frac{6 - r}{r} = \frac{6}{2}$, па је $r = \frac{3}{2}\,\mathrm{cm}$.

Одговор: D.

653. Нека је h висина ваљка, а s_1 и r изводница, односно полупречник основе дела купе изнад ваљка. Из $\pi s_1 r = 2\pi r h$ налазимо $s_1 = 2h$. Из $\frac{s_1}{10} = \frac{8 - h}{8}$ сада добијамо $h = \frac{40}{13}\,\mathrm{cm}$.

Одговор: C.

654. $x = 2\frac{17}{21}$.

Одговор: C.

655. $\sqrt{\dfrac{x^2 \cdot x^{12}}{x^4}} = \sqrt{x^{10}} = x^5$.

Одговор: E.

656. $P = \frac{1}{4}c^2 = \frac{9}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: A.

657. Из $\frac{d_2\sqrt{3}}{2} = \frac{d_1}{2}$ налазимо $d_2 = 4\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.

658. Једначина се може написати у облику $|x + 3| + |x - 3| = 10$. Треба размотрити случајеве: $x \leqslant -3$, $-3 < x \leqslant 3$ и $x > 3$. Решења су $x_1 = -5$, $x_2 = 5$.

Одговор: C.

659. Одговор: A.

660. Нека је $D = qd + r$. Тада важи $D + 65 = q(d+5) + r$, па је $5q = 65$ и $q = 13$.

Одговор: A.

661. $r = \dfrac{a+b-c}{2} = 2\,\mathrm{cm}$.

Одговор: C.

662. $\dfrac{b^{7n+2}\cdot b^{3n}}{b^{4n}\cdot b^{6n}} = \dfrac{b^{10n+2}}{b^{10n}} = b^2$.

Одговор: E.

663. Означимо тражено растојање са s. Из $\dfrac{s}{36} - \dfrac{s}{48} = \dfrac{3}{4}$ налазимо $s = 108\,\mathrm{km}$.

Одговор: D.

664. $\overline{xxyy} = 11(100x + y) = k^2$. Одавде следи да је $k = 11n$, $n \in \mathbf{N}$, па је $100x + y = 11n^2$ и $11 \mid x + y$. Због $1 \leqslant x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$ мора да буде $x + y = 11$. Из $11n^2 = 99x + x + y = 99x + 11$ је $n^2 = 9x + 1$. Ова једнакост важи само за $x = 7$. Тада је $y = 4$. Једини овакав четвороцифрен број је 7744.

Одговор: B.

665. Полупречник круга је $r = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, а висина ромба $h = 2r = 3\sqrt{3}$, па је страница ромба $a = \dfrac{P}{h} = 6\,\mathrm{cm}$. Како је $h = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, то је оштар угао ромба 60°.

Одговор: E.

666. $\dfrac{2^n\cdot 5^n}{2^{2n}} = \left(\dfrac{2\cdot 5}{4}\right)^n = \left(\dfrac{5}{2}\right)^n$.

Одговор: A.

667. Решење једначине је број 2.

Одговор: D.

668. $x = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.

Одговор: B.

669. Важи $\angle EBC = \angle CAB$ (углови са нормалним крацима) $= \angle ABD$, па је $\angle EBC = \dfrac{1}{4}\cdot 90^\circ$, а $\angle DBE = 45^\circ$.

Одговор: C.

670. $7 * (4 * 3) = 7 * \dfrac{4\cdot 3}{2} = 7 * 6 = \dfrac{7\cdot 6}{2} = 21$.

Одговор: C.

671. $h_c = \sqrt{4\cdot 9} = 6\,\mathrm{cm}$, $P = \dfrac{4+9}{2}\cdot 6 = 39\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: E.

672. Ако је p непаран прост број, бројеви $3p+1$ и $5p+1$ су парни, дакле сложени. Једина могућност је, дакле, $p = 2$; тада је $3p+1 = 7$, $5p+1 = 11$.

Одговор: B.

673. Ако је h апотема пирамиде, биће $h\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a}{6}\sqrt{3}$, па је $h = \dfrac{a}{3}$ и $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah = \dfrac{a^2(\sqrt{3}+2)}{4}$.

Одговор: E.

674. У 200 g 20%-ног раствора има 40 g соли. Да би тих 40 g представљало 5% раствора, количина воде треба да буде $20\cdot 40 = 800\,\mathrm{g}$. Дакле, треба додати $800 - 200 = 600\,\mathrm{g}$ воде.

Одговор: D.

675. Нека је $10x + y = x^2 + y^3$, тј. $10x - x^2 = y(y-1)(y+1)$. Производ $y(y-1)(y+1)$ три узастопна цела броја је дељив са 6, па је и $6 \mid x(10-x)$, одакле је $x = 4$ или $x = 6$, а $y^3 - y = 24$ (y је цифра!) па се налази $y = 3$. Тражени бројеви су $43 = 4^2 + 3^3$ и $63 = 6^2 + 3^3$.

Одговор: C.

676. Ова пирамида је правилан тетраедар странице $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, па је његова запремина (в. задатак 32) $V = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^3\sqrt{2} = \dfrac{a^3}{24} = \dfrac{1}{3}\,\mathrm{cm}^3$.

Одговор: B.

677. Како је $\dfrac{OE}{6} = \dfrac{DE}{DA}$ и $\dfrac{OE}{4} = \dfrac{AE}{DA}$, то је $OE\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{DE + AE}{DA} = 1$, па је $OE = 2{,}4\,\mathrm{cm}$.

Одговор: E.

678. $\dfrac{3}{4}a = 18$ даје $a = 24$, па је $\dfrac{4}{3}a = 32$.

Одговор: D.

679. Вредност израза је 4.

Одговор: D.

680. $P = (R^2 - r^2)\pi = \left(\dfrac{d^2}{4} - \dfrac{d^2}{8}\right)\pi = \dfrac{d^2\pi}{8} = 9\pi$.

Одговор: B.

681. Из $\dfrac{5\cdot\pi\cdot 216^\circ}{180^\circ} = 2r\pi$ добијамо $r = 3\,\mathrm{cm}$, па је $H = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4\,\mathrm{cm}$ и $V = \dfrac{1}{3}r^2\pi H = 12\pi\,\mathrm{cm}^3$. Напомена: упоредити са задатком 436.

Одговор: E.

682. Три броја: 123 321, 423 324 и 723 327 (в. задатак 637).

Одговор: B.

683. Пресечна тачка је $M(3,4)$, а њено растојање од координатног почетка $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Одговор: C.

684. Полуобим троугла је $s = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{c}{2} = r + 2R$, а површина $P = r \cdot s = r(r+2R) = 24\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: C.

685. Централни угао који одговара основици овог троугла је 60°, па је $c = 6\,\mathrm{cm}$, а одговарајућа висина је $h = c + \dfrac{c}{2}\sqrt{3} = 3(2+\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$. Површина троугла је $P = \dfrac{1}{2}ch = 9(\sqrt{3}+2)\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

686. Како је $a \cdot h_a = b \cdot h_b$, то је $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a} = \dfrac{3}{2}$. Из ове релације и $a + b = 20$ налазимо $a = 12\,\mathrm{cm}$, $h_a = 4\,\mathrm{cm}$ ($b = 8\,\mathrm{cm}$, $h_b = 6\,\mathrm{cm}$), па је $P = ah_a = 48\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: B.

687. Укупна маса продатих сандука је дељива са 3, а то је могуће једино у случају да је непродат пети сандук, што се непосредно проверава.

Одговор: E.

688. Означимо призму са $ABCA'B'C'$. Нека је D тачка хипотенузе AB доње основе призме која је подножје висине троугла ABC. Тада је $\angle CDC' = 45^\circ$ и $CC' = CD = \dfrac{c}{2}\sqrt{3}$, а запремина $V = \dfrac{1}{3}\dfrac{c^2\sqrt{3}}{8} \cdot CC' = \dfrac{c^3}{32} = 2\,\mathrm{cm}^3$.

Одговор: E.

689. Решења дате неједначине у скупу реалних бројева су сви x за које важи $x \in (3/2, 9/5]$. У овом интервалу нема целих бројева.

Одговор: A.

690. Из $x(x-5) = (x-3)^2$ добија се $x = 9$. Површина је $P = 9 \cdot 4 = 36\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: C.

691. $a = 2{,}5$.

Одговор: C.

692. $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 53$.

Одговор: A.

693. Из $40 \cdot 0{,}6 + 60 \cdot 0{,}4 = (100 + x) \cdot 0{,}25$ добија се $x = 921$.

Одговор: D.

694. Тражени угао једнак је $\dfrac{\alpha}{2} - (90^\circ - \beta) = \dfrac{180^\circ - \beta - \gamma}{2} - 90^\circ + \beta = \dfrac{\beta - \gamma}{2} = 13^\circ$.

Одговор: C.

695. Последња цифра броја 6^{1999} је 6. Последње цифре бројева 7^n и 8^n, $n \in \mathbf{N}$ се периодично, са периодом 4, понављају; то су 1, 7, 9 и 3, односно 6, 8, 4 и 2. 7^{1999} се завршава цифром 3, а 8^{1999} цифром 2. Дакле, последња цифра збира $6^{1999} + 7^{1999} + 8^{1999}$ је последња цифра збира $6 + 3 + 2$, тј. 1.

Одговор: A.

696. Неједначина је еквивалентна систему неједначина $-50 \leqslant |x| - 2 \leqslant 50$, тј. $-48 \leqslant |x| \leqslant 52$, тј. $|x| \leqslant 52$, односно $-52 \leqslant x \leqslant 52$. Целобројних решења има $2 \cdot 52 + 1 = 105$.

Одговор: C.

697. $P_{12} - P_6 = 6 \cdot \dfrac{r \cdot r}{2} - 6 \cdot \dfrac{r^2\sqrt{3}}{4} = 3r^2\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9(2-\sqrt{3})\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: B.

698. Основна ивица добијене пирамиде је $b = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$, а апотема $h = \sqrt{a^2 + \dfrac{b^2}{4}} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$, па је површина омотача $M = 4 \cdot \dfrac{bh}{2} = 54\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: A.

699. Нека је B теме правог угла троугла ABC ($AB < CB$), BD висина и BE тежишна дуж. Означимо $BD = 4t$ и $BE = 5t$. Тада је $DE = \sqrt{BE^2 - BD^2} = 3t$, $AD = AE - DE = 2t$, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = t\sqrt{20}$, $DC = DE + EC = 8t$ и $BC = \sqrt{BD^2 + DC^2} = t\sqrt{80}$, па је $AB : CB = t\sqrt{20} : t\sqrt{80} = 1 : 2$.

Одговор: A.

700. Из $\dfrac{n}{5} + \dfrac{yn}{7} + 303 = n$ имамо $n = \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101}{28 - 5y}$. Провером се установи да мора бити $y = 5$, па је $n = 3535$.

Одговор: D.

701. Нека је основа пирамиде ABC, D средиште хипотенузе AB, а K и L средишта катета $BC = a$, односно $AC = b$. Тада је $\angle DKS = 45^\circ$ и $\angle DLS = 60^\circ$ (S је врх пирамиде). Како су бочне ивице пирамиде једнаке, подножје висине (дужине H) пирамиде је тачка D. Биће $H = \dfrac{b}{2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{3}$, дакле $b = a\sqrt{3}$. Како је $\sqrt{a^2+b^2} \cdot h_c = a \cdot b$ ($= 2P_{\triangle ABC}$), то је $h_c = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, тј. $a = \dfrac{2h_c}{\sqrt{3}}$, $b = 2h_c$, па је $H = h_c$. С друге стране, $AB = \sqrt{a^2+b^2} = \dfrac{4h}{\sqrt{3}}$ и

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB \cdot h_c}{2} \cdot H = \frac{2h_c^3}{3\sqrt{3}} = 2\,\mathrm{cm}^3.$$

Одговор: D.

702. Одговор: A.

703. $4\sqrt{2} + 30\sqrt{2} - 21\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$.

Одговор: B.

704. Из $6a^2 = P$ добија се $a = \sqrt{\dfrac{P}{6}}$, па је $V = a^3 = \dfrac{1}{36}P\sqrt{6P}$.

Одговор: D.

705. Како је $10x + 1 = 3(2000 + x)$, то је $x = 857$.

Одговор: C.

706. За $x < -\frac{3}{2}$ добија се $-2x-3=5+4x$. Број $-\frac{4}{3}$ није решење једначине, јер није мањи од $-\frac{3}{2}$. За $x \geqslant -\frac{3}{2}$ једначина постаје $3+2x=5+4x$ и решење последње једначине, број -1, истовремено је и једино решење полазне једначине.

Одговор: B.

707. Дијагонале основе су $d_1 = H\sqrt{3} = 3\,\mathrm{cm}$ и $d_2 = H = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, а основна ивица $a = \sqrt{(d_1/2)^2+(d_2/2)^2} = \sqrt{3}\,\mathrm{cm}$, па је површина омотача $M = 4aH = 12\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: C.

708. Нека су a и b катете, а c хипотенуза троугла. По условима задатка је $a+b+c=80$, $ab=16c$, $a^2+b^2=c^2$. Како је $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, то је $(80-c)^2=c^2+32c$, одакле се добија $c=\frac{100}{3}\,\mathrm{cm}$ и $P=\frac{16c}{2}=\frac{800}{3}\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: B.

709. Из сличности троуглова ABE и BCD (E - средиште дужи BC) добијамо $\frac{BC}{CD} = \frac{AB}{BE} = \frac{4}{1}$, па је $BC = 4CD$, а како је $AC = 2BC$, то је $AC = 8CD$, па је $AD : CD = 7:1$.

Одговор: B.

710. Може се формирати таблица

	СЕСТРА	БРАТ
Сада	$2x$	y
Пре	y	x
Касније	$63-2x$	$2x$

Тада је $2x-y=y-x$ и $63-4x=2x-y$. Решење овог система једначина је $x=14$, $y=21$, па је сестра старија од брата $2x-y=7$ година.

Одговор: C.

711. Означимо са Ј, К, Ш почетне количине јабука, крушака и шљива. По услову задатка је $\text{Ш} = \frac{\text{Ј}+\text{К}+\text{Ш}}{3}$, одакле је $\text{Ш} = \frac{\text{Ј}+\text{К}}{2}$. Остало је $\frac{1}{2}\text{Ј}+\frac{1}{3}\text{К}=\frac{1}{2}\text{К}$, одакле је $\text{К}=3\text{Ј}$. Продато је

$$\frac{1}{2}\text{Ј}+\frac{2}{3}\text{К}+\text{Ш} = \frac{1}{2}\text{Ј}+\frac{2}{3}\cdot 3\text{Ј}+\frac{\text{Ј}+3\text{Ј}}{2} = 4{,}5\text{Ј},$$

а на почетку је било $\text{Ј}+\text{К}+\text{Ш} = \text{Ј}+3\text{Ј}+\frac{\text{Ј}+3\text{Ј}}{2} = 6\text{Ј}$. Од количине 6Ј продато је 4,5Ј — то представља 75%.

Одговор: D.

712. Нека је H подножје висине трапеза из тачке C и G средиште крака AD. Тада је $BH = 8\,\mathrm{cm}$ и $CH = \sqrt{10^2-8^2} = 6\,\mathrm{cm}$, а $GE = \frac{AB+CD}{2} = 21\,\mathrm{cm}$. Правоугли троуглови CHB и GFE су слични ($\angle CBH = \angle GFE$ - углови са нормалним крацима), па је $\frac{CH}{CB} = \frac{GE}{FE}$ и одавде $FE = 35\,\mathrm{cm}$.

Одговор: B.

713. Означимо са c и d дужи, односно краћи крак трапеза у основи пирамиде. Како су све бочне стране пирамиде нагнуте према равни основе под истим углом, то је основа пирамиде тангентни четвороугао и важи $c+d=a+b=8$. С друге стране важи $c^2-d^2=(a-b)^2=16$, па из $(c+d)(c-d)=16$ налазимо $c-d=2$. Решење система једначина $c+d=8$, $c-d=2$ је $c=5$, $d=3$. Полупречник уписаног круга трапеза је $r=\frac{d}{2}=1{,}5$, а висина пирамиде $H=2r=3$, па је површина омотача $M=\frac{(a+b+c+d)H}{2}=24\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: E.

714. Одговор: A.

715. $M = \frac{7(x+5)}{2(x+5)} = \frac{7}{2}$.

Одговор: C.

716. Могу се увести ознаке: $a=3t$, $b=5t$, $c=8t$, па је запремина $V=abc=120t^3=61\,440$, $t^3=512$, тј. $t=8$ и $a=3\cdot 8=24\,\mathrm{cm}$.

Одговор: E.

717. Неједначина се може написати у облику $\frac{2x-3}{3x-3}-1\geqslant 0$, тј. $\frac{-x}{3(x-1)}\geqslant 0$. Решења су сви реални бројеви x за које важи $0\leqslant x<1$.

Одговор: E.

718. Из $\frac{1}{3}h\cdot\frac{2}{3}h=8$ налазимо $h=6$, из $\frac{a}{2}\sqrt{3}=6$ следи $a=4\sqrt{3}$, па је $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}$.

Одговор: D.

719. Мешавина садржи $\frac{35}{100}\cdot 5=\frac{7}{4}\,\mathrm{l}$ воде и $\frac{13}{4}\,\mathrm{l}$ алкохола. Нека је x количина алкохола коју треба додати. Тада је

$$\frac{80}{100}\left(\frac{7}{4}+\frac{13}{4}+x\right)=\frac{13}{4}+x,$$

одакле је $x=\frac{15}{4}\,\mathrm{l}$.

Одговор: B.

720. Означимо са O центар већег и са S центар мањег круга, а са M и N додирне тачке спољашње тангенте са већим, односно мањим кругом и са Q подножје нормале из S на дуж OM. Тада је $SQ=MN=\sqrt{OS^2-OQ^2}=\sqrt{676-100}=24$, па је $AT=\frac{1}{2}MN=12\,\mathrm{cm}$.

Одговор: A.

721. Означимо са y последњу цифру броја $n=\overline{a_1a_2\ldots a_ny}$ и са $x=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$. По услову задатка је $10x+y=12x$, тј. $y=2x$. Како је y цифра, то долази у обзир $x\in\{1,2,3,4\}$. Тражени бројеви су 12, 24, 36 и 48.

Одговор: D.

722. Означимо са x, y, z цене прве, друге и треће књиге. Тада је

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2{,}5}=32 \quad \text{и} \quad \frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=48.$$

Ако леве и десне стране прве једнакости помножимо са 10, а друге са 12 и добијене релације саберемо, добићемо $8x+8y+8z=896$, тј. $x+y+z=112$.

Одговор: D.

723. Нека су AB и CD основице датог трапеза, $AD=8$ и M средиште крака BC. Прва кроз M, паралелна правој AD, сече праве AB и CD у тачкама P, односно Q. Како су троуглови BMP и CMQ подударни, то је $P_{ABCD}=P_{APQD}=8\cdot 6=48\,\mathrm{cm}^2$.

Одговор: C.

724. Нека су O и S центри кругова l, односно j, а G и F подножја нормала из S на пречнике CD, односно AB и x тражени полупречник. Тада је $OS=2-x$ и $FS=x$, па је $OF=\sqrt{OS^2-FS^2}=\sqrt{4-4x}$. Како је $ES=1+x$ и $GE=1-x$, а $GS=OF$, применом Питагорине теореме за троугао GSE добијамо $(1-x)^2+4-4x=(1+x)^2$, одакле је $x=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{cm}$.

Одговор: D.

725. Нека је троугао ABC основа, а S врх пирамиде, Q оно теме коцке које припада троуглу ABC и x ивица коцке. Запремина пирамиде $SABC$ се може представити као збир:

$$V_{ABCS}=V_{ABSQ}+V_{ACSQ}+V_{BCSQ},$$

тј. $\dfrac{1}{6}\cdot 2\cdot 3\cdot 6=\dfrac{1}{6}(2\cdot 3\cdot x+2\cdot 6\cdot x+3\cdot 6\cdot x)$, одакле је $x=1\,\mathrm{cm}$.

Одговор: D.